К. Иберла

Математико-статистические методы · за рубежом ·

12345
67890

Факторный анализ

K. Überla

FAKTORENANALYSE

Eine systematische Einführung
für Psychologen, Mediziner, Wirtschafts-und Sozialwissenschaftler

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977

К. Иберла

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Перевод с немецкого В. М. ИВАНОВОЙ

Предисловие А. М. ДУБРОВА

Москва «Статистика» 1980

ББК 22.172
И14

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ЗА РУБЕЖОМ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам.

2. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.

3. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 1.

4. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 2.

5. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.

6. Болч Б. У., Хуань К. Д. Многомерные статистические методы для экономики.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии.

И $\frac{10805^{*}-034}{008(01)-80}$ 45—80 0702000000

* Второй индекс 10803.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время в различных отраслях науки и техники возросла роль математического исследования сложных систем и процессов их функционирования. Общепризнано, что из всех управляемых процессов, изучаемых на основе статистических данных, самые сложные — те, которые протекают в экономических и социально-экономических явлениях.

При изучении взаимовлияния различных характеристик экономических процессов в настоящее время широко пользуются вероятностным подходом, который, как показала практика, достаточно эффективен. В последние годы значительно чаще, чем ранее, находят применение методы многомерного статистического анализа, все большее признание получает прикладной многомерный анализ, развиваемый учениками академиков А. Н. Колмогорова и Ю. В. Прохорова. Это направление имеет большое практическое значение, особенно в связи с созданием сети отраслевых АСУ.

Указанные методы позволяют определять скрытые, неявные закономерности, объективно существующие в изучаемых экономических явлениях, но не поддающиеся непосредственному измерению. Самыми перспективными в этом плане являются факторный и компонентный анализ, методы распознавания образов и методы таксономии. Наибольшее распространение в экономических исследованиях получили методы факторного и компонентного анализа. Книга Карла Иберла посвящена факторному анализу, т. е. математическим методам, которые должны были бы иметь большой удельный вес в многомерных статистических исследованиях в экономике. В числе причин появления этой книги автор называет стремление освободить факторный анализ от исключительной связи с психологией (для нужд которой он впервые был применен) и рассматривать его как статистический метод, пригодный для многих отраслей науки, в том числе экономики.

Имеющаяся на русском языке литература в основном рассчитана на более или менее высокий уровень подготовки по линейной алгебре и математической статистике. Однако ни один из авторов не ставил перед собой, как К. Иберла, задачи описания методов факторного анализа для практических работников, стремящихся обстоятельно познакомиться с этими методами для решения реальных задач.

Перевод книги выполнен с третьего издания (1977 г.). Успех книги во многом объясняется удачной методологией изложения. Несмотря на сугубо практическую направленность книги, автор сумел избежать математических упрощений. Вместе с тем строгость математического аппарата не мешает автору добиваться понимания сущности проблемы.

При проведении исследований в экономике применяется ряд техник факторного анализа. Наиболее распространенными являются техники R, Q, P и O. R-техника позволяет определять взаимосвязь между m признаками и r общими факторами (в методе главных компонент между m признаками и r главными компонентами), $m > r$.

С помощью Q-техники определяется степень взаимной близости n объектов исследования путем изучения корреляций между m признаками. Если при R-технике выделяются группы близких признаков, то в данном случае получают группы близких объектов. P- и O-техники относятся к одному объекту исследования. Например, одно предприятие может быть оценено по небольшому числу параметров в разные интервалы времени при помощи P-техники.

O-техника позволяет изучать корреляции не между парами признаков, как в P-технике, а между парами временных интервалов.

Все перечисленные техники и менее часто употребляемые S- и T-техники изложены у К. Иберла. Однако автор ясно отдает себе отчет, что основным видом является R-техника, так как она во многом определяет место остальных техник в исследовании.

К моменту появления книги свыше 95% задач решалось при помощи R-техники. И сейчас, более чем 10 лет спустя, мало что изменилось в этом плане, несмотря на существенное расширение приложений этого мощного математического аппарата в различных отраслях науки и техники. Автор, естественно, отдал предпочтение освещению R-техники факторного анализа.

Методами факторного анализа и главных компонент экономисту можно решить по крайней мере четыре основные задачи:

отыскание скрытых, но объективно существующих закономерностей, которые определяются воздействием внутренних и внешних причин на изучаемый процесс;

сжатие информации путем описания процесса при помощи общих факторов или главных компонент, число которых значительно меньше количества первоначально взятых признаков;

выявление и изучение статистической связи признаков с факторами или главными компонентами; руководитель же после выявления признаков, наиболее тесно связанных с данным фактором, может выработать научно обоснованное управляющее решение, способное повысить эффективность функционирования процесса;

прогнозирование хода развития процесса на основе уравнения регрессии; уравнения регрессии, построенные при помощи результатов, полученных в факторном или компонентном анализе, обладают значительными преимуществами перед классическим регрессионным анализом.

Для решения этих задач необходимо рассмотреть шесть основных проблем: а) общности; б) факторов; в) вращения; г) оценки значений факторов; д) робастности оценки исходных признаков и коэффициентов регрессии и, наконец, е) динамики изучаемых процессов.

Первые четыре проблемы решаются в книге К. Иберла как на уровне подготовленного читателя, так и для читателя, не знакомого с факторным анализом. Автору это удается благодаря двум приемам: применению для разъясиения каждой проблемы простых примеров на основе ручного счета, позволяющих читателю самостоятельно прочувствовать изучаемый прием, и использованию графических пояснений. Так, например, невозможно более наглядно представить себе проблемы и их место в факторном анализе, чем это продемонстрировано на рис. 2.6. Не менее наглядно и четко читателю представлены составляющие дисперсии на рис. 2.7.

Последние две проблемы не освещаются в книге, так как они родились позднее, при решении практических задач динамического характера. В отличие от других авторов, Иберла не только показывает способы решения различных задач методами факторного анализа, но и очень ясно определяет его место в ряду методов многомерного статистического анализа, таких, как множественный регрессионный анализ, дисперсионный анализ, дискриминантный анализ, метод главных компонент.

При рассмотрении проблемы факторов автор уделяет внимание как современным методам, так и тем, которыми пользовались прежде. Наряду с методами, применяемыми на современных ЭВМ, описываются и методы, удобные для решения задач на клавишных вычислительных машинах (КВМ).

В области факторного анализа наиболее трудной является задача так называемой содержательной интерпретации полученных результатов, для решения которой приходится проводить вращение факторов. И эту проблему автор рассматривает достаточно основательно.

Книга Иберла будет интересна и полезна как специалистам в области статистических методов, так и практическим работникам. Знание метода факторного анализа, понимание исходных предпосылок его применения, особенностей его процедур и грамотная интерпретация результатов являются необходимым профессиональным минимумом для современного экономиста. Эта книга призвана помочь ему получить такие знания.

Широкое внедрение ЭВМ третьего поколения, значительное улучшение математического обеспечения приведет к тому, что методы факторного, компонентного и кластерного анализа войдут в программное обеспечение многих вычислительных центров. Специалисты ВЦ, ЦВЦ АСУ смогут решать задачи многомерного анализа, которые несколько лет тому назад казались безнадежными в силу своей сложности. Эта доступность математических методов иногда рождает ложное впечатление, что анализ экономических задач при помощи ЭВМ избавит специалистов от предварительного глубокого изучения исходных параметров. Более того, решение экономических задач без понимания математических методов может привести к абсурдным результатам и дискредитировать эти эффективные методы. Следовательно, прежде, чем ставить задачу и решать ее на ЭВМ, необходимо всесторонне изучить исходные статистические данные и разобраться в их экономической сущности. Дает ли книга Иберла необходимую информацию о методах факторного анализа? Безусловно, дает. Однако в ней содержится не только достаточная, но и избыточная информация. Например, наряду с современными методами, такими, как максимум правдоподобия, главных факторов и главных компонент, автор также подробно рассматривает центроидный метод и дает примеры для решения на клавишных вычислительных машинах, требующие, как указывается в книге, не менее 30 часов работы.

Для практического овладения методом вполне достаточно, если читатель будет решать приведенные примеры, которые прорабатываются вручную и хорошо раскрывают суть теоретических предпосылок. Пожалуй, все, что создано за последние 70 лет в области факторного анализа, собрано в этой книге, хотя специалисту и не обязательно знать методы, имеющие не столько практическое или теоретическое, сколько историческое значение.

Один из разделов (восьмой) специально посвящен некоторым алгоритмам и работе специалиста на ЭВМ, хотя следует отметить, что он не заменит той литературы по математическому обеспечению и эксплуатации ЭВМ, которая появилась в последние годы в нашей стране.

Предлагаемая книга К. Иберла является хорошим пособием для широкого круга читателей вне зависимости от уровня их подготовки в области многомерного статистического анализа, тем более что ранее изданная литература в этом направлении стала библиографической редкостью.

Дополнительный список литературы по факторному анализу и проблемам классификации, данный в приложении к русскому переводу, не претендует на полноту, а рассчитан только на ознакомление с некоторыми работами в этой области, изданными у нас в последнее время.

Стремясь к унификации терминологии по факторному анализу, переводчик придерживался тех терминов, которые были приняты при переводе работ Г. Хармана [117] и Я. Окуня. Однако некоторые выражения автора, мало привычные для советского читателя, но хорошо отражающие суть дела, переводчик счел нужным сохранить. Ссылки в тексте на библиографию, помещенную в конце книги, даются в квадратных скобках (числа, набранные курсивом, означают порядковый номер работы данного автора).

А. М. ДУБРОВ, доктор технических наук

● ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Успех книги отражает растущий интерес исследователей к технике факторного анализа. Это второе издание по существу не отличается от первого, за исключением исправлений обнаруженных в тексте ошибок. Я благодарен всем, кто своими письменными и устными замечаниями, а также рецензиями содействовал выявлению и устранению допущенных неточностей.

Ульм, январь 1971 *КАРЛ ИБЕРЛА*

● ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Факторный анализ играет существенную роль во многих психологических исследованиях. Он делает возможным сведение обширного числового материала к нескольким независимым и простым факторам. Методами факторного анализа можно подтвердить существующую научную гипотезу или сформулировать некоторую новую гипотезу на основе большого объема наблюдений по выделенным существенным компонентам. Подобные задачи возникают во многих эмпирических науках. В литературе на немецком языке до сих пор отсутствовало полное систематическое изложение факторного анализа, что явилось одной из причин написания данной книги.

Начало развития факторного анализа было положено учеными из англосаксонских стран. В последние десятилетия появилась обширная литература, посвященная различным проблемам факторного анализа, в том числе и на немецком языке. Чтобы участвовать в дискуссии, развернувшейся за границей по отдельным вопросам и по методу в целом, необходимы обширные знания в этой области. Другой причиной появления книги в данной форме явилось стремление автора освободить факторный анализ от переплетения с психологическими концепциями. Факторный анализ следует рассматривать как статистический метод независимо от конкретной области его применения.

Книга возникла в результате накопленного опыта применения методов. По своей структуре она соответствует образу мыслей практиков и не претендует на систематическое изложение математической стороны проблемы. В основном книга ориентирована на читателя, занимающегося наукой о поведении человека, который хотел бы обстоятельно познакомиться с факторным анализом. Но несмотря на практическую направленность книги, автор сознательно отказался от упрощений и готовых рецептов. С одной стороны, предпочтение отдавалось математической точности перед ясностью изложения, но с другой — все усилия были приложены к тому, чтобы добиться понимания сущности проблемы.

Книга состоит из восьми больших разделов. Во введеини, кроме общей постановки задачи, приведены формулы корреляционного и регрессионного исчисления и необходимые сведения из матричной алгебры, касающиеся матриц, векторов и определителей. Во втором разделе сделан обзор методов факторного анализа с обсуждением различных подходов к нему. В том же разделе проведено разбиение процедуры факторного анализа на отдельные проблемы и дана четкая формулировка их.

Каждой из четырех осиовных проблем факторного анализа посвящен соответствующий раздел книги с указанием важнейших способов решения. В разделе 7 представлены сравнительные исследования конкретных моделей. Такие исследования являются важными источниками информации о соответствии и точности выбранного способа решения. Последний раздел посвящен частным проблемам факторного анализа.

Читателю, не осведомленному в факторном анализе, рекомендуется следующий план чтения книги: гл. 1.1 и 1.2 должны быть просмотрены, а гл. 1.3 хорошо проработана, если ее содержание не очень известно. Гл. 1.4 нужно вначале бегло прочитать, обращая внимание на определения и правила действия над матрицами. По мере того как будут встречаться вычислительные операции, обсужденные в гл. 1.4, следует опять возвращаться к этой главе и более подробно заниматься соответствующими процедурами, проделывая самостоятельно необходимые вычисления. Раздел 2, посвященный обзору факторного анализа, должен быть прочтен полностью, при этом особенно тщательно изучены гл. 2.1 и 2.2. Гл. 2.3 посвящена тем же самым вопросам, что и гл. 2.2, но для некоторых она будет более понятна в связи с употреблением в ней геометрических представлений. Гл. 2.4 и 2.5 следует рассматривать как дополнения к основному разделу. Изучение раздела 3 можно начинать как с гл. 3.1, так и с гл. 3.2 — в зависимости от того, с каким методом читатель хочет познакомиться раньше: с методом главных факторов или с центроидным методом. Тот, кто только начинает заниматься факторным анализом, должен обязательно прочитать параграфы 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6, а также гл. 3.6 и 3.7. Проблема общности должна быть основательно изучена (раздел 4). Раздел 5, посвященный проблеме вращения, должен быть хорошо проработан до гл. 5.7 и 5.8, в которых обсуждаются частные вопросы. В разделе 6 следует обратить внимание на вводные замечания и гл. 6.2 и 6.3. Разделы 7 и 8, за исключением гл. 8.9, при первом чтении могут быть пропущены. Дело в том, что в этих двух последних разделах излагается материал, требующий глубокого понимания факторного анализа. Те, кто уже приобрел некоторый опыт работы со статистическими методами и знает матричную алгебру, могут изучать материал подряд, не делая пропусков. Такой читатель может следовать предлагаемому плану чтения лишь при первом ознакомлении с книгой.

Я многим обязан за помощь при написании книги. Профессор Р. Б. Каттелл вызвал у меня интерес к факторному анализу. Подход, присущий его школе, лег в основу книги. Профессор С. Коллер в значительной мере содействовал появлению рукописи. Дискуссии с ним придали произведению особую направленность. Его постоянное стремление к ясному изложению основной проблематики и к систематизации подходов оказало влияние на многие разделы. Основой книги послужила моя докторская диссертация «Факторный анализ в медицине. Вопросы методики и проблемы применения».

Я весьма признателен своим коллегам из института медицинской статистики и документации в Майнце, а также коллегам из других институтов, которые поддерживали меня в дискуссиях. Группа студентов-психологов из института в Майнце прочитала рукопись и дала многочисленные замечания. Я хотел бы выразить свою благодарность господам Питчману и Брайтлауху за рисунки к книге, а также фрейлейн Хеннекен и фрау Томас за перепечатку рукописи. Господин Кнодт просмотрел список литературы и вместе с фрау Хейзер прочитал корректуру. Словом, я весьма благодарен всем, кто как-либо содействовал появлению данной книги. Издательство «Шпрингер» весьма любезно шло навстречу моим пожеланиям. Особо глубокой благодарности заслуживает моя жена за постоянную заботу и терпение.

Просьба ко всем читателям сообщать о всех замеченных ошибках. Это необходимо автору для дальнейшего совершенствования книги.

Майнц, январь 1968 КАРЛ ИБЕРЛА

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наука является процессом, состоящим из непрерывного цикла построения моделей наблюдаемой действительности, которая вначале кажется необозримой в своем многообразии и не может быть охвачена моделью. В естественных науках наряду с накапливанием наблюдений происходит формирование теоретических положений, которые проверяются затем на новых данных и постепенно совершенствуются. В последнем столетии наблюдается значительное дифференцирование методов мышления и подходов к решению естественнонаучных задач, что обусловлено большим числом проведенных исследований и появлением общих и специальных научных методик.

Важным этапом в научном прогрессе явилось применение математических методов. Математика предоставляет возможность построения неограниченного числа моделей, с помощью которых можно точно описывать действительность. Вначале приходилось полагаться на интуицию и гениальность отдельного исследователя, который составлял такую модель и проверял ее соответствие реальным условиям. Однако эти обе функции исследователя, а именно построение модели и проверку ее адекватности, можно систематизировать и формализовать.

Теоретические положения физики, химии и других естественных наук в значительной степени основаны на математических моделях. Для этих наук характерно то, что в условиях одного эксперимента в принципе можно проверить определенную закономерность путем манипулирования величинами в широких пределах, пользуясь их причинной обусловленностью. В науках, занимающихся изучением поведения человека, к которым относится психология, социология, частично медицина и многие смежные области других отраслей знаний, где отсутствует четкая функциональная связь между причиной и следствием, один опыт не играет такой решающей роли. Присущие им закономерности можно обнаружить лишь путем статистической проверки результатов многих опытов, принимая или отклоняя определенные гипотезы. Процедура статистической проверки начинается с формулировки нулевой гипотезы («нет никакого различия») и альтернативной («имеет место различие»). Затем на основании выборки производится проверка нулевой гипотезы относительно альтернативной с помощью соответствующего критерия. Результатом статистической проверки является вывод о том, в скольких случаях на каждые 100 проведенных испытаний в предположении определенной модели отклонения от нее можно считать случайными. Может быть определена вероятность ошибочного принятия альтернативной гипотезы. Вероятность допустить ошибку при принятии нулевой гипотезы тоже имеет вполне определенное значение. Таким образом, исследователь на заданном уровне значимости может остановиться на одной из этих гипотез. Имеется большой набор критериев значимости, с помощью которых осуществляется проверка различных гипотез. Выполнив процедуру проверки статистических гипотез, исследователь приходит к выводу о возможности принятия определенной модели. Для этой процедуры важно, на основании каких соображений исследователь определяет вид модели, описывающей данное явление.

В то время как статистическую проверку гипотез можно рассматривать в качестве попытки систематизировать процедуру принятия решений на фоне варьирующих наблюдений, статистическое оценивание можно считать попыткой систематизировать интуицию исследователя. При статистическом оценивании в предположении определенной математической модели речь идет о том, чтобы по возможности точно определить истинное значение параметра генеральной совокупности исходя из выборочных наблюдений. Примерами статистического оценивания являются предсказание исходов выборов и оценка недостатков промышленного производства. Если соблюдены предпосылки выборочного метода и принята определенная модель, то можно приступать к построению доверительных границ, определяя интервал, который, например, в 99 из 100 случаев покрывает истинное значение параметра генеральной совокупности.

В попытке систематизировать интуицию факторный анализ представляет шаг вперед по сравнению с методом статистического оценивания. Факторный анализ является методикой, которая в определенном смысле сама является источником возникновения гипотез. Остановимся вначале на специфическом характере гипотез, порождаемых факторным анализом. Мы исходим из того, что несколько измеряемых переменных сильно коррелируют между собой. Это означает, что либо они взаимно определяют друг друга, либо связь между этими переменными обусловливается какой-то третьей величиной, которую непосредственно измерить нельзя. Модель факторного анализа всегда связана с последним предположением, т. е. измеряемая величина является лишь формой проявления величины, остающейся на заднем плане и не поддающейся непосредственному измерению. Это предположение во многих случаях вполне реально. Возникает задача, можно ли по данным переменным выделить величину, так называемый *фактор*, который объяснил бы наблюдаемые связи. Слово *фактор* используется в другом смысле, чем это принято обычно: речь идет о математической величине, получаемой на основе наблюдений. Спрашивается, какова самая простая линейная гипотеза о структуре этой величины, скрывающейся за коррелированными переменными. Сколько нужно гипотетических величин, или факторов, и каких, чтобы по возможности более точно воспроизвести и объяснить наблюдаемые связи между переменными? Каким образом свести большое количество данных к возможно более простой концепции с минимальной потерей информации?

Получить ответы на такие вопросы — давняя сокровенная мечта исследователей. Факторный анализ пытается это сделать. Образно говоря, он заглядывает за кулисы того, что непосредственно измеряется, и стремиться определить истинные функциональные величины, лежащие в основе данного явления. Основная цель факторного анализа состоит в выявлении гипотетических величин, или факторов, по большому числу экспериментальных данных. Факторы должны быть по возможности простыми и достаточно точно описывать и объяснять наблюдаемые величины. Итак, факторный анализ является методом, упорядочивающим кажущуюся хаотичность изучаемого явления и генерирующим новые гипотезы. Число выделяемых факторов должно быть меньше набора исходных величин, структура этих факторов и их взаимосвязь должны быть возможно более простыми. Возникает вопрос: что же находится за кулисами экспериментальных данных и как может выглядеть система выделенных факторов в самом простом случае?

Исходной предпосылкой анализа является наличие взаимосвязи между несколькими одновременно наблюдаемыми переменными. В качестве количественной меры связи между двумя переменными используется коэффициент корреляции (см. с. 24). Он может принимать значения от —1 до +1. При этом если он приближается к нулю, то это свидетельствует об отсутствии линейной связи, и чем более он близок к +1 или к —1, тем более тесная линейная связь существует между переменными. Все вычисленные коэффициенты корреляции располагаются соответствующим образом в корреляционной матрице. В этой матрице содержится важная информация о взаимоотношениях переменных с учетом влияния помех, причиной которых может являться, например, неоднородность материала. При анализе такой корреляционной матрицы получают гипотетические величины, так называемые факторы, которые находятся в определенных взаимоотношениях с переменными. На рис. 1.1 схематично показано, как может выглядеть связь между переменными и факторами. Значения переменных от 1 до 8 были получены в результате наблюдения над рядом индивидуумов. Факторный анализ этих данных показал, что в основном два фактора, а именно *А* и *Б*, достаточно точно определяют взаимосвязь переменных. При этом фактор *А* тесно связан с переменными 1, 2, 3, 6 и 7, а фактор *Б* — с переменными 4, 5, 6, 7 и 8. Факторы представляют собой влияющие величины, не поддающиеся непосредственному измерению. Они находятся за кулисами изучаемого явления, служат его фоном и могут быть определены только в результате анализа. Примечательно то, что факторный анализ делает возможным выдвижение дифференцированных гипотез о структуре взаимосвязи переменных и факторов, не задаваясь этой структурой заранее и не имея о ней никаких сведений. Эта структура находится по результатам наблюдений. Полученные гипотезы могут быть проверены в ходе дальнейших экспериментов.

Итак, задачей факторного анализа является нахождение простой структуры, которая бы достаточно точно отражала и воспроизводила реальные, существующие в природе зависимости. При этом на реализацию принципа простой структуры оказывают сильное влияние вид и количество экспериментальных данных. Односторонний подход к подбору переменных неизбежно приведет к таким факторам, которые не будут соответствовать изучаемому явлению. Результат факторного анализа определяется постановкой всего исследования. Нельзя надеяться на то, что хаотически собранные данные, подвергнутые факторному анализу по имеющейся стандартной программе, дадут осмысленные результаты. Но не исключено, что конечный результат факторного анализа может оказаться неудовлетворительным также в том случае, когда сбор данных проводился целенаправленно, согласно намеченному плану исследования.

Теоретические положения факторного анализа относительно трудны для восприятия. Практическое осуществление факторного анализа предполагает применение ЭВМ для обработки данных. Метод не имеет

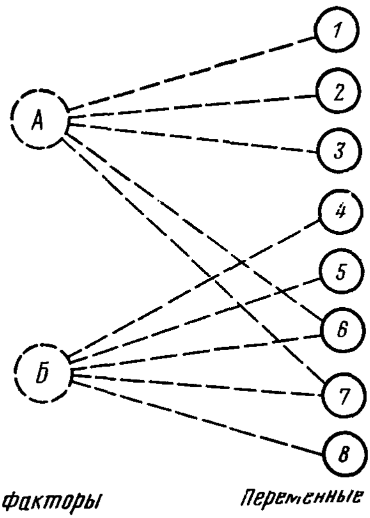


Рис. 1.1. Взаимосвязь переменных с факторами. Гипотезы о связи факторов с переменными, выдвинутые с помощью факторного анализа на основе экспериментальных данных, обозначены пунктиром. Факторы — влияющие величины, не поддающиеся непосредственному измерению, находящиеся за кулисами изучаемого явления. Переменные — наблюдаемые величины, подвергающиеся непосредственному измерению, находятся на поверхности изучаемого явления

однозначного математического решения, для получения такового на некоторых этапах используются различные вспомогательные приемы. Из-за этой неопределенности факторного анализа некоторые исследователи ставят под сомнение его полезность как орудия научного познания действительности. Сторонники факторного анализа объясняют встречающиеся в методе противоречия. Как в любой прикладной науке, здесь следует обращать внимание на различие между математической моделью и реальным содержанием изучаемого явления. Алгебраически-вычислительная сторона метода, в которой речь идет только о решении системы уравнений и точности вычислений, является лишь одним аспектом проблемы. Для факторного анализа характерен также статистический подход, применяемый, например, при проверке гипотезы о числе факторов, подлежащих выделению. Наряду с этим существует еще проблема содержательной интерпретации выделенных факторов, что не имеет места при построении математико-статистической модели. Три вышеназванных аспекта — алгебраически-вычислительную сторону, статистический подход и интерпретацию факторов —

следует учитывать при проведении факторного анализа и разграничивать их.

Применение факторного анализа особенно эффектно в таких областях, где невозможно манипулировать наблюдаемыми переменными. Исследование поведения человека или его физиологических параметров, а также различных общественных явлений нельзя проводить классическим способом, поддерживая на одном и том же уровне определенные величины или вводя различные ограничения. Однако для большинства явлений природы характерна вариация признаков. Ковариация различных признаков в неизменном окружающем мире дает возможность после точного анализа делать выводы, аналогичные результатам классических экспериментов.

Далее будут коротко затронуты некоторые существенные вопросы, возникающие при проведении факторного анализа, для того, чтобы на конкретных примерах показать, при каких условиях какой метод окажется особенно пригодным. Естественно, в первую очередь примеры будут относиться к области психологии, из которой и развился факторный анализ.

Классическим примером применения факторного анализа является теория интеллектуальных возможностей. Можно предположить, что интеллектуальные возможности состоят из большого числа параметров, характеризующих различные способности человека, такие, как память, внимательность, компетентность и т. д. Этим способностям с помощью психологических тестов пытаются дать количественные оценки и определяют их взаимосвязь. Тесты способностей, как правило, характеризуются положительными корреляциями. Спирмэн предположил, что все возможные совокупности корреляций обусловливаются одним генеральным фактором g, влияющим на все переменные. Этот генеральный фактор совпадает с тем, что обычно в обиходе называют смышленостью. После его психометрической изоляции можно определить, какие методы измерения более всего пригодны для его оценки, т. е. вычисляют нагрузки этого фактора по различным тестам. Обширные исследования показали, что одного генерального фактора недостаточно для описания наблюдений над интеллектуальными способностями. Может быть постулирована более сложная гипотеза, допускающая несколько факторов для адекватного статистического описания интеллекта. Это достигается путем введения новых методов измерения, связанных с решением арифметических задач, с проверкой способностей к абстрактному мышлению, с проверкой словарного запаса и т. д. Другими словами, методы измерения представляют собой набор тестов, применяемый к репрезентативной выборке индивидуумов. Этим самым исследователи получили в руки измерительный инструмент для оценки гипотетической величины интеллекта, расчлененного на отдельные факторы. С помощью факторного анализа было показано, что интеллектуальные возможности человека можно представить в виде эмпирических показателей, а не только в виде слов или понятий. Эти показатели имеют количественные оценки. Понятие интеллекта заменяется рядом факторов, чьи отображения устанавливаются с помощью методов факторного анализа. На основе психологических тестов, выявляющих интеллектуальные возможности человека, можно выделить набор факторов, которые большей частью коррелированы положительно, например факторы пространственного воображения, понимания слов и т. д. С помощью факторного анализа эмпирическим путем проверялись различные психологические теории интеллектуальных возможностей и умственных способностей человека. Такие исследования нашли практическое применение при оказании помощи в выборе профессии, при распределении рабочей силы по имеющимся рабочим местам, в решении проблем воспитания детей в семье и школе, в психотерапии и т. д.

Аналогично исследованию интеллектуальных возможностей с помощью факторного анализа многие ученые занимались изучением индивидуальных особенностей. Среди этих ученых прежде всего следует назвать Каттелла, который с помощью почти 2000 различных психологических тестов выделял в многочисленных экспериментах от 50 до 60 факторов. Каждый из этих факторов оценивался с помощью набора психологических тестов, примененных к отдельному испытуемому. По поводу психологического смысла выделенных факторов проводится много дискуссий, но уже стало очевидно, что эмпирический путь выявления структуры психологических понятий перспективен. Различные теории, которые возникли в результате использования факторного анализа, хорошо согласуются с известными клиническими наблюдениями и делают возможной классификацию людей по их характеру. Например, с помощью набора тестов можно определить, является ли испытуемый неврастеником или обладает бодрым и детерминированным характером, причем опыт показал, что результаты тестов соответствуют заключениям врачей.

Из области медицины пока еще нельзя привести таких убедительных примеров. В настоящее время дискутируется возможность диагностирования с помощью ЭВМ, где факторный анализ играет подчиненную роль. Он позволяет выработать единый подход к распознаванию болезней пациентов. В качестве примера можно привести исследование функционального состояния щитовидной железы, выполненное Овероллом и Вильямсом. Факторный анализ в этом случае сделал возможной оценку по ряду измеримых параметров величины, непосредственно не измеримой, а именно содержания тироксина в крови, не производя прямых измерений на щитовидной железе. Бочник и его сотрудники разработали с помощью факторного анализа некоторые комплексные вопросы из области психиатрии и неврологии. Основной проблемой в медицине в настоящее время является определение биологических типов. Методы факторного анализа уже привлекались к исследованию морфологических параметров для нахождения факторов, характеризующих конституционные особенности человека. Опыт показывает, что факторный анализ может с успехом применяться для решения многих медицинских задач.

Факторный анализ начинает применяться и в других областях знаний, например в экономике — для выявления факторов, действующих в народном хозяйстве, или в социологии — для анализа результатов выборов. Но надо признаться, что, несмотря на эти попытки применения, факторный анализ как научная методика оправдал себя лишь в отдельных направлениях психологии. Аппарат факторного анализа привлекают в первую очередь к исследованию таких явлений, где необходимо выявить наиболее простую структуру по большому числу наблюдаемых переменных. По мере накопления наблюдаемого материала выявить структуру только с помощью логических рассуждений становится труднее и на это затрачивается много времени. Факторный анализ позволяет произвести упорядочение данных, коротко описать взаимоотношения между переменными и получить вспомогательный материал для проверки интуитивных соображений исследователя.

В заключение хотелось бы предостеречь читателя от возможных ошибочных выводов, которые могут быть получены в результате неправильной содержательной интерпретации факторов. Кроме того, факторному анализу присущи некоторые трудности, которые обычно формулируются не полностью и описываются лишь в отдельных статьях. Несмотря на это — или как раз поэтому, — имеет смысл приложить усилия к овладению методом. Главной целью данной книги является возможно более широкое освещение трудностей и дискутирование основных проблем факторного анализа, даже если от этого повысятся требования к подготовке читателя и пострадает простота изложения. Естественно, что при таком способе изложения придется ожидать «ловушек», которых не избежать ни доверчивому новичку, ни опытному исследователю.

1.2. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Здесь не может быть изложена подробная история развития факторного анализа. Историка, интересующегося естественными науками, мог бы, пожалуй, привлечь этот своеобразный раздел, отражающий развитие идей в этой области. Далее показывается, каковы причина и источник возникновения факторного анализа, какова была его первоначальная цель, с какими представлениями он был связан и как он медленно освобождался от них и превратился, наконец, в самостоятельную методику, в которой нашли отражение различные исходные идеи, присущие различным школам факторного анализа. Ретроспективный взгляд на развитие факторного анализа вскрывает неоднородность этой области статистических исследований, которую едва ли способна охватить одна книга. Исторический подход содействует пониманию материала, даже если в процессе изложения используется ряд понятий, определения которых будут даны позднее. Более подробная историческая справка имеется у Барта [27; *10*], Додда [77], Ройса [245; *1*], Венсана [294] и в других оригинальных работах.

Факторный анализ своими корнями связан с научным мировоззрением второй половины XIX столетия. Спэнсер, Гальтон и другие ученые обсуждали в то время существование общей одаренности и специфических способностей. Пирсон, работая с антропометрическими данными, в 1901 г. выдвинул идею метода главных осей*. Но началом современного этапа в развитии факторного анализа принято считать статью Спирмэна, опубликованную в 1904 г. под названием: «General intelligence objectively determined and measured». Выдвинутые в ней идеи послужили основой дискуссии, перераставшей иногда в жаркие споры, в последующие два десятилетия.

Спирмэн исходил из того, что один генеральный фактор, обозначенный им буквой g, и один характерный фактор оказывают решающее влияние на все интеллектуальные возможности. Он пытался проверить эту психологическую теорию с помощью своей простой факторной модели. Корреляции между различными психологическими тестами, с помощью которых контролировались интеллектуальные возможности, он объяснял генеральным фактором g и для каждого теста выделял один дополнительный характерный фактор. Эта так называемая двухфакторная теория (см. также 3.4.3) через некоторое время, когда психологи начали работать с большими наборами психологических тестов, оказалась несовершенной. Спирмэн до конца своей жизни придерживался своей концепции генерального фактора и продолжал проводить повторные исследования с различными переменными.

В первые десятилетия XX столетия на развитие факторного анализа оказали влияние работы С. Барта, К. Пирсона, Г. Томсона, Д. Гарнетта и К. Хользингера. Кроме того, что они все исходили из теории Спирмэна, их объединяло стремление доказать существование или, наоборот, отсутствие генерального фактора g. После 1925 г. стало ясно, что теория Спирмэна неприменима ко всем наборам тестов. Хользингер в своей бифакторной теории пытался преодолеть недостатки, присущие двухфакторной теории. В свою модель кроме генерального и характерных факторов он включил групповые.

Однако концепция одного генерального фактора оказалась несостоятельной, и дальнейшее развитие теории привело, наконец, к так называемому многофакторному анализу Тэрстоуна. Тэрстоун не был первым, кто выделил несколько факторов из корреляционной матрицы. Но он внес значительный вклад в развитие теории, указав, что минимально необходимое число факторов соответствует рангу корреляционной матрицы. Использование Тэрстоуном матричной алгебры явилось переломным моментом в истории факторного анализа, позволив по-новому трактовать основные его положения. Концепция простой структуры, предложенная Тэрстоуном, вызвала оживленные дискуссии, продолжающиеся до настоящего времени. Несмотря на существенный недостаток—отсутствие математической однозначности решения, — создание многофакторной теории явилось значительным прогрессом по сравнению со всеми предыдущими этапами развития факторного анализа. За последнее время в этой области ничего более значительного не было сделано. Многофакторный метод применим к любой корреляционной матрице. Его отличает отсутствие генерального фактора и перекрытие групповых факторов. Многофакторный метод является в настоящее время распространенной формой анализа

---

* Термином «метод главных осей» автор обозначает два различных метода: главных компонент и главных факторов. — *Примеч. пер.*

корреляционной матрицы, поэтому ему будет уделяться много внимания. Вслед за Тэрстоуном в последующие годы с помощью этого метода были проведены многочисленные психологические исследования. В огромном потоке публикаций выделяются работы школы Гилфорда и рабочей группы Каттелла, которые занимались эмпирическим анализом индивидуальных особенностей и расширили область применения факторного анализа. Наряду с этим продолжались усилия по совершенствованию теории и методики вычислений. Хотеллинг в 1933 г. дал математическое обоснование метода главных осей. Хорст [142; *1*] в 1937 г. высказал идею так называемого *группового метода факторного анализа*, теоретическое обоснование которого было дано Гуттманом [112; *2*] в 1944 г. Вслед за этим Хользингер [138; *2*] и Тэрстоун [286; *2*] предложили простые вычислительные процедуры группового метода для практических приложений. В настоящее время этот метод не находит широкого применения.

В последние три десятилетия на развитие факторного анализа оказывает сильное влияние математическая статистика и применение ЭВМ. Лоули [182; *1*] в 1940 г. предложил оценивать факторные нагрузки методом максимального правдоподобия, а Рао [230; *3*] в 1955 г. в своей работе «Estimation and tests of significance in factor analysis» описал так называемый *канонический факторный анализ*. Оба автора так же, как и другие специалисты по математической статистике, сосредоточили свои усилия на том, чтобы описать факторный анализ в статистических терминах. Факторные решения, полученные на основе использования статистических методов, вызывают до сих пор оживленные споры. Несомненно, статистический подход является шагом вперед в развитии факторного анализа. В этой связи следует упомянуть о вкладе немецких ученых, среди которых выделяется работа Баргмана [12; *2*] о проверке значимости простой структуры, опубликованная в 1955 г.

Едва ли можно переоценить влияние применения ЭВМ в факторном анализе. ЭВМ сделало возможной реализацию метода главных факторов и всех новейших методов выделения факторов, а также процедуру вращения. Конечно, при этом речь идет в первую очередь о сокращении времени вычисления и об облегчении труда оператора. Это в свою очередь привело к появлению новых методов расчетов и новых вариантов постановки задач. Выполнение расчетов на ЭВМ позволило обрабатывать большие корреляционные матрицы, а также сделало возможным применение метода Монте-Карло и моделирования в процедурах факторного анализа.

Современный этап развития факторного анализа характеризуется исследованием многих частных проблем с различными моделями. Значительная работа по усовершенствованию методики факторного анализа проводится в США и Англии. Хотя область его применения как метода научного познания расширяется, он все еще продолжает применяться главным образом в психологии. По-видимому, в факторном анализе наступает сейчас переломный момент, когда возникает необходимость опять доказывать его практическую пользу, но в более широких областях.

1.3. КОРРЕЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ

Проведение факторного анализа предполагает определенный базис статистических знаний, например умение вычислять среднее значение и стандартное отклонение, использовать статистические критерии, а также знакомство с корреляционным и регрессионным анализом. Большинство книг по статистике обсуждает эти вопросы. В этой главе кратко описываются основные понятия корреляционного и регрессионного анализа. Факторный анализ исходит в большинстве случаев непосредственно из коэффициентов корреляции, поэтому мы также начнем с обсуждения метода их вычисления.

Предположим, у группы, состоящей из n лиц, или у n объектов, измеряются два признака или переменные x и y. В результате имеем отдельные значения $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$. Вначале оба ряда наблюдения рассматриваем раздельно и для каждого из них вычисляем статистические характеристики. Важнейшей из этих характеристик является среднее значение $\bar{x}$, которое получают, разделив сумму отдельных значений на n. Соответствующая формула приведена в строке 2 табл. 1.1. Для обозначения сложения применяется знак суммы с соответствующими индексами $\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \ldots + x_j + \ldots + x_n$. Если из контекста ясно, что j пробегает значения от 1 до n, то иногда суммирование обозначают таким образом: $\sum_j x_j$ или Σx_j, или Σx.

Кроме среднего значения вычисляют меру отклонения значений каждой переменной от этой средней. Для этого сначала определяют так называемую сумму квадратов отклонений отдельных значений от среднего (сокращенно СКО). В табл. 1.1 в строке 3 приведено выражение суммы квадратов отклонений, обозначенное S_{xx} или S_{yy}, но для вычислений более удобна формула в строке 4. Если разделить сумму квадратов отклонений на $n-1$, так называемое число степеней свободы, то получим дисперсию (строка 5). Извлекая корень квадратный из дисперсии, получим характеристику, называемую стандартным отклонением (строка 6). Стандартное отклонение является мерой среднего отклонения отдельных значений от их средней.

До этого момента каждая переменная рассматривалась отдельно, по значениям каждой были вычислены среднее значение и стандартное отклонение. Теперь поставим вопрос: как можно по одной из этих величин делать заключение о другой? Этот вопрос, заключающийся, по существу, в том, как по величине x судить о величине y, является задачей *регрессионного исчисления*. Для графического изображения обеих переменных используется прямоугольная система координат $x0y$. Любой паре значений (x_j, y_j) для каждого объекта соответствует точка на графике рис. 1.2. Если рассматривать скопление точек* на графике, то можно увидеть, что в общем с увеличением x значения y также увеличиваются. Теперь нужно провести через это скопление

* Это скопление точек на координатной плоскости $x0y$ называется полем корреляции, корреляционной диаграммой или диаграммой рассеяния. — *Примеч. пер.*

Таблица 1.1

Формулы корреляционного и регрессионного исчисления

Название	Строка	Переменная x	Переменная y
Объем выборки	1	n	n
Среднее значение	2	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_j x_j$	$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_j y_j$
Сумма квадратов отклонений (СКО)	3	$S_{xx}=\sum_j (x_j-\bar{x})^2$	$S_{yy}=\sum_j (y_j-\bar{y})^2$
	4	$=\sum_j x_j^2-\frac{(\Sigma x_j)^2}{n}$	$=\sum_j y_j^2-\frac{(\Sigma y_j)^2}{n}$
Дисперсия	5	$s_x^2=S_{xx}/(n-1)$	$s_y^2=S_{yy}/(n-1)$
Стандартное отклонение	6	$s_x=\sqrt{S_{xx}/(n-1)}$	$s_y=\sqrt{S_{yy}/(n-1)}$
Сумма произведений отклонений	7	$S_{xy}=\sum_j (x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})=\sum_j x_j y_j-\frac{\Sigma x_j\,\Sigma y_j}{n}$	
Ковариация	8	$s_{xy}=S_{xy}/(n-1)$	
Коэффициент корреляции	9	$r_{xy}=S_{xy}/\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}=s_{xy}/(s_x\cdot s_y)$	
Уравнение регрессии y по x	10	$y=bx+a$, где $b=S_{xy}/S_{xx}$ и $a=\bar{y}-b\cdot\bar{x}$	
Уравнение регресси x по y	11	$x=b'y+a'$, где $b'=S_{xy}/S_{yy}$ и $a'=\bar{x}-b'\cdot\bar{y}$	

точек прямую так, чтобы исходя из x «как можно точнее» оценить значение y. Эти оценки $\hat{y}$ по принятому методу оценивания являются тогда наиболее точными, если сумма квадратов их вертикальных отклонений от действительных значений по возможности является наименьшей. Итак, требуется найти параметры прямой

$$\hat{y} = bx + a, \tag{1.1}$$

из условия

$$\sum_j (y_j - \hat{y}_j)^2 = \min. \tag{1.2}$$

Такая прямая изображена на рис. 1.2. Как и для любой прямой, параметр b здесь характеризует наклон прямой к оси $0x$, а параметр a является аддитивной постоянной. Условие (1.2) соответствует требованию метода наименьших квадратов, так как сумма квадратов отклонений должна обращаться в минимум. Применение этого метода дает оценки параметров a и b наилучшие в смысле метода наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов может также служить для подбора любой кривой, его возможности не ограничиваются только применением к оценке параметров прямой. Изображенная на рис. 1.2

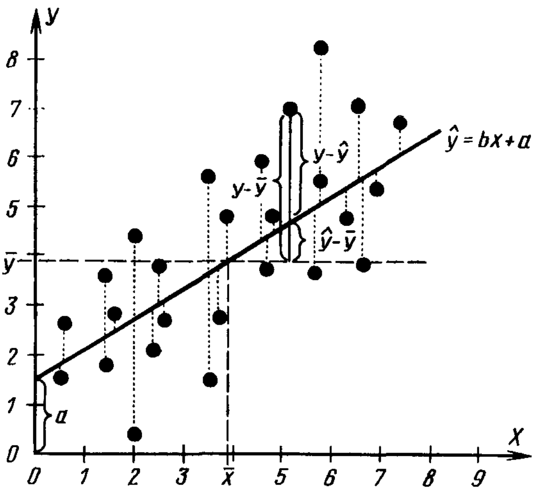


Рис. 1.2. Прямая регрессии y по x. $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние значения переменных. Отклонения отдельных значений от линии регрессии обозначены пунктиром. Величина $y—\hat{y}$ является отклонением измеренного значения переменной y от оценки, величина $\hat{y}—\bar{y}$ является отклонением оценки от среднего значения и величина $y—\bar{y}$ является отклонением измеренного значения от среднего

прямая называется прямой регрессии y по x. Формулы для вычисления указаны в табл. 1.1 (строка 10). Угловой коэффициент наклона прямой b называется коэффициентом регрессии.

Теперь зададимся вопросом, можно ли исходя из тех же самых наблюдений определить как можно точнее соответствующее значение x по значению y. Этим мы меняем постановку задачи, а именно оцениваем x по y, а не y по x. На рис. 1.3 для тех же самых пар значений

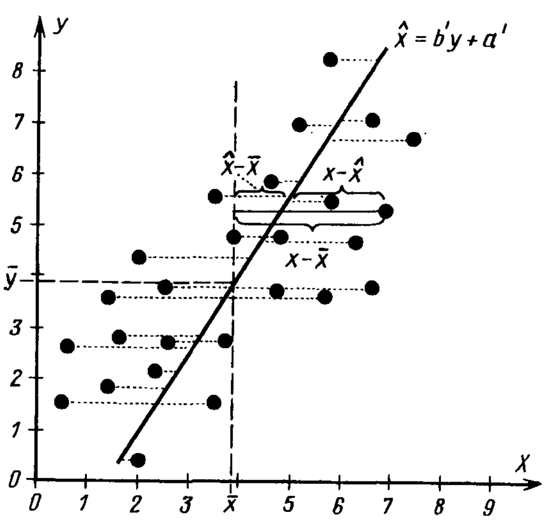


Рис. 1.3. Прямая регрессии x по y. Поле корреляции построено для тех же самых пар значений (x_j, y_j), что и на рис. 1.2, но на него нанесена другая прямая регрессии. Перечисленные под рис. 1.2 отклонения истолковываются аналогично для этого случая, изменяется только направление анализа

$(x_i,\ y_i)$ построена прямая регрессии x по y. При этом минимизируется сумма квадратов отклонений опытных точек, измеренных по горизонтальной оси. Поэтому в результате получается прямая, не согласующаяся с регрессией y по x. Но обозначение и вычисление параметров этой прямой полностью аналогичны (табл. 1.1, строка 11). Выбор вида прямой регрессии определяется содержательной постановкой задачи анализа. Регрессия y по x не идентична регрессии x по y. Из уравнения $\hat{y} = bx + a$ нельзя выразить x через $\hat{y}$. Если, например, хотят приблизительно оценить рост человека по весу, а также решить обратную задачу — сделать вывод о весе человека по росту, то нельзя пользоваться одним и тем же уравнением. Две разные постановки задачи приводят к двум разным регрессионным прямым. Если же на одном графике начертить обе регрессионные прямые, то они образуют между собой угол (см. рис. 1.6). Только в случае совершенно однозначной линейной связи между x и y обе прямые регрессии совпадают и угол между ними становится равным нулю.

При определении взаимосвязи всегда предполагается, что известно, какая величина является исходной, а какая — целевой функцией. Прежде чем составлять уравнение регрессии, выясняют для себя, какую переменную выбрать в качестве аргумента, а какую — в виде функции. Допустима другая постановка задачи, при которой не интересуются направлением и формой зависимости, а хотели бы знать, как сильна связь между двумя рядами наблюдений, относящихся к одним и тем же объектам. Это уже задача *корреляционного исчисления*. Коэффициент корреляции служит мерой линейной взаимосвязи между двумя измеряемыми величинами. Он может принимать значения между $+1$ и -1. Если он равен нулю, то линейная связь между x и y отсутствует. Если он равен $+1$ или -1, то связь строго линейная. На рис. 1.4 схематично изображены возможные поля корреляций при различных значениях коэффициентов корреляции. На диаграмме А точки случайно разбросаны на координатной плоскости. По величине x нельзя сделать вывод об y. Связь между x и y отсутствует, $r_{xy} = 0$ или незначимо отличается от нуля. На диаграмме Б все точки лежат на прямой. Каждому значению x можно однозначно поставить в соответствие значение y. Чем больше x, тем больше y. Если эта прямая соответствует уравнению регрессии, выражающему зависимость между исследуемым и результативным признаками, то уравнение можно использовать для нахождения как y по x, так и x по y. Такой крайний случай, когда коэффициент корреляции точно равен $+1$, практически не встречается. На поле корреляции, изображенном на диаграмме Г, точки разбросаны не случайно, а имеют тенденцию стабилизироваться в определенном направлении. Такая ситуация возникает часто. Чем больше x, тем в общем случае больше y. Линейность этой связи выражается величиной коэффициента корреляции, который в данном случае приблизительно равен $+0{,}50$. По сравнению с диаграммой Б линейная связь под действием несистематических помех расплывается так, что картина кажется затушеванной. В таком случае в зависимости от постановки задачи вычисляется уравнение регрессии либо y по x, либо x по y. Допускается ошибка, если от одного уравнения переходят к другому путем перестановки аргумента и функции. Величина этой ошибки зависит от значения коэффициента корреляции.

Диаграмма В, так же как и Б, отражает строгую линейную связь между x и y. Прямая, однако, не проходит через центр координат.

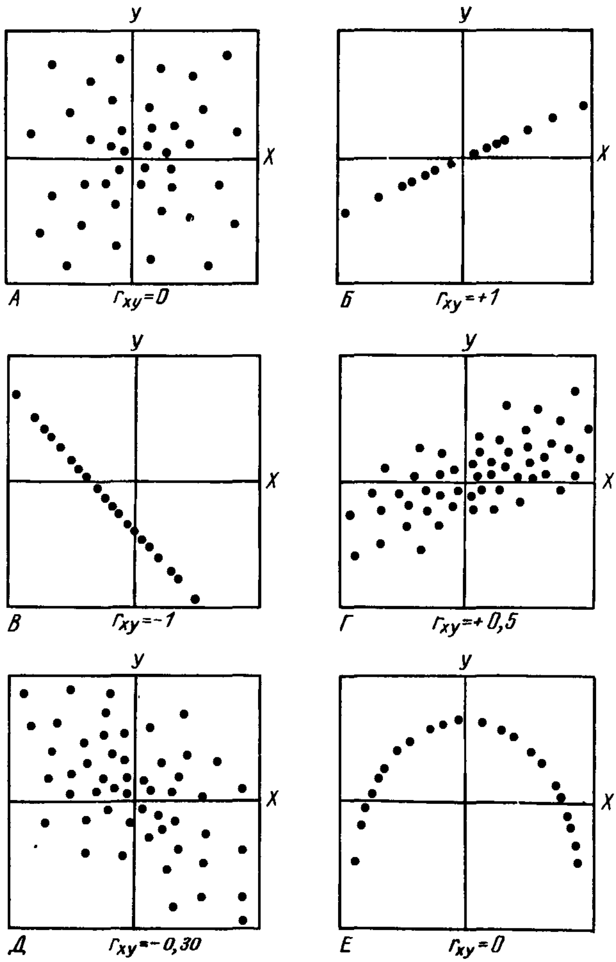


Рис. 1.4. Схематичное изображение различных видов зависимостей с соответствующими значениями линейного коэффициента корреляции. Описание см. в тексте

Кроме того, y увеличивается с уменьшением x, и наоборот. Поэтому коэффициент корреляции отрицателен. Итак, отрицательный знак у коэффициента корреляции свидетельствует об обратной линейной зависимости между x и y, а положительный знак — о прямой линейной зависимости, т. е. с увеличением x увеличивается и y. Крутизна линии регрессии не оказывает влияния на величину коэффициента корреляции или его знак. Знак коэффициента корреляции отражает лишь направление связи между обеими переменными. На диаграмме Д также схематично показано поле корреляции при отрицательном коэффициенте корреляции.

Формулы для вычисления коэффициента корреляции приведены в табл. 1.1. При этом сначала определяется сумма произведений отклонений. Мы уже познакомились с суммой квадратов отклонений для каждой переменной. Вместо того, чтобы возводить в квадрат эти отклонения, а затем суммировать, как указано в строке 3 табл. 1.1, отклонение отдельного значения от средней арифметической одной переменной умножают на соответствующее отклонение другой переменной, а затем суммируют. Таким образом, получают сумму произведений отклонений S_{xy} (строка 7).

По аналогии с дисперсией, которую получают делением суммы квадратов отклонений на $n - 1$, можно вычислить так называемую ковариацию, разделив S_{xy} на $n - 1$. Ковариация s_{xy}, так же как коэффициент корреляции, является мерой взаимосвязи двух переменных. Но этот показатель не нормирован, т. е. величина ковариации зависит от физической размерности переменных. Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Он представляет собой нормированную ковариацию. Ковариация между ростом в дюймах и весом в фунтах численно отличается от ковариации, подсчитанной между ростом в сантиметрах и весом в килограммах для тех же самых лиц. Однако коэффициент корреляции в обоих случаях будет один и тот же. На величину коэффициента корреляции не оказывают влияния линейные преобразования измерительной шкалы, т. е. если результаты измерения увеличить на постоянную величину или умножить на нее, то значение коэффициента корреляции не изменится. Напротив, коэффициенты регрессии и ковариация от подобных преобразований изменяются, но только от мультипликативных членов, а не от аддитивных*.

В литературе на английском языке по регрессионному анализу полную дисперсию разлагают на две составляющие: дисперсию переменной, обусловленную регрессией, и остаточную дисперсию, вызванную ошибками наблюдений. Из рис. 1.2 видно, что расстояние $y - \bar{y}$ состоит из отрезков $\hat{y} - \bar{y}$ и $y - \hat{y}$. Следовательно, имеет место равенство $(y - \bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y}) + (y - \hat{y})$. Если обе части этого равенства возвести в квадрат и просуммировать по всем точкам, то получим

$$(y - \bar{y})^2 = (\hat{y} - \bar{y})^2 + 2(\hat{y} - \bar{y})(y - \hat{y}) + (y - \hat{y})^2;$$

$$\sum_j (y_j - \bar{y})^2 = \sum_j (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + 2\sum_j (\hat{y}_j - \bar{y})(y_j - \hat{y}_j) + \sum_j (y_j - \hat{y}_j)^2.$$

* Данное свойство означает, что коэффициенты регрессии и ковариация изменяются при увеличении или уменьшении значений переменных в одно и то же число раз, но не изменяются при увеличении или уменьшении переменных на постоянные величины. — *Примеч. пер.*

Второе слагаемое в правой части равенства является удвоенным произведением систематической и случайной составляющих и при суммировании оно обращается в нуль, если $(\hat{y} - \bar{y})$ и $(y - \hat{y})$ некоррелированы. Независимость этих составляющих является необходимым условием модели*. Итак,

$$\sum_j (y_j - \bar{y})^2 = \sum_j (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_j (y_j - \hat{y}_j)^2,$$

или (1.3)

$$\frac{\Sigma (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\Sigma (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{n-1} + \frac{\Sigma (y_j - \hat{y}_j)^2}{n-1}.$$

Левая часть равенства (1.3) называется полной дисперсией переменной y. Первый член правой части является дисперсией, связанной с регрессией. Эта дисперсия характеризует рассеивание за счет исследуемого фактора, т. е. является так называемой «объяснимой» дисперсией. Второй член правой части равенства является «необъяснимой» дисперсией, известной под названием остаточной дисперсии. Происхождение этих названий объясняется следующим образом. Отклонения $(\hat{y} - \bar{y})$ зависят от уравнения регрессии, следовательно, представляют собой эффект от регрессионной связи. Таким образом, эта часть вариации объясняется регрессионной моделью. Напротив, отклонения $(y - \hat{y})$ варьируют случайным образом и не могут быть объяснены моделью, в нашем случае — линейной, т. е. эти отклонения отражают влияние случайных факторов. Для наглядности три вида отклонений схематично изображены на рис. 1.5. На всех трех схемах этого рисунка изображена одна и та же регрессионная прямая, одни и те же эмпирические точки на одной и той же координатной плоскости.

Отклонения, изображенные на схеме А, входят в полную дисперсию величины y. На схеме Б изображены отклонения, которые носят систематический характер. Они соответствуют дисперсии, обусловленной регрессией. На схеме В представлены отклонения эмпирических точек от регрессионной прямой, которые носят несистематический характер.

Частное от деления дисперсии, обусловленной регрессией, на полную дисперсию называют коэффициентом детерминации. Коэффициент детерминации используют как характеристику доли вариации в полной дисперсии, обусловленной влиянием фактора x в случае линейной регрессии.

$$r_{xy}^2 = \frac{\text{дисперсия, обусловленная регрессией}}{\text{полная дисперсия}} = \frac{\Sigma (\hat{y} - \bar{y})^2}{\Sigma (y - \bar{y})^2}. \quad (1.4)$$

Коэффициент детерминации изменяется от 0 до 1. Извлекая квадратный корень из этого коэффициента, получим коэффициент корреляции r_{xy}.

* Независимость и некоррелированность являются идентичными понятиями только в случае нормальности распределений величин x и y. — *Примеч. пер.*

Формулой (1.4) можно пользоваться также при нелинейной регрессионной модели. Дисперсия, обусловленная регрессией, вычисляется тогда относительно соответствующих линий регрессий. В случае линейной связи при вычислении коэффициента детерминации, а также коэффициента корреляции безразлично, из какого уравнения регрессии исходят — x по y или y по x. Важно, чтобы вычисленные коэффициенты корреляции дополнительно сверялись с линейной моделью.

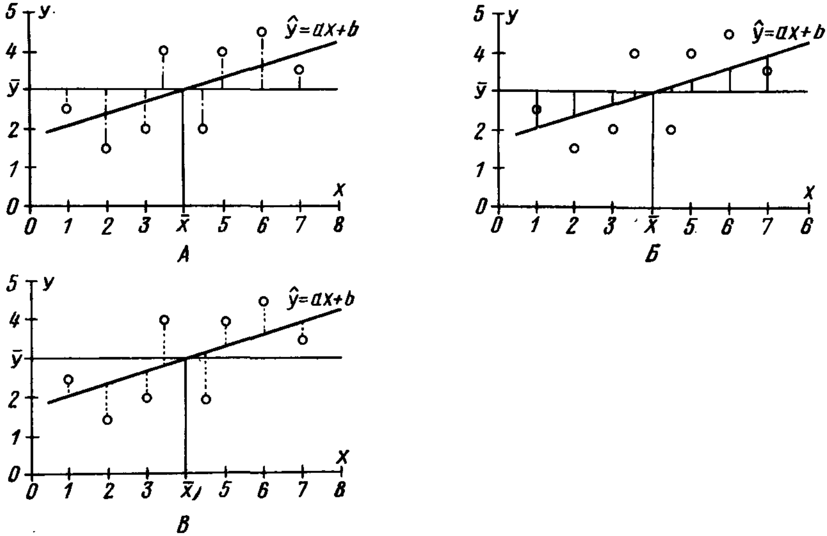


Рис. 1.5. Полная дисперсия; дисперсия, обусловленная регрессией; остаточная дисперсия

На схеме *А* изображены отклонения отдельных значений от средней. $\Sigma(y-\bar{y})^2$ является полной суммой квадратов отклонений. Расстояния $y-\bar{y}$ обозначены штрихпунктирными линиями. На схеме *Б* изображены отклонения оценок от средней. Отклонения носят систематический характер. $\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2$ является мерой вариации, обусловленной регрессией. Расстояния $\hat{y}-\bar{y}$ обозначены сплошными линиями.

На схеме *В* изображены отклонения оценок от наблюдаемых величин. Отклонения носят несистематический характер. $\Sigma(\hat{y}-y)^2$ является мерой вариации, обусловленной влиянием случайных факторов. Расстояния $\hat{y}-y$ обозначены пунктирными линиями

Например, может встретиться случай, изображенный на диаграмме Е, рис. 1.4. Линейный коэффициент корреляции равен нулю, и налицо существование однозначной нелинейной связи. Следовательно, коэффициент корреляции измеряет также качество согласованности опытных данных с принятой гипотезой о линейности связи. Если коэффициент корреляции несущественно отличается от нуля, то это не означает отсутствие связи вообще, а только подтверждает отсутствие линейной связи.

Таким образом, мы косвенно затронули вопрос о значимости коэффициента корреляции. Чтобы ответить на него, коротко рассмотрим принцип применения статистических критериев[1]. Формулируется нулевая гипотеза H_0, которая, например, заключается в том, что наблюдавшийся коэффициент корреляции целиком обусловлен случайными колебаниями выборки, на основании которой он вычислен*. Альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что коэффициент корреляции больше, чем можно было бы ожидать при случайном осуществлении выборки. Только одна из гипотез может быть правильна и только одна из них должна быть принята на основе имеющихся эмпирических данных. При этом возможны четыре случая:

	H_0 принимается	H_0 отвергается
H_0 верна	правильиое решение	α
H_1 верна	β	правильное решение

Вероятность ошибки 1-го рода обозначается через α, ошибки 2-го рода — через β**. Большей частью при проверке статистических гипотез задаются лишь вероятностью α. Принимают решение отвергнуть гипотезу H_0 и принять гипотезу H_1, если в результате вычислений появляется такой по величине коэффициент корреляции, что мы моглн бы ожидать его только на уровне значимости $\alpha\%$. Тогда мы в 5% или 1% случаев ошибочно принимаем гипотезу о иаличии линейной связи, хотя в действительности ее нет. Выбор уровня значимости α для ошибки 1-го рода весьма произволен. Он должен устанавливаться в зависимости от важности вытекающих из принятого решения последствий. В общем случае рекомендуется 1%-ный уровень значимости и коэффициент корреляции будет тогда считаться значимым, если величина

$$t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{1.5}$$

превысит критическое значение, которое следует ожидать менее чем в 1% случаев при данном объеме выборки. Величина t при условии $\rho = 0$ распределеиа по закону Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы. Для удобства табулировано непосредственно распределение выборочного коэффициента корреляции при $\rho = 0$ для различных степеней свободы и уровней значимости (табл. А приложения). Таблица сокращает объем вычислений, так как сравнение вычисленного по наблюдениям значения r с указанным в таблице его критическим значением дает возможность иепосредственно судить о значимости или незначимости обнаруженной связи.

Если хотят проверить гипотезу о том, относятся ли оба вычисленных коэффициента корреляции к одной и той же совокупности, то используют z-преобразование Фишера. С помощью этого преобразования переходим от распределения коэффициента корреляции к нормальному распределению. Величина

$$z=1/2\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{1.6}$$

[1] Для более подробного ознакомления с математическими осиовами проверки статистических гипотез отсылаем к [67], [173], а также [316].

* Другими словами, выдвигается гипотеза об отсутствии линейной связи $H_0 : \rho = 0$. — *Примеч. пер.*

** Ошибка 1-го рода состоит в том, что нулевая гипотеза H_0 отвергается, т. е. принимается гипотеза H_1, в то время, как в действительности верна гипотеза H_0. Ошибка 2-го рода состоит в том, что принимается гипотеза H_0 в то время, как верна гипотеза H_1. Вероятность α называется уровнем значимости. — *Примеч. пер.*

имеет нормальное распределение со средним значением $\bar{z} = 1/2 \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ и дисперсией $s_z^2 = 1/(n-3)$, где ρ — коэффициент корреляции генеральной совокупности. Это преобразование позволяет также построить доверительный интервал для коэффициента корреляции.

Чтобы ответить на вопрос, различаются ли два коэффициента корреляции r_1 и r_2, полученных по выборкам объема n_1 и n_2, только за счет выборочных флуктуаций, по формуле (1.6) вычисляют значения z_1 и z_2. Для этого можно воспользо-

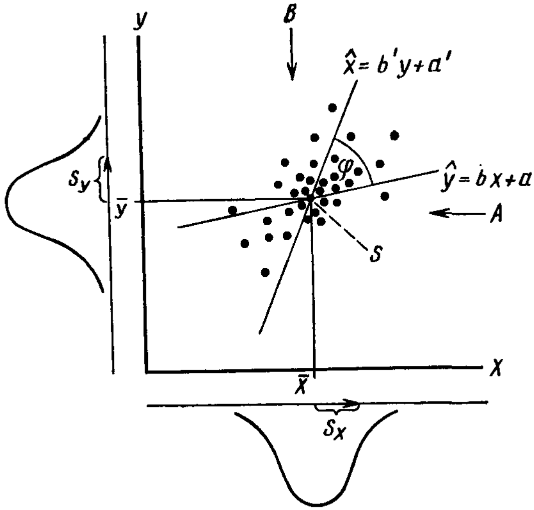


Рис. 1.6. Геометрическая интерпретация коэффициента корреляции

ваться таблицей натуральных логарифмов или же непосредственно найти z и z_2 из таблицы z-значений по коэффициентам корреляции (табл. С приложения)

Затем вычисляют величину

$$u = \frac{z_1 - z_2}{s_{z_1 - z_2}}, \text{ где } s_{z_1 - z_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}. \qquad (1.7)$$

Величина u также нормально распределена со средним значением 0 и дисперсией 1. Из таблицы нормального распределения можно по вычисленному значению u определить соответствующий уровень значимости. Если u больше 2,58, то разность между двумя коэффициентами корреляции считаем значимой при вероятности допустить ошибку $p \leqslant 0{,}01$.

Обратимся еще раз к геометрической интерпретации коэффициента корреляции. На рис. 1.6 в системе координат $x0y$ изображено поле корреляции. Если точки на этом поле рассматривать в направлении стрелки A и спроецировать их на ось y, то получим распределение частот, изображенное левее оси y. Это распределение имеет среднее значение $\bar{y}$ и стандартное отклонение s_y. Точки на координатной плоскости можно рассматривать сверху, а именно в направлении стрелки B. Тогда на оси x получим распределение частот со средним значением $\bar{x}$ и стандартным отклонением s_x. Центр тяжести всего поля корреляции обозначим буквой S. Он представляет собой точку с координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Обе регрессионные прямые проходят через эту точку. Они образуют угол, который на рис. 1.6 обозначен буквой φ. Если $r_{xy} = 1$, то угол $\varphi = 0$. Если $r_{xy} = 0$, то угол $\varphi = 90°$. Следовательно, по углу φ можно судить о тесноте взаимосвязи.

Вычисление коэффициента корреляции удобно производить по схеме, приведенной в табл. 1.2. При этом сначала вычисляют среднее значение, сумму квадратов отклонений и стандартное отклонение для каждой переменной, а затем сумму произведений отклонений обеих переменных от своих средних.

После этого вычисляются коэффициенты регрессии и корреляции. В качестве примера в табл. 1.2 использованы данные о систолическом и диастолическом кровяном давлении десяти лиц, находящихся под медицинским наблюдением. В первом блоке таблицы приведены исходные данные, во втором блоке производятся вычисления отдельно для каждой переменной, а в третьем блоке — вычисления, общие для обеих переменных. С помощью клавишной вычислительной машины весьма просто получить сумму отдельных значений переменных, а также сумму квадратов этих значений. Полученные значения заносятся в строки (1) и (3) вычис-

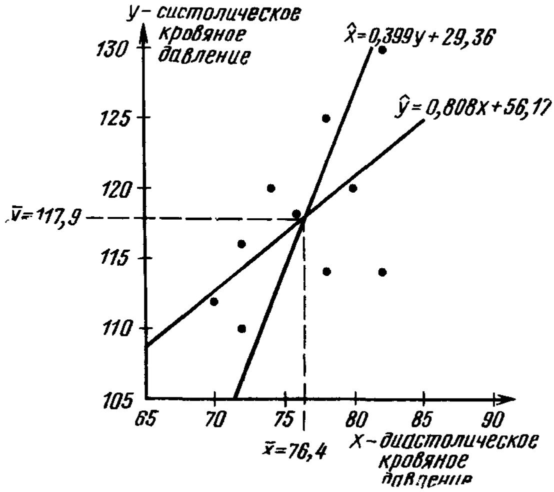


Рис. 1.7. Прямые регрессии y по x и x по y, вычисленные в табл. 1.2

лительной схемы, причем в левой части этой схемы производятся вычисления для x, а в правой части — для y. В каждой строке выполняется соответствующая операция по определенной формуле. В строке (4) квадрат суммы отдельных значений делится на n. Следует обратить внимание на отличие квадрата суммы отдельных значений от суммы квадратов этих значений в строке (3). Сумма квадратов отклонений легко получается как разница результатов строк (4) и (3). Затем по известным формулам вычисляются дисперсия и стандартное отклонение исходя из полученных значений S_{xx} и S_{yy}. Прежде чем перейти к вычислению коэффициента регрессии в строке (8), необходимо произвести действия, указанные в строках (11), (12) и (13), в результате чего получаем сумму произведений отклонений S_{xy}. По найденным значениям S_{xx}, S_{yy} и S_{xy} определяем теперь коэффициенты уравнения регрессии, а также коэффициент корреляции указанным в схеме способом. На рис. 1.7 изображены результаты вычислений в виде регрессионных прямых. Для простоты в этом примере использовано только десять точек наблюдений, чтобы читателю легко было производить вычисления. Вычисленный коэффициент корреляции, равный 0,568, при восьми степенях свободы статистически незначим, как это видно из табл. А приложения. Но при 20 наблюдениях, т. е. при числе степеней свободы, равном 18, коэффициент корреляции уже значим. Малое число наблюдений не позволяет доказать значимость коэффициента.

При оценке коэффициента корреляции кроме уровня значимости следует учитывать ряд других соображений, которые вытекают из определения коэффициента корреляции и иногда приводят к ошибочной интерпретации. Коэффициент

Таблица 1.2

Схема вычислений коэффициента корреляции и уравнений регрессии

Номер индивидуума	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x — диастолическое кровяное давление	82	72	80	72	70	82	74	78	76	78
y — систолическое кровяное давление	114	116	120	110	112	130	120	125	118	114
(1) Σx (2) $\bar{x}=\Sigma x/n$ (3) Σx^2 (4) $(\Sigma x)^2/n$ (5) $S_{xx}=(3)-(4)$ (6) $s_x^2=S_{xx}/(n-1)$ (7) $s_x=\sqrt{(6)}$	764 76,4 58536 58369,6 166,4 18,49 4,30				Σy $\bar{y}=\Sigma y/n$ Σy^2 $(\Sigma y)^2/n$ $S_{yy}=(3)-(4)$ $s_y^2=S_{yy}/(n-1)$ $s_y=\sqrt{(6)}$			1179 117,9 139341 139004,1 336,9 39,43 6,28		
(8) $b=S_{xy}/S_{xx}=(13)/(5)$ (9) $a=\bar{y}-b\cdot\bar{x}$ (10) $\hat{y}=bx+a$	0,808 56,17 $\hat{y}=0,808\,x+56,17$				$b'=S_{xy}/S_{yy}=(13)/(5)$ $a'=\bar{x}-b'\cdot\bar{y}$ $\hat{x}=b'y+a'$			0,399 29,360 $\hat{x}=0,399\,y+29,36$		
(11) Σxy (12) $\frac{\Sigma x\cdot\Sigma y}{n}$ (13) $S_{xy}=(11)-(12)$ (14) $r_{xy}=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$					90210 90075,6 134,4 0,568					

корреляции является параметром двумерного нормального распределения. Но если случайные величины имеют другое совместное распределение, отличное от нормального, то коэффициент корреляции не входит непосредственно в выражение этого закона распределения и поэтому не имеет четкого истолкования. Но даже в этом случае его используют как общепринятый статистический показатель, наподобие стандартного отклонения, которое является параметром одномерного нормального распределения. Для альтернативных и качественных признаков такие показатели, как ковариация и коэффициент корреляции, должны применяться с большой осторожностью. Имеются другие показатели взаимосвязи между переменными, более подходящие в этом случае, которые тоже можно оценивать на значимость. Как это отражается на факторном анализе, если элементами исходной матрицы являются другие показатели взаимосвязи или неправильно вычисленные коэффициенты корреляции, — предмет особого разговора.

Перед вычислением коэффициента корреляции следует проверить гипотезу о нормальности обоих распределений и линейности связи между ними. В общем достаточно внимательно всмотреться в поле корреляции. В крайнем случае линейность регрессии можно проверить по схеме, предложенной Б. Уолкером, которую можно найти также в [176; *3*]. Проверку гипотезы о нормальности распределения производят с помощью критерия χ^2. Описание этого критерия имеется почти во всех учебниках по статистике, например в учебнике Линдера [190; *2*]. В заключение следует указать на то, что при интерпретации коэффициента корреляции нужно быть как можно осторожнее. Можно привести многочисленные примеры, где высокий коэффициент корреляции появляется при отсутствии причинной связи между явлениями только за счет неоднородности материала, на что особенно обращал внимание еще Коллер [176; *1*, *2*, *4*]. При проведении исследования Коллер [176; *2*] предлагал исключать все возможности, приводящие к ложной корреляции. Факторный анализ является методом, который продвинулся значительно дальше в интерпретации коэффициента корреляции. Факторный анализ исходит из матрицы, элементами которой являются коэффициенты корреляции.

1.4. МАТРИЦЫ, ВЕКТОРЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В этой главе представлены важнейшие сведения и понятия матричной алгебры, которые необходимы для единой трактовки основных положений факторного анализа. Обоснование и развитие методов факторного анализа связано с приведенными далее определениями, утверждениями и правилами вычисления. Факторный анализ практически невозможно провести без применения матричного исчисления. На это иногда не обращают внимания, особенно если пользуются соответствующими программами для электронных вычислительных машин. Работа по расчетной части упрощается. Однако из-за недостаточных предварительных знаний оценка результатов проведенных расчетов затруднительна.

В рамках этой книги невозможно провести доказательства используемых далее утверждений. Поэтому в случае необходимости делаются ссылки на соответствующие учебники по математике. В данной главе рассматривается только тот алгебраический материал, которым позднее придется оперировать. По замыслу она должна служить лишь введением в матричное исчисление для тех, кто не знаком с необходимыми концепциями. При этом не следует ожидать, что начинающий поймет все формулировки при первом же чтении. Но он не должен падать духом из-за этого, следует продолжать работу. В последующих примерах материал станет более понятным.

Определение матрицы. Оказалось, что рационально и целесообразно давать одно обозначение некоторому расположению определенных чисел, коэффициентов или элементов и рассматривать их как единую математическую величину, хотя она составлена из многих компонентов. Массив чисел a_{ik} заключается в большие скобки и обозначается буквой **A**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \tag{1.8}$$

Такой массив чисел называется *матрицей*. Она состоит из m строк, n столбцов и $m \times n$ элементов. Кроме численных значений величин a_{ik} играет роль место элемента внутри массива, т. е. номер строки i и номер столбца k. Двойной индекс называют также адресом элемента. Обычно сначала указывается номер строки, а затем—номер столбца. Матрицу **A** можно назвать *упорядоченным массивом чисел*. Существует и другое определение: *таблица из $m \times n$ чисел с m строками и n столбцами называется $m \times n$ матрицей*. Пара $m \times n$ (читается: m на n) называется *порядком матрицы*; говорят также: «матрица типа (m, n)». Вместо термина «*порядок матрицы*» часто употребляют термин «*размер матрицы*», заимствованный из литературы на английском языке. При $m = n$ матрицу называют *квадратной* или *порядка $n \times n$*. Все корреляционные матрицы квадратны. Для того чтобы показать размер, или порядок, матрицы, используют следующее обозначение: $\mathbf{A}_{mn}$. Если не хотят так подробно воспроизводить матрицу, как это показано в (1.8), то ее записывают через общий элемент:

$$\mathbf{A} = (a_{ik})\ i = 1, 2, \dots, m;$$
$$k = 1, 2, \dots, n. \tag{1.9}$$

Далее матрицы всегда будут обозначаться прямыми прописными латинскими буквами шрифтом жирного начертания, а отдельные их элементы — теми же латинскими буквами, но строчными с соответствующими индексами. Например, матрица **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

состоит из элементов: $b_{11} = 2$; $b_{21} = 3$; $b_{31} = 4$; $b_{12} = 1$; $b_{22} = 5$; $b_{32} = 6$.

Определение векторов. Частным случаем матрицы является матрица только с одной строкой или одним столбцом. Такую матрицу порядка $n \times 1$ или $1 \times n$ называют *n-мерным вектором*. Итак, вектором называется *расположение элементов в одной строке или в одном столбце*. Матрица размером $n \times 1$, т. е. состоящая только из одного столбца, называется *вектор-столбцом*; матрица размером $1 \times n$ называется *вектор-строкой*.

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}^i = (b_1\, b_2 \ldots b_n). \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{a}_k$ является примером записи вектор-столбца, $\mathbf{b}^i$ — вектор-строки. И далее векторы будут обозначаться строчными латинскими буквами, набранными жирным шрифтом. Для обозначения вектор-столбца будем пользоваться нижним индексом, например $\mathbf{a}_k$, а для вектор-строки — верхним индексом, например $\mathbf{b}^i$. Часто индексы не проставляются вообще, если ясно, о чем идет речь — о вектор-строке или о вектор-столбце. Матрицу можно представить как систему вектор-строк или вектор-столбцов. Например, вышеприведенная матрица **B** состоит из трех вектор-строк (2 1), (3 5) и (4 6) или из двух вектор-столбцов

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонированные векторы и матрицы. Каждой вектор-строке $1 \times n$ можно мысленно противопоставить вектор-столбец $n \times 1$, состоящий из тех же самых элементов и записанных в том же самом порядке, с той лишь разницей, что в вектор-строке они расположены горизонтально, а в вектор-столбце — вертикально. Благодаря транспонированию вектор-столбец становится вектор-строкой, и наоборот. Транспонирование обозначается штрихом справа у буквы, обозначающей вектор. Так, например, если

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ то } \mathbf{a}' = (a_1\, a_2 \ldots a_n), \tag{1.11}$$

$$\text{если } \mathbf{b} = (b_1\, b_2 \ldots b_n), \text{ то } \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Эту операцию легко распространить на матрицы. Матрице **A** соответствует матрица **A**′, чьи вектор-столбцы являются соответствующими транспонированными вектор-строками матрицы **A**, или, иначе, чьи вектор-строки являются соответствующими транспонированными вектор-столбцами. Определение транспонированной матрицы **A**′ можно также произвести с помощью адресов элементов. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ik})$ переходит в транспонированную матрицу $\mathbf{A}' = (a_{ki})$ путем перестановки индексов элементов.

$$\text{Если } \mathbf{A} = (a_{ik}), \text{ то } \mathbf{A}' = (a_{ki}). \tag{1.13}$$

Для наглядности приведем пример.

$$\text{Если } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \text{ то } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ состоят из тех же элементов, но адреса элементов имеют обратный порядок. Элементы с одинаковыми номерами строк и столбцов при транспонировании не меняют индексы. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок $m \times n$, то транспонированная относительно ее матрица $\mathbf{A}'$ имеет порядок $n \times m$. Совершенно ясно, что двойное транспонирование приводит к исходной матрице:

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}.$$

Равенство матриц. Матрицы $\mathbf{A} = (a_{ik})$ и $\mathbf{B} = (b_{ik})$ называются равными друг другу тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $\mathbf{A}$ равны соответствующим элементам матрицы $\mathbf{B}$, т. е.

$$\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{B}_{mn} \text{ тогда и только тогда, когда } a_{ik} = b_{ik} \text{ при всех } i \text{ и } k. \tag{1.14}$$

Из равенства всех соответствующих элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ естественно вытекает равенство числа строк и столбцов обеих матриц.

Сложение и вычитание матриц. Для двух матриц $\mathbf{A}_{mn} = (a_{ik})$ и $\mathbf{B}_{mn} = (b_{ik})$ одинакового порядка имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{A}_{mn} \pm \mathbf{B}_{mn} = (a_{ik} \pm b_{ik}) = (c_{ik}) = \mathbf{C}_{mn}. \tag{1.15}$$

$$\text{Например, если } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц коммутативно, так как $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik}) = (b_{ik} + a_{ik}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Оно также ассоциативно, т. е. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Нулевая, диагональная и единичная матрицы, след, симметрия. Для каждой матрицы $\mathbf{A} = (a_{ik})$ порядка mn имеется противоположная ей матрица $-\mathbf{A} = (-a_{ik})$ того же порядка, так, что выполняется равенство

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{1.16}$$

Матрица $\mathbf{0}$ порядка mn, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Очевидно, что $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Элементы квадратной матрицы, которые находятся на линии, связывающей левый верхний угол с правым нижним углом матрицы, называются элементами *главной диагонали*. Сумма элементов главной диагонали называется *следом* матрицы. Если все элементы квадратной матрицы, за исключением элементов, лежащих на главной диагонали, равны нулю, то такая матрица называется *диагональной*. Она обозначается буквой $\mathbf{D}$. Например,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & \oslash & \\ & & \ddots & \\ & \oslash & & \\ & & & d_k \end{pmatrix},$$

представляет собой диагональную матрицу.

Чтобы не выписывать в матрице все нули, часто используют упрощенный способ записи, указанный в скобках справа.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной матрицей*. Она обозначается символом $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Единичная матрица обладает следующим свойством. При умножении матрицы на единичную того же порядка получается та же самая матрица. Это соответствует умножению обычных чисел на единицу. Квадратная матрица, для которой имеет место равенство $(a_{ik}) = (a_{ki})$ при всех i и k, называется *симметрической*. Тогда элементы верхнего правого угла матрицы являются отражением элементов нижнего левого угла и точно им соответствуют. Все корреляционные матрицы симметрические. Например, корреляционная матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}73 & 0{,}25 \\ 0{,}73 & 1{,}0 & -0{,}10 \\ 0{,}25 & -0{,}10 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

является симметрической.

Умножение матрицы на скалярную величину. Обычное число k рассматривается как скалярная величина относительно матрицы, которая составлена из нескольких чисел, расположенных в определенном порядке. В некоторых случаях скалярную величину удобно представлять матрицей, состоящей только из одного элемента. Вполне очевидно, что $\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + 2\mathbf{A} = 3\mathbf{A}$ и т. д. И в общем случае

$$k \cdot \mathbf{A} = (k \cdot a_{ik}) = \mathbf{A} \cdot k, \tag{1.18}$$

т. е. умножая матрицу на скалярную величину, мы тем самым умножаем каждый ее элемент на эту скалярную величину.

Из этого правила следует, что при наличии общего множителя для всех элементов его можно вынести за знак матрицы как скалярную величину. Например,

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Внутреннее (скалярное) произведение двух векторов. В результате перемножения n-мерной вектор-строки $\mathbf{a}$ с n-мерным вектор-столбцом $\mathbf{b}$ получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = c, \tag{1.19}$$

или в более подробной записи

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = c,$$

где c является скалярной величиной. Полученное выражение называется скалярным, или внутренним, произведением. Внутренним произведением двух n-мерных векторов является сумма произведений соответствующих друг другу элементов обоих векторов. Предпосылкой образования внутреннего произведения является наличие одинаковой размерности обоих векторов, в противном случае $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ не может быть получена. Например, внутреннее произведение векторов

$$(2\ \ 3\ \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 32.$$

Если скалярное произведение образовать путем умножения вектора $\mathbf{b}$ самого на себя и из полученного выражения извлечь квадратный корень со знаком плюс, то получим *норму* вектора, которая также называется его *длиной*, или *модулем*:

$$|\mathbf{b}| = +\sqrt{\Sigma b_i^2}.$$

Вектор с единичной нормой называется *единичным вектором*. Любой вектор можно *нормировать* путем деления на его модуль, т. е. привести его к единице.

Умножение матриц. Понятие внутреннего произведения двух векторов можно использовать для определения операции умножения двух матриц. Если **A** является матрицей порядка $m \times n$, а **B** — матрицей порядка $n \times s$, то между каждой вектор-строкой матрицы **A** и каждым вектор-столбцом матрицы **B** может быть образовано скалярное произведение. С помощью первой вектор-строки $\mathbf{a}^1$ матрицы **A** можно образовать s скалярных произведений с каждым из s вектор-столбцов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$ матрицы **B**, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 &= c_{11}, \\ \mathbf{a}^1\mathbf{b}_2 &= c_{12}, \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^1\mathbf{b}_s &= c_{1s}. \end{aligned}$$

Эти s скалярных произведений $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1s}$ образуют вектор-строку $\mathbf{c}^1$, как это показано на следующей схеме:

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{B}}{\left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}\downarrow & b_{n2}\downarrow & \ldots\downarrow & b_{ns} \end{array}\right)} = \underset{\mathbf{C}}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}.$$

Таким же образом можно образовать s скалярных произведений, умножая вторую вектор-строку матрицы **A** на каждый из s вектор-столбцов матрицы **B** и получить в результате вектор-строку $\mathbf{c}^2$. Подобную операцию можно произвести со всеми вектор-строками матрицы **A**.

Все возможные скалярные произведения c_{jk} вектор-строк $\mathbf{a}^j$ и вектор-столбцов $\mathbf{b}_k$ дают новую матрицу $\mathbf{C} = (c_{jk})$, элемент которой c_{jk} является скалярным произведением j-й вектор-строки матрицы **A** с k-м вектор-столбцом матрицы **B**. Матрица **C** имеет размер $m \times s$.

$$\mathbf{A}_{mn} \cdot \mathbf{B}_{ns} = \mathbf{C}_{ms} = (c_{jk}) = (\mathbf{a}^j\, \mathbf{b}_k), \tag{1.20}$$

где $\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{b}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, b_{ik}$ для всех j и k.

Схематично процесс умножения матриц **A** и **B** можно изобразить так:

$$\overset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \overset{\mathbf{B}}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}} =$$

$$= \overset{\mathbf{C}}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & c_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{j1} & c_{j2} & \dots & \boxed{c_{jk}} & \dots & c_{js} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix}},$$

где, как указано выше, $c_{jk} = \mathbf{a}^j\mathbf{b}_k$ для всех j и k. Образование этого элемента показано стрелками. Результат c_{jk} в известной степени можно трактовать как точку пересечения обоих векторов $\mathbf{a}^j$ и $\mathbf{b}_k$.

Под произведением матрицы **A** *порядка* $m \times n$ *и матрицы* **B** *порядка* $n \times s$ *(причем сомножители записаны в последовательности* **A** $\cdot$ **B**) *понимают матрицу* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *порядка* $m \times s$, *чьи элементы* c_{jk} *являются скалярным произведением j-й строки матрицы* **A** *и k-го столбца матрицы* **B**. Для умножения матриц необходимо выполнение следующего условия: число столбцов матрицы **A** должно быть равно числу строк матрицы **B**. Только при этом условии могут быть образованы скалярные произведения. В этом случае матрицы **A** и **B** называются согласованными для умножения, выполняемого в последовательности **AB**. Матрица **A** может иметь любое количество строк, а матрица **B** — любое количество столбцов, но они определяют соответственно число строк и число столбцов матрицы **C**. Умножение некоммутативно, т. е. в общем случае $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ не равно $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, даже если обе матрицы согласованы для умножения в обоих направлениях. Следовательно, порядок перемножения матриц изменять нельзя.

Поясним процесс умножения матриц на общем и числовом примере:

если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}=\begin{pmatrix}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})\\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})\end{pmatrix}$;

если $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},$$

то $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}=\begin{pmatrix}52 & 66\\ 26 & 34\end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть порядок сомножителей при умножении матриц, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ называют произведением **А** на **В** или «**В** умножено на **А** справа». Оба выражения означают, что получено произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{C}$. Умножение на единичную матрицу не изменяет исходную матрицу, о чем можно легко догадаться. Причем порядок записи сомножителей не играет роли: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$. Так как векторы являются частными случаями матриц, то можно правило умножения матриц беспрепятственно перенести на операцию перемножения векторов с матрицами. Например, очевидно:

если $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},$$

то $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=\begin{pmatrix}47\\ 25\end{pmatrix};$$

если $\mathbf{b}=(3\ \ 4)$, то $\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}=(18\ \ 19\ \ 37)$.

Произведение вектор-столбца **a** и вектор-строки **b**, записанное в последовательности **ab**, должно давать по указанному правилу вычисления матрицу. Если **a** и **b** являются вышеприведенными векторами, то получим

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}\cdot(3\ \ 4)=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}.$$

Полученный результат называется также *внешним*, или *диадным*, *произведением* двух векторов, в противоположность внутреннему произведению, которое является скалярной величиной.

На практике при умножении матриц удобно пользоваться схемой, предложенной Фальком (рис. 1.8). Для проверки сумм элементов строк добавляется справа столбец сумм. При указанном на схеме расположении матриц элемент c_{jk} находится на пересечении j-й строки матрицы **А** с k-м столбцом матрицы **В**. Эту схему можно легко распространить на вычисление произведения более чем двух матриц.

В качестве примера вычислим произведение матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, причем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление выполнено в табл. 1.3, куда перенесена схема рис. 1.8. Например, первый элемент матрицы $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ получается следующим образом: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6$. Для проверки вычислений справа

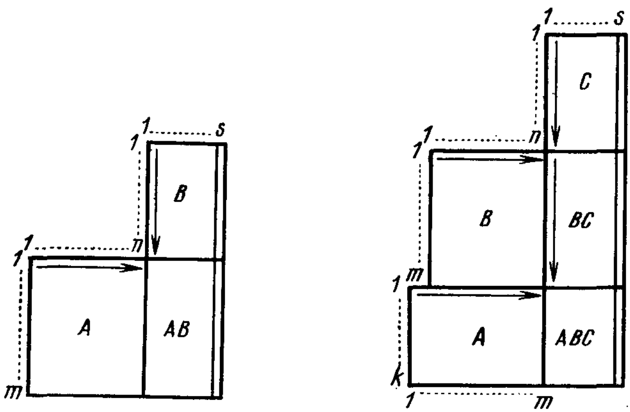


Рис. 1.8. Схема умножения матриц. Для проверкн сумм элементов строк справа предусмотрен столбец. Как указано стрелками, элементы матрицы, полученной в результате перемножения, являются скалярными произведениями соответствующих вектор-строк и вектор-столбцов

помещен столбец из сумм элементов строк. Так, сумма второй строки матрицы $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ равна 19. Скалярное произведение второй вектор-строки матрицы $\mathbf{B}$ и столбца сумм матрицы $\mathbf{C}$ также равно 19, а именно $(2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 19)$. Следовательно, элементы второй строки матрицы $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ вычислены верно. В конце концов получаем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 52 & 47 \\ 47 & 40 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица. Если матрица $\mathbf{A}$ квадратная и ее элементы являются действительными числами, то при определенных условиях существует такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, что

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \tag{1.21}$$

Матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ называют обратной к матрице $\mathbf{A}$. Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ должна быть такой, чтобы в результате умножения ее на матрицу $\mathbf{A}$ получилась единичная матрица $\mathbf{I}$. Например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \quad \cdot \quad \mathbf{A}^{-1} \quad = \quad \mathbf{I}.$$

Чтобы подчеркнуть принадлежность элементов к обратной матрице, индексы ее элементов пишут наверху.

Так, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix}.$$

Существуют следующие правила:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \tag{1.22}$$

$$(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})', \tag{1.23}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \tag{1.24}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.25}$$

Не для всех квадратных матриц существует обратная матрица. Если $\mathbf{A}^{-1}$ существует, то матрица $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, или *неособенной*. В противном случае $\mathbf{A}$ — *особенная* (*вырожденная*) матрица. Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ является отличие от нуля определителя матрицы $\mathbf{A}$ (понятие определителя дано дальше).

Таблица 1.3

Вычислительная схема к процедуре умножения матриц

C=		1	3	4
		2	1	3
		3	1	4
B=	1 1 1	6	5	11
	2 1 2	10	9	19
	1 2 1	8	6	14
	2 2 1	9	9	18
A=	1 2 1 2	52	47	99
	2 1 2 1	47	40	87

Имеется несколько способов вычисления обратной матрицы (см., например, работы Фуллера [102] или Цурмюля [329]). Если $\mathbf{D}$ — диагональная матрица, то обратная ей матрица есть $\mathbf{D}^{-1} = (1/d_i)$, т. е. в этом случае процесс определения обратной матрицы сводится к вычислению обратных величин элементов главной диагонали. Во всех остальных случаях процесс вычисления обратной матрицы очень трудоемкий, особенно если порядок матрицы больше 5 или 6. Далее на с. 52 приведена схема вычисления обратной симметрической матрицы с помощью клавишной вычислительной машины. Обычно вычисление обратной матрицы производится на ЭВМ по уже готовой программе. Иногда при этой операции для матриц размерностью более 50 хотят получить значительную точность. Рекомендуется поэтому в каждом случае вычислить произведение $\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R}$. По отклонению этого произведения от $\mathbf{I}$ можно судить о точности вычисления обратной матрицы.

Определители. Каждой квадратной матрице $\mathbf{A}$ можно поставить в соответствие некоторое числовое значение, вычисленное по определенному правилу по элементам этой матрицы. Это числовое значение называется определителем, или детерминантом. Если матрица обозначается буквой $\mathbf{A}$, то ее определитель—символом $|\mathbf{A}|$ или $\det \mathbf{A}$. Лица, не имеющие специального математического образования, вначале испытывают затруднение перед такими понятиями, как обратная матрица и определитель. Но эти трудности необходимо преодолеть, так как оба понятия весьма плодотворно используются во многих прикладных задачах.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2.$$

Если умножим первое уравнение на a_{22}, а второе—на a_{12} и сложим правые и левые части, то неизвестное y исключается. В результате получим

$$x\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Если умножим первое уравнение на $-a_{21}$, а второе — на a_{11} и сложим правые и левые части равенств, то исключится неизвестное x. В результате получим

$$y\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Перенося в полученных равенствах величину $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ в правую часть, получим значения для x и y, которые являются решениями системы, если $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$. Выражение $(a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}) = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|$ называется определителем 2-го порядка. Аналогично можно вывести выражение определителя 3-го порядка из системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. В общем случае определителем квадратной матрицы порядка n называется выражение

$$|\mathbf{A}| = \Sigma\ (-1)^k a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \ldots a_{n\nu}. \tag{1.26}$$

Определитель представляет собой сумму ряда произведений элементов матрицы, причем число сомножителей в каждом произведении равно порядку матрицы n.

Последовательность α, β, ..., ν (1.26) является перестановкой чисел 1, 2, ..., n. Каждое произведение содержит только по одному элементу из каждого столбца и каждой строки матрицы и встречается не более одного раза. Так как число перестановок равно $n!$, то имеем только $n!$ произведений. Знак слагаемых определяется величиной k.

Он положителен, если k — четное число, и отрицателен, если k — нечетное число. k является числом инверсий соответствующей перестановки. Под инверсией понимается явление, состоящее в нарушении натурального расположения чисел в перестановке. (Например, числа 1 2 3 4 имеют естественный порядок следования, а перестановка из этих же чисел 2 4 3 1 имеет четыре инверсии, а именно: 2 и 1, 4 и 3, 4 и 1, а также 3 и 1. Здесь $k=4$, соответствующее слагаемое войдет в определитель со знаком плюс.)

Используем это правило для вычисления определителя матрицы 2-го порядка:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вторые цифры в индексах элементов матрицы напечатаны наклонным шрифтом и соответствуют значениям α и β.

Возможными перестановками α и β в данном случае являются соединения 1 2 и 2 1. Итак, имеем два слагаемых, первое из которых берется со знаком плюс, а второе — со знаком минус:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^k\, a_{1\alpha}a_{2\beta} + (-1)^k\, a_{1\alpha}a_{2\beta},$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)^0\, a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21},$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 2\cdot 4-1\cdot 3=5.$$

Результат согласуется с вышеприведенным выражением определителя 2-го порядка.

Рассмотрим квадратную матрицу 3-го порядка:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вторые цифры в индексах, которые соответствуют α, β и γ, так же как и в предыдущем примере, напечатаны наклонным шрифтом. В определитель такой матрицы входят $3!=6$ возможных произведений, а именно:

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32}\ a_{12},\ a_{21}a_{33},$$

$$a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32} \text{ и } a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Перестановки 1 2 3, 2 3 1 и 3 1 2 являются четными, поэтому соответствующие произведения берутся со знаком плюс. Перестановки 1 3 2, 2 1 3 и 3 2 1 — нечетные, и соответствующие произведения войдут в определитель со знаком минус*.

---

* Перестановка называется четной, если она содержит четное число инверсий, и называется нечетной в противоположном случае. — *Примеч. пер.*

Итак, определитель $|\mathbf{A}|$ равен:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + $$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = $$
$$= 2\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 3 -$$
$$- 1\cdot 2\cdot 3 = 15.$$

Аналогично можно получить выражение определителя квадратной матрицы более высокого порядка, но вычисления при этом становятся более громоздкими. Определитель симметрических матриц, к которым относится и корреляционная матрица, можно вычислить более простым способом, который описан далее.

Линейная зависимость и ранг матрицы. Система векторов одного и того же порядка называется *линейно-зависимой*, если из этих векторов путем соответствующей линейной комбинации можно получить нулевой вектор. (При этом не допускается, чтобы все коэффициенты линейной комбинации были равны нулю, так как это было бы тривиально.) В противном случае векторы называются линейно-независимыми. Например, следующие три вектора:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, так как $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, что легко проверить. В случае линейной зависимости любой вектор можно всегда выразить через линейную комбинацию остальных векторов. В нашем примере: $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ или $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$, или $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$. Это легко проверить соответствующими расчетами. Отсюда вытекает следующее определение: вектор линейно независим от других векторов, если его нельзя представить в виде линейной комбинации из этих векторов.

Рассмотрим систему векторов, не уточняя, является ли она линейно-зависимой или линейно-независимой. У каждой системы, состоящей из m вектор-столбцов $\mathbf{a}_k$, можно выявить максимально возможное число линейно-независимых векторов. Это число, обозначаемое буквой r, и является *рангом* данной системы векторов. Так как каждую матрицу можно рассматривать как систему вектор-столбцов, ранг матрицы определяется как максимальное число содержащихся в ней линейно-независимых вектор-столбцов. Для определения ранга матрицы пользуются и вектор-строками. Оба способа дают одинаковый результат для одной и той же матрицы, причем r не может превосходить наименьшее из m или n. Ранг r квадратной матрицы порядка m колеблется от 0 до m, $0 \leqslant r \leqslant m$. Если все векторы являются нулевыми, то ранг такой матрицы равен нулю. Если все векторы линейно независимы друг от друга, то ранг матрицы равен m. Если образовать матрицу из приведенных выше векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, то ранг этой матрицы равен 2. Так как каждые два вектора могут быть сведены к третьему путем линейной комбинации, то ранг меньше 3. Но можно убедиться, что любые два вектора из них являются линейно-независимыми, следовательно, ранг $r = 2$.

Квадратную матрицу называют *вырожденной*, если ее вектор-столбцы или вектор-строки линейно зависимы. Определитель такой матрицы равен нулю и обратной ей матрицы не существует, как уже было отмечено выше. Эти выводы эквивалентны друг другу. Вследствие этого квадратную матрицу называют *невырожденной*, или *неособенной*, если ее вектор-столбцы или вектор-строки независимы друг от друга. Определитель такой матрицы не равен нулю и обратная ей матрица существует (сравни со с. 43).

Ранг матрицы имеет вполне очевидную геометрическую интерпретацию. Если ранг матрицы равен m, то говорят, что m-мерное пространство натянуто на m векторов. Если ранг $r < m$, то m векторов лежат в r-мерном подпространстве, которое всех их включает в себя. Итак, ранг матрицы соответствует минимально необходимой размерности пространства, «в котором содержатся все векторы». r-мерное подпространство в m-мерном пространстве называют r-мерной гиперплоскостью. Ранг матрицы соответствует наименьшей размерности гиперплоскости, в которой еще лежат все векторы.

Ортогональность. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *взаимно-ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Если для матрицы порядка $m \times r$ имеет место равенство $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D}$, где $\mathbf{D}$ — диагональная матрица, то вектор-столбцы матрицы $\mathbf{A}$ попарно взаимно-ортогональны. Если эти вектор-столбцы пронормировать, т. е. привести к длине, равной 1, то имеет место равенство $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$ и говорят об *ортонормированных векторах*. Если $\mathbf{B}$ — квадратная матрица и имеет место равенство $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$, то матрицу $\mathbf{B}$ называют *ортогональной*. В этом случае из формулы (1.22) следует, что $\mathbf{B}' = \mathbf{B}^{-1}$. Ортогональная матрица всегда невырожденная. Отсюда из ортогональности матрицы следует линейная независимость ее вектор-строк или вектор-столбцов. Обратное утверждение неверно: из линейной независимости системы векторов не следует попарная ортогональность этих векторов.

Решение линейных уравнений и обращение матриц. В факторном анализе требуется находить решения m линейных уравнений с m неизвестными, например при определении коэффициентов регрессии переменных по факторам. Мы ограничимся здесь симметрическими матрицами, так как корреляционная матрица, с которой мы будем иметь дело, является симметрической. Процедура вычисления упрощается. В общем случае указывается алгоритм, связанный с методом Гаусса, как это, например, описывается Цурмюлем [329].

Задача состоит в том, что нужно найти значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, которые явились бы решением системы уравнений

$$
\begin{array}{ccccccccc}
r_{11}\beta_1 & + & r_{12}\beta_2 & + & \ldots & + & r_{1m}\beta_m & = & s_1 \\
r_{21}\beta_1 & + & r_{22}\beta_2 & + & \ldots & + & r_{2m}\beta_m & = & s_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
r_{m1}\beta_1 & + & r_{m2}\beta_2 & + & \ldots & + & r_{mm}\beta_m & = & s_m.
\end{array}
\qquad (1.27)
$$

Речь идет о системе, состоящей из m линейных уравнений с m неизвестными $\beta_1, ..., \beta_m$. Коэффициенты системы r_{ij} и свободные члены $s_1...s_m$ известны. Система уравнений (1.27) в матричной записи имеет вид:

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{s}. \tag{1.28}$$

Итак, допустим, что $\mathbf{R} = (r_{ij})$ является корреляционной матрицей, а вектор-столбец $\mathbf{s}$ содержит коэффициенты корреляции m переменных с целевой функцией. Требуется найти уравнение множественной регрессии, выражающей зависимость целевой функции от m переменных. Вектор-столбец $\boldsymbol{\beta}$ содержит эти искомые коэффициенты регрессии, если все переменные пронормированы (см. с. 246). Задача сводится к вычислению $\boldsymbol{\beta}$, если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{s}$ известны. Подобная задача встречается довольно часто. Если обе части равенства (1.28) умножить слева на $\mathbf{R}^{-1}$, то получим

$$\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{s},$$

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{s}, \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{s}.$$

Следовательно, если известна обратная матрица $\mathbf{R}^{-1}$, то, пользуясь соотношением (1.29), легко найти искомое решение в виде вектора $\boldsymbol{\beta}$. Остановимся на этом. Обращение матрицы тесно связано с решением системы линейных уравнений. Далее подробно описывается процедура получения решения для (1.28), причем заранее отказываемся от доказательств.

Описываемый способ эффективен для решения систем с симметрической матрицей коэффициентов и впервые был применен Холецким (цитируется по [329]). В литературе на английском языке этот способ известен под названием «метод квадратного корня» (*square root method*), (см., например, [117]). В верхней части табл. 1.4 дается схема вычислительных операций в общем виде, а в нижней части содержится числовой пример, причем приведенные в нем числа точно соответствуют обозначениям в верхней половине таблицы. Процедура вычислений показана для четырех переменных, но она может быть распространена на любое число переменных. Вначале вписываем в таблицу элементы матрицы $\mathbf{R}$, лежащие на главной диагонали и выше ее, и элементы вектора $\mathbf{s}$, т. е. свободные члены уравнений. Затем суммируем члены по строкам и фиксируем итоги в столбце сумм от T_1 до T_4. При этом суммирование производится по всем элементам строки, включая s_i и элементы ниже главной диагонали, которые не вписывались вследствие симметрии матрицы $\mathbf{R}$. Значения T_i можно получить, производя суммирование записанных в таблице коэффициентов матрицы i-го столбца, начиная сверху до диагонального элемента r_{ii} включительно, а затем двигаясь направо и включая s_i.

Таблица 1.4

Схема вычислений для нахождения решения системы линейных уравнений, записанных в форме $\mathbf{R}\cdot\beta=\mathbf{s}$

Решение в общем виде

Корреляционная матрица $\mathbf{R}$				Вектор $\mathbf{s}$	Сумма	Контроль
r_{11}	r_{12} r_{22}	r_{13} r_{23} r_{33}	r_{14} r_{24} r_{34} r_{44}	s_1 s_2 s_3 s_4	T_1 T_2 T_3 T_4	s'_1 s'_2 s'_3 s'_4
c_{11}	c_{12} c_{22}	c_{13} c_{23} c_{33}	c_{14} c_{24} c_{34} c_{44}	c_1 c_2 c_3 c_4	t_1 t_2 t_3 t_4	t'_1 t'_2 t'_3 t'_4
β_1	β_2	β_3	β_4	$\lvert\mathbf{R}\rvert=(c_{11}\cdot c_{22}\cdot c_{33}\cdot c_{44})^2$		
Числовой пример						
1,00	0,40 1,00	0,50 0,20 1,00	0,30 0,30 0,40 1,00	0,77 0,68 0,81 0,61	2,97 2,58 2,91 2,61	0,77 0,68 0,81 0,61
1,000	0,400 0,917	0,500 0,000 0,866	0,300 0,196 0,289 0,888	0,770 0,406 0,491 0,179	2,970 1,519 1,645 1,065	2,970 1,518 1,646 1,067
0,300	0,400	0,500	0,201	$\lvert\mathbf{R}\rvert=0,497$		

Приступаем к построению вспомогательной матрицы $\mathbf{C}=(c_{ik})$, $i\leqslant k$. $\mathbf{C}$ является наддиагональной треугольной матрицей*. Переходим к вычислению элементов этой матрицы по двум формулам:

$$c_{ii}=\sqrt{r_{ii}-c_{1i}^2-c_{2i}^2-\ldots-c_{i-1,i}^2},$$

$$c_{ik}=(r_{ik}-c_{1i}c_{1k}-c_{2i}c_{2k}-\ldots$$

$$\ldots-c_{i-1,i}\,c_{i-1,k}):c_{ii} \qquad \text{для } i<k.$$

* Квадратные матрицы, у которых все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, называются треугольными матрицами. В данном случае равны нулю элементы ниже главной диагонали матрицы **C**. Поэтому в табл. 1.4 они опущены, а матрица называется *наддиагональной треугольной матрицей*.— *Примеч. пер.*

Диагональные элементы всегда вычисляются по первой формуле. Первый элемент c_{11} определяется: $c_{11} = \sqrt{r_{11}}$. Остальные элементы первой строки получаются исходя из второй формулы:

$$c_{12} = r_{12} : c_{11};\ c_{13} = r_{13} : c_{11};\ c_{14} = r_{14} : c_{11}.$$

Аналогично вычисляются значения c_1 и t_1 по s_1 и T_1:

$$c_1 = s_1 : c_{11};\ t_1 = T_1 : c_{11}.$$

Так как в корреляционной матрице $r_{11} = 1$, то первую строку матрицы **C** можно полностью позаимствовать из матрицы **R**.

Диагональный элемент второй строки матрицы **C** получается по первой формуле: $c_{22} = \sqrt{r_{22} - c_{12}^2}$. Затем по второй формуле вычисляются другие элементы второй строки этой матрицы, а именно:

$$c_{23} = (r_{23} - c_{12}c_{13}) : c_{22},$$
$$c_{24} = (r_{24} - c_{12}c_{14}) : c_{22},$$
$$c_2 = (s_2 - c_{12}c_1) : c_{22},$$
$$t_2 = (T_2 - c_{12}t_1) : c_{22}.$$

Величина t_2 используется для контроля. Она должна быть равна сумме элементов второй строки матрицы **C**, причем в противоположность образованию сумм T_i в данном случае при суммировании принимаются во внимание только элементы, приведенные в этой строке. Так, сумма элементов второй строки равна: $t_2' = c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_2 = t_2$. Переходить к последующим вычислениям можно только тогда, когда результат t_2' совпадает с суммой t_2 с точностью до ошибок округления, иначе одна допущенная ошибка повлечет за собой последующие.

Аналогично получается третья строка:

$$c_{33} = \sqrt{r_{33} - c_{13}^2 - c_{23}^2},$$
$$c_{34} = (r_{34} - c_{13}c_{14} - c_{23}c_{24}) : c_{33},$$
$$c_3 = (s_3 - c_{13}c_1 - c_{23}c_2) : c_{33},$$
$$t_3 = (T_3 - c_{13}t_1 - c_{23}t_2) : c_{33}.$$

Контроль осуществляется путем проверки выполнения тождества $t_3' = c_{33} + c_{34} + c_3 = t_3$. Наконец, получаем последнюю строку:

$$c_{44} = \sqrt{r_{44} - c_{14}^2 - c_{24}^2 - c_{34}^2},$$
$$c_4 = (s_4 - c_{14}c_1 - c_{24}c_2 - c_{34}c_3) : c_{44},$$
$$t_4 = (T_4 - c_{14}t_1 - c_{24}t_2 - c_{34}t_3) : c_{44},$$

причем должно выполняться тождество $t_4' = c_{44} + c_4 = t_4$ с точностью до ошибок округления. Итак, построение треугольной матрицы **C** производится по строкам, причем для каждой строки проводится проверка вычислений. Диагональные элементы c_{ii} получаются в результате извлечения квадратного корня из разности r_{ii} и сумм квадратов элементов c_{ki}, полученных ранее. Элементы c_{ki}, вычитаемые из r_{ii}, расположены в столбцах матрицы над диагональными элементами, которые требуется получить. Остальные элементы строки определяют, вычитая из r_{ik} скалярное произведение двух вектор-столбцов матрицы **C**, которые соответствуют индексам i и k, и результат делят на c_{ii}. При образовании скалярного произведения не учитывают элемент, находящийся на этой новой строке. Для наддиагональной матрицы **C** имеет место равенство $\mathbf{R} = \mathbf{C}'\mathbf{C}$. Таким образом, матрицу **R** можно представить в виде произведения двух треугольных матриц, транспонированных по отношению друг к другу. Разложение на такие составляющие можно производить со всеми корреляционными матрицами, или, точнее, со всеми положительно-определенными матрицами (на этом понятии мы не будем подробно останавливаться). Не исключено, что некоторые диагональные элементы c_{ii} будут получаться мнимыми числами. Процедура вычислений от этого не изменяется, так как мнимые элементы в окончательных результатах исчезают. Определение неизвестных β_1, β_2, β_3 и β_4 производится по матрице **C** в обратной последовательности:

$$\beta_4 = c_4 : c_{44}.$$

$$\beta_3 = (c_3 - c_{34}\beta_4) : c_{33},$$

$$\beta_2 = (c_2 - c_{24}\beta_4 - c_{23}\beta_3) : c_{22},$$

$$\beta_1 = (c_1 - c_{14}\beta_4 - c_{13}\beta_3 - c_{12}\beta_2) : c_{11}.$$

Окончательный контроль проводится путем подстановки коэффициентов регрессии в четыре уравнения системы (1.27). Результаты, обозначенные через s_1', s_2', s_3' и s_4', записываются в графу контроля вычислительной схемы. Они должны с точностью до ошибок округления совпадать с исходными значениями s_1, s_2, s_3, s_4. В числовом примере кроме коэффициентов регрессии вычисляется определитель матрицы **R** по формуле $|\mathbf{R}| = |\mathbf{C}|^2 = (c_{11} \cdot c_{22} \dots c_{mm})^2$.

Обращение корреляционной матрицы можно выполнить тем же путем. Так как должно иметь место равенство $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$, то вектор-решение, который является соответствующим вектор-столбцом матрицы $\mathbf{R}^{-1}$, находится из системы уравнений, полученных в результате последовательного умножения в левой части приведенного равенства. Правые части уравнений, т. е. свободные члены, равны соответствующим элементам вектор-столбцов единичной матрицы **I***. После определения $\mathbf{R}^{-1}$ не составляет большого труда найти результирующий вектор $\boldsymbol{\beta}$. Так как в сущности при этой процедуре m раз применяется вспомогательная матрица **C**, то, используя симметрию матриц и единичную матрицу, можно добиться упрощения расчетов, если их выполнять по рекомендуемой схеме.

В табл. 1.5 приведена схема вычислений в общем виде, а затем дан числовой пример. При этом, как и в табл. 1.4, числа, приведенные

* Более подробно описание этого метода вычисления обратной корреляционной матрицы приведено в книге Г. Харман. Современный факторный анализ. М., Статистика, 1972, с. 55. — *Примеч. пер.*

в примере, точно соответствуют обозначениям в верхней половине таблицы. Используется та же самая корреляционная матрица, что и в предыдущем примере. Вначале выписываем в таблицу элементы матрицы и подсчитываем суммы элементов по строкам так же, как в табл. 1.4, однако без свободных членов. Затем вычисляем вспомогательную матрицу **C**, как было показано выше, и таким же образом производим проверку вычислений. Графа с контрольными суммами не включена в таблицу, в случае совпадения сумм можно делать соответствующие

Таблица 1.5

Схема вычисления обратной корреляционной матрицы

Решение в общем виде

Корреляционная матрица **R** Вспомогательная матрица **C** Проверка выполнения равенства $\mathbf{I}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{R}$				Сумма и контроль	Единичная матрица Вспомогательная матрица **C'** Матрица $\mathbf{R}^{-1}$			
r_{11}	r_{12} r_{22}	r_{13} r_{23} r_{33}	r_{14} r_{24} r_{34} r_{44}	T_1 T_2 T_3 T_4	1 0 0 0	1 0 0	1 0	1
c_{11}	c_{12} c_{22}	c_{13} c_{23} c_{33}	c_{14} c_{24} c_{34} c_{44}	t_1 t_2 t_3 t_4	c'_{11} c'_{21} c'_{31} c'_{41}	c'_{22} c'_{32} c'_{42}	c'_{33} c'_{43}	c'_{44}
$\mathbf{I}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}$					r^{11}	r^{12} r^{22}	r^{13} r^{23} r^{33}	r^{14} r^{24} r^{34} r^{44}
Числовой пример								
1,00	0,40 1,00	0,50 0,20 1,00	0,30 0,30 0,40 1,00	2,20 1,90 2,10 2,00	1 0 0 0	1 0 0	1 0	1
1,000	0,400 0,917	0,500 0,000 0,866	0,300 0,196 0,289 0,888	2,200 1,112 1,155 0,888	1,000 —0,436 —0,577 —0,056	0 1,091 0,000 —0,241	0 0 1,155 —0,376	0 0 0 1,126
1,000	0,001 1,000	0,002 0,001 1,001	—0,002 0,000 —0,002 0,999		1,526	—0,462 1,248	—0,645 0,091 1,475	—0,063 —0,271 —0,423 1,268

пометки в столбце сумм. До этого момента порядок выполнения действий был такой же, как в схеме табл. 1.4; отсутствует только столбец со свободными членами. Четыре вектора, которые представляют собой правую часть равенства $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$, записаны в верхней правой части таблицы. Вследствие симметрии матрицы $\mathbf{I}$ можно использовать только нижний треугольник матрицы.

Теперь приступаем к построению другой вспомогательной матрицы $\mathbf{C}^{\cdot} = (c^{\cdot}_{ik})$, которая является поддиагональной треугольной матрицей*. Для этого применяем метод квадратного корня к единичной матрице.

Первый столбец матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ получаем с помощью описанной ранее процедуры вычисления по элементам первого вектора единичной матрицы:

$$c^{\cdot}_{11} = 1, \; c^{\cdot}_{21} = (0 - c^{\cdot}_{11}c_{12}) : c_{22} \text{ и т. д. до}$$

$$c^{\cdot}_{41} = (0 - c_{14}c^{\cdot}_{11} - c_{24}c^{\cdot}_{21} - c_{34}c^{\cdot}_{31}) : c_{44}.$$

Второй столбец матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ получаем по той же самой методике, однако начиная со второго диагонального элемента единичной матрицы. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ получаем по формуле $c^{\cdot}_{ii} = 1/c_{ii}$. Внедиагональные элементы вычисляются аналогично значениям t_i в столбцах сумм, причем начинать нужно с определения диагонального элемента. Например, для последнего элемента второго столбца матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ имеем $c^{\cdot}_{42} = (0 - c_{24}c^{\cdot}_{22} - c_{34}c^{\cdot}_{32}) : c_{44}$. Для матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ имеет место равенство $\mathbf{C}^{\cdot} = (\mathbf{C}')^{-1}$. Применяя обращение к обеим частям равенства $\mathbf{R} = \mathbf{C}'\mathbf{C}$, получим

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}')^{-1} = \mathbf{C}^{\cdot\prime}\mathbf{C}^{\cdot}.$$

После этого можно вычислять $\mathbf{R}^{-1}$. Используя вспомогательную матрицу $\mathbf{C}^{\cdot}$, получим все элементы $\mathbf{R}^{-1}$ путем перемножения соответствующих столбцов. При этом опять ограничиваемся элементами ниже диагонали. Диагональные элементы r^{ii} являются суммами квадратов соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$. Например, $r^{11} = c^{\cdot 2}_{11} + c^{\cdot 2}_{21} + c^{\cdot 2}_{31} + c^{\cdot 2}_{41}$ и $r^{44} = c^{\cdot 2}_{44}$. Внедиагональные элементы получаем путем перемножения соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{C}^{\cdot}$ (способом столбец на столбец). Например, $r^{34} = c^{\cdot}_{33} \cdot 0 + c^{\cdot}_{43} \cdot c^{\cdot}_{44}$. Для контроля вычисляем произведение $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}$ (только наддиагональная часть) и результаты записываем в левом нижнем углу таблицы. Как видно, результат соответствует единичной матрице с точностью до ошибок округления.

* Это означает, что элементы выше главной диагонали матрицы равны нулю. — *Примеч. пер.*

● 2. ОБЗОР ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Имеется несколько подходов к описанию факторного анализа, все зависит от цели, которая при этом преследуется. В этой обзорной главе, с одной стороны, ставится задача дать как можно более простое и ясное введение в факторный анализ, с другой — описать метод по возможности корректнее. Но одновременно выполнить эти требования весьма трудно. Уже в предисловии сравнительно легкий материал чередовался с материалом, в восприятии которого начинающий сможет испытать затруднения. Эта полярность в способе изложения будет возникать постоянно. Мы хотим подойти к проблеме с разных сторон и на разных уровнях сложности, чтобы обеспечить ее понимание.

Стройную систему изложения факторного анализа можно найти в ряде монографий, изданных в англосаксонских странах. Классическим произведением является труд Тэрстоуна [286; *6*]; Каттелл [35; *4*] и Фрюхтер [101] написали доступные введения в факторный анализ. Продолжая работу, начатую с Хользингером [138; *1*], Харман создал первоклассное произведение [117]. Лоули и Максвелл [183] изложили факторный анализ с позиции математической статистики. Самая последняя книга по методике факторного анализа, выполненная в абстрактной форме, принадлежит Хорсту [142; *3*]. На немецком языке до недавнего времени было опубликовано в журналах и справочниках только несколько статей, носящих методологический характер (например, [131; *3*] и [189; *1*]).

Монография К. Павлика [220; *2*] наряду с методикой факторного анализа содержит и его применение в психологии. Кандидатская диссертация Вульстена [325] и докторская диссертация Шеффера [251] посвящены применению факторного анализа в экономике и социологии. Бочник [19] использовал факторный анализ в психиатрии. Обзор литературы по факторному анализу до 1940 г. составлен Вольфлом [318]. Обширная библиография за период с 1940 до 1952 г. имеется в труде Фрюхтера [101]. Более поздние публикации в большинстве своем приведены у Хармана [117] и Каттелла [35; *21*].

Далее приводится обзор факторного анализа. При этом вначале, в гл. 2.1, рассматриваем два простых примера, из которых должен стать ясным принцип метода и разделение процедуры вычисления на несколько этапов. Затем в гл. 2.2 задача факторного анализа представлена в алгебраической форме и даны важнейшие определения и основные зависимости. При этом указывается общая схема выполнения операций в факторном анализе и формулировка четырех основных проблем. Каждой этой основной проблеме далее будет посвящен целый раздел, здесь же дается только определение без детального рассмотрения способов решения. В гл. 2.3 приведена геометрическая интерпретация основных зависимостей, записанных в алгебраической форме. Такой подход позволяет сделать метод факторного анализа более наглядным. Имеется еще один подход к факторному анализу, связанный с вычислением частных коэффициентов корреляции в гл. 2.4. Наконец, в гл. 2.5 факторный анализ сравнивается с другими методами многомерного анализа, чтобы показать различие в постановке проблемы. В результате читатель расширит свои представления о факторном анализе как методе исследования.

Математическая часть второго раздела неоднородна по сложности. Факторный анализ рассматривается с различных сторон; при этом не все подходы могут быть одинаково восприняты читателем. Затем дается комплексная постановка задачи. В первую очередь формулируются основная проблема и понятия факторного анализа. Способы решения подробно обсуждаются в последующих главах. Поскольку этот раздел содержит в зародыше все остальные, то весьма желательно добиться понимания изложенного в нем материала.

2.1. ДВА ВВОДНЫХ ПРИМЕРА

Пусть имеются четыре переменные, отдельные значения которых получены в результате наблюдения за рядом индивидуумов. Вычислим все парные коэффициенты корреляции, в итоге получим следующую корреляционную матрицу:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}720 & 0{,}450 & 0{,}045 \\ 0{,}720 & 1{,}000 & 0{,}400 & 0{,}040 \\ 0{,}450 & 0{,}400 & 1{,}000 & 0{,}025 \\ 0{,}045 & 0{,}040 & 0{,}025 & 1{,}000 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Корреляционная матрица является симметрической, т. е. наддиагональные элементы представляют собой зеркальное отражение поддиагональных относительно главной диагонали. При рассмотрении матрицы бросается в глаза тот факт, что все коэффициенты корреляции положительны. Кроме того, между первой и второй переменными имеется относительно тесная корреляционная связь, третья переменная с первыми двумя связана слабее, а четвертая практически не зависит от всех предыдущих. Следуя обычной процедуре корреляционного анализа можно было бы проверить значимость каждого коэффициента корреляции.

Целью факторного анализа является извлечение на поверхность величины, так называемого *фактора*, который бы по возможности точнее позволил воспроизвести наблюдаемые корреляции с использованием соответствующей процедуры вычислений. Этот фактор и связанная с ним процедура вычислений вначале являются гипотетическими. Здесь обсуждается подход к выявлению фактора и к процедуре вычислений. Наблюдавшиеся коэффициенты корреляции можно в каждом случае воспроизвести с помощью следующего уравнения:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1' \qquad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} (0,810) & 0,720 & 0,450 & 0,045 \\ 0,720 & (0,640) & 0,400 & 0,040 \\ 0,450 & 0,400 & (0,250) & 0,025 \\ 0,045 & 0,040 & 0,025 & (0,003) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 0,80 \\ 0,50 \\ 0,05 \end{pmatrix} (0,90\ 0,80\ 0,50\ 0,05).$$

Вектор $\mathbf{a}_1' = (0,90\ 0,80\ 0,50\ 0,05)$ представляет собой фактор. Матрица $\mathbf{R}^+$ является матрицей воспроизведенных коэффициентов корреляции. Используя правило умножения матриц, выполним действие $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1'$, в результате чего получим матрицу $\mathbf{R}^+$, отличающуюся от $\mathbf{R}$ диагональными элементами. В этом состоит наша гипотеза. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{R}^+$ далее называются общностями и ставятся в скобки, чтобы их как-то выделить. Например, элементы первого столбца корреляционной матрицы получаем следующим образом: $0,90 \cdot 0,90=0,81$; $0,80 \cdot 0,90=0,720$; $0,50 \cdot 0,90=0,45$; $0,05 \cdot 0,90 = 0,045$. Так как элементы первой строки и первого столбца матрицы $\mathbf{R}^+$ соответствуют друг другу, их вычисляют только один раз. Для второго столбца и второй строки матрицы $\mathbf{R}^+$ начинают вычисление лишь со второго элемента: $0,80 \cdot 0,80=0,640$; $0,50 \cdot 0,80 = 0,400$ и $0,05 \cdot 0,80=0,040$. В силу симметричности матрицы эти элементы записываются также и во вторую строку. Естественно, получим те же самые значения элементов матрицы, если полностью перемножим векторы. Но в этом случае процесс вычисления увеличится вдвое, так как при перемене мест перемножаемых элементов результат остается тот же, а именно: $a_k \cdot a_l = a_l \cdot a_k$.

Таким образом, по приведенному правилу вычисления из чисел $(a_1 a_2 a_3 a_4) = \mathbf{a}_1 = (0,90\ 0,80\ 0,50\ 0,05)$ получаем наблюдаемую корреляционную матрицу.

В табл. 2.1 еще раз подробно воспроизводится описанная выше процедура вычисления без использования векторной символики. Вычисления, естественно, производятся только для диагональных и поддиагональных элементов матрицы по уравнениям, которые соответствуют формуле (2.2). В клетках таблицы записаны произведения элементов вектор-столбца с соответствующими элементами вектор-строки.

Таблица 2.1

Связь между коэффициентами корреляции и факторными нагрузками для первого примера

	$a_1=0,90$	$a_2=0,80$	$a_3=0,50$	$a_4=0,05$
$a_1=0,90$	$r_{11}=a_1 \cdot a_1$ $=0,9 \cdot 0,9=0,81$			
$a_2=0,80$	$r_{21}=a_2 \cdot a_1$ $=0,8 \cdot 0,9=0,72$	$r_{22}=a_2 \cdot a_2$ $=0,8 \cdot 0,8=0,64$		
$a_3=0,50$	$r_{31}=a_3 \cdot a_1$ $=0,5 \cdot 0,9=0,45$	$r_{32}=a_3 \cdot a_2$ $=0,5 \cdot 0,8=0,40$	$r_{33}=a_3 \cdot a_3$ $=0,5 \cdot 0,5=0,25$	
$a_4=0,05$	$r_{41}=a_4 \cdot a_1$ $=0,05 \cdot 0,9=0,045$	$r_{42}=a_4 \cdot a_2$ $=0,05 \cdot 0,8=0,04$	$r_{43}=a_4 \cdot a_3$ $=0,05 \cdot 0,50=$ $=0,025$	$r_{44}=a_4 \cdot a_4$ $=0,05 \cdot 0,05=$ $=0,0025$

Система равенств (2.2) формулирует гипотезу, которая состоит из правила вычисления и элементов вектора $\mathbf{a}_1$. Эта гипотеза позволяет нам воспроизвести корреляционную матрицу, и мы можем в определенном смысле привлечь ее к «объяснению» этой матрицы. Слово «объяснение» в данном случае употребляется в формальном смысле, который касается лишь воспроизводимости коэффициентов корреляции. Этим подразумевается не причинное объяснение, а только формально математическое. Как получаются численные значения элементов вектора $\mathbf{a}_1$, нас пока не интересует. Их называют *факторными нагрузками*. Численные значения элементов вектора $\mathbf{a}_1$ в (2.2) позволяют произвести численно-формальное объяснение наблюдаемых коэффициентов корреляции. Это дает основание предполагать, что за наблюдаемыми корреляциями стоит фактор, который мог бы причинно обусловливать эти корреляции. По меньшей мере это предположение можно высказать, так как наш фактор формально точно воспроизводит корреляционную матрицу, за исключением диагональных элементов.

Таким образом, мы на примере познакомились с основным уравнением факторного анализа. Наблюдаемые корреляции рассматриваются как проявление скрытой величины, фактора, исходя из которой весьма просто могут быть вычислены эти корреляции. Фактор всегда стоит за наблюдаемыми величинами, но непосредственно для измерения недоступен. Он гипотетичен, но должен иметь такую конструкцию и такую математическую величину, чтобы исходя из него можно было получить наблюдаемые корреляции. Факторный анализ устанавливает такие гипотетические факторы и из-за этого способ образования гипотез имеет всегда локальный характер. Таким образом, выявление факторов производится не обычными статистическими методами, но статистический материал используется для формирования гипотетического фактора.

Если приводить корреляционную матрицу (2.1) к форме, указанной в (2.2), то сразу возникают две проблемы. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{R}^+$ меньше единицы, как это видно из равенства (2.2). Прежде чем пытаться численно определить искомую правую часть этого равенства, должны быть установлены заключенные в скобки диагональные элементы в левой части. Эти диагональные элементы называются общностями, а их определение, или оценка, составляет первую проблему, *проблему общности*. Второй проблемой является определение фактора $\mathbf{a}_1$. Это так называемая *проблема факторов*. Обе проблемы будут показаны еще глубже, однако здесь уже подчеркивается необходимость разделить подходы к этим проблемам.

Давайте обратимся еще раз к примеру, иллюстрирующему равенство (2.2). Десять $(4+3+2+1=10)$ различных значений элементов (диагональных и поддиагональных) корреляционной матрицы приведены к четырем элементам вектора $\mathbf{a}_1$. Эти четыре значения содержат ту же самую информацию, что и вся корреляционная матрица. Таким образом достигается упрощение, причем объем информации сохраняется. Факторные нагрузки соответствуют коэффициентам корреляции, т. е. переменная 1 имеет много общего с фактором $\mathbf{a}_1$ (a_1 =

$= 0,90$), переменная 2 — немного меньше ($a_2 = 0,80$), переменная 3 — еще меньше ($a_3 = 0,50$). Переменная 4 почти не связана с фактором ($a_4 = 0,05$). Все эти выводы находятся в соответствии с наблюдаемой корреляционной матрицей. Фактор, связанный с переменными в указанных количественных соотношениях, в достаточной мере объясняет наблюдаемые корреляции. Геометрически упрощение заключается в том, что единственная мера, а именно фактор $\mathbf{a}_1$, достаточна для отражения связей между переменными. Если каждую переменную представить в виде вектора, т. е., попросту говоря, в виде стрелки в пространстве, то в этом примере все стрелки примут одно направление, а именно направление фактора $\mathbf{a}_1$, который рассматривается как координатная ось одномерной системы координат. Длина стрелок зависит от величины факторных нагрузок (см. рис. 2.1).

Обратимся теперь ко второму примеру. Допустим, что по результатам наблюдений за четырьмя переменными нами составлена следующая корреляционная матрица. При этом диагональные элементы заменяем общностями, которые предполагаются известными. Чтобы их как-то выделить, заключаем их в скобки, и корреляционная матрица с общностями на главной диагонали обозначается $\mathbf{R}_h$:

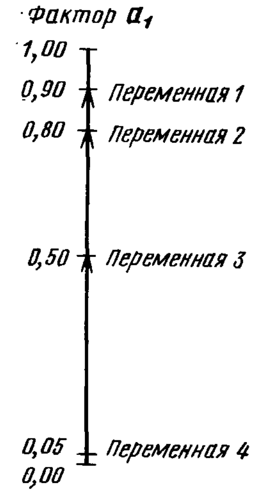


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация фактора $\mathbf{a}_1$. Все векторы-переменные лежат в одном направлении вдоль фактора $\mathbf{a}_1$. Длины векторов соответствуют величинам факторных нагрузок q_1—a_4

$$\mathbf{R}_h = \begin{pmatrix} (0,8125) & 0,7225 & 0,0850 & 0,0800 \\ 0,7225 & (0,6425) & 0,0800 & 0,0750 \\ 0,0850 & 0,0800 & (0,6425) & 0,5625 \\ 0,0800 & 0,0750 & 0,5625 & (0,4925) \end{pmatrix}.$$

При просмотре корреляционной матрицы бросается в глаза, что первая и вторая переменные сильно коррелируют друг с другом. Можно говорить также о наличии корреляции между третьей и четвертой переменными. Между остальными переменными корреляция не проявилась. В таком случае, когда в корреляционной матрице существуют как бы обособленно два центра тяжести, не связанных друг с другом, для объяснения корреляции используют два фактора. Пусть первый фактор будет $\mathbf{a}_1' = (0,90\ 0,80\ 0,05\ 0,05)$. Если мы, как в первом примере, вычислим произведение $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1'$, то получим матрицу $\mathbf{R}^+$, которую мы назвали матрицей воспроизведенных коэффициентов корреляции:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1' = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 0,80 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix} (0,90 \quad 0,80 \quad 0,05 \quad 0,05) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8100 & 0,7200 & 0,0450 & 0,0450 \\ 0,7200 & 0,6400 & 0,0400 & 0,0400 \\ 0,0450 & 0,0400 & 0,0025 & 0,0025 \\ 0,0450 & 0,0400 & 0,0025 & 0,0025 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

$\mathbf{R}^+$ воспроизводит первоначальную корреляционную матрицу не так хорошо, как в первом примере. Если сравнить элементы обеих матриц $\mathbf{R}_h$ и $\mathbf{R}^+$, то прежде всего обращает на себя внимание значительная разница в коэффициенте корреляции между третьей и четвертой переменными. Разницу $\mathbf{R}_h - \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}_1$ называют остаточной матрицей. Она содержит остаточные корреляции, которые не были объяснены первым фактором и остаются после выделения первого фактора.

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_h - \mathbf{R}^+ = \begin{pmatrix} 0,0025 & 0,0025 & 0,0400 & 0,0350 \\ 0,0025 & 0,0025 & 0,0400 & 0,0350 \\ 0,0400 & 0,0400 & 0,6400 & 0,5600 \\ 0,0350 & 0,0350 & 0,5600 & 0,4900 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

В первом примере на с. 56 все элементы остаточной матрицы равны нулю. В этом легко убедиться, так как матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^+$ имеют одни и те же элементы, за исключением диагональных элементов, которые в первом примере не учитывались, поскольку $\mathbf{R}_h$ не отличалась от $\mathbf{R}$. Во втором примере в матрице $\mathbf{R}_1$ элементы, соответствующие третьей и четвертой переменным, значительно отличаются от нуля. Остаточную матрицу можно теперь воспроизвести с помощью второго фактора $\mathbf{a}_2$, причем $\mathbf{a}_2' = (0,05 \quad 0,05 \quad 0,80 \quad 0,70)$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2' = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,80 \\ 0,70 \end{pmatrix} (0,05 \quad 0,05 \quad 0,80 \quad 0,70) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0025 & 0,0025 & 0,0400 & 0,0350 \\ 0,0025 & 0,0025 & 0,0400 & 0,0350 \\ 0,0400 & 0,0400 & 0,6400 & 0,5600 \\ 0,0350 & 0,0350 & 0,5600 & 0,4900 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Точно так же, как мы воспроизводили корреляционную матрицу с помощью первого фактора, попытаемся объяснить остаточную матрицу с помощью второго фактора. Итак, в целом вся корреляционная матрица составляется с помощью двух факторов, и всю модель можно представить в виде равенства

$$\begin{pmatrix} (0,8125) & 0,7225 & 0,0850 & 0,0800 \\ 0,7225 & (0,6425) & 0,0800 & 0,0750 \\ 0,0850 & 0,0800 & (0,6425) & 0,5625 \\ 0,0800 & 0,0750 & 0,5625 & (0,4925) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 \\ 0,80 & 0,05 \\ 0,05 & 0,80 \\ 0,05 & 0,70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,80 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 0,80 & 0,70 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

В равенстве (2.6) легко убедиться путем соответствующих вычислений. Первый элемент корреляционной матрицы равен: $0,8125 = 0,90 \cdot 0,90 + 0,05 \cdot 0,05$, по тому же самому правилу умножения матриц получаем другие элементы. Наша гипотеза о структуре корреляционной матрицы в этом примере сложнее, чем в первом. Мы используем два фактора, и эти оба фактора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ содержатся в столбцах матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 \\ 0,80 & 0,05 \\ 0,05 & 0,80 \\ 0,05 & 0,70 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2)^1. \tag{2.7}$$

В этом заключается упрощение матрицы $\mathbf{R}$. От четырех переменных мы пришли к двум факторам. В общем случае надо процедуру строить так, чтобы на фактор приходилось более двух переменных. Этот же пример был выбран ради наглядности. Первый фактор в основном связан с первой и второй переменными, что можно увидеть по нагрузкам. Второй фактор связан с третьей и четвертой переменными. Оба фактора в этом примере линейно независимы.

При геометрической интерпретации векторы, соответствующие переменным, не будут лежать вдоль одной и той же оси, как в первом примере, а расположатся на плоскости. Можно геометрически изобразить матрицу $\mathbf{A}$, поставив в соответствие каждой строке этой матрицы вектор в двумерной координатной системе. Координатные оси соответствуют факторам, векторы — переменным. Например, конец вектора 1 на рис. 2.2 имеет координаты 0,90 (нагрузка первого фактора) и 0,05 (нагрузка второго фактора), которые берутся из матрицы $\mathbf{A}$. Для графического изображения здесь необходима двумерная система координат. Одномерная — как на рис. 2.1 — недостаточна, так как имеются два фактора. Координатные оси являются факторами, на которые натянуто пространство, содержащее переменные.

---

[1] Вертикальная черта между двумя векторами или матрицами означает, что они составляют суперматрицу (расположены в более общей матрице друг около друга).

В этих двух примерах мы познакомились поверхностно, в первом приближении с рядом понятий и процедур, которые далее будут определены и описаны более подробно. Факторный анализ исходит из корреляционной матрицы. Ее диагональные элементы заменяются новыми, так называемыми *общностями*. Из корреляционной матрицы затем выделяются факторы, которые позволяют наиболее точно воспроизвести ее. Факторы не сразу определяются однозначно, это касается так называемой *проблемы вращения системы координат*. Следующий вопрос, который мы также еще не затрагивали, заключается в том, как факторы связаны с данными измерений каждого объекта и как для каждого объекта получить оценку значений факторов.

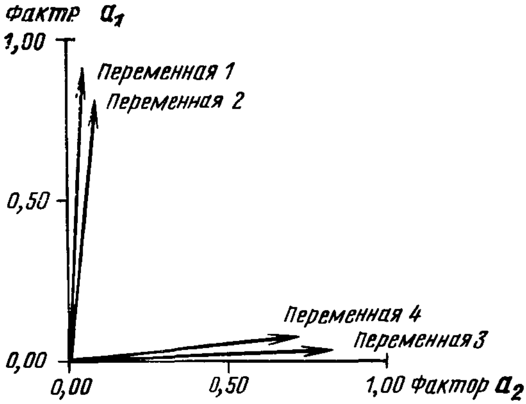


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация матрицы **А**. Векторы-переменные лежат на плоскости. Координаты концов векторов соответствуют факторным нагрузкам

Теперь мы немного подробнее остановимся на формальных соотношениях и определениях, которые подразумевались в обоих примерах.

2.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КОНЦЕПЦИИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В этой главе намечаются общие границы, внутри которых будут обсуждаться различные виды факторного анализа. Так как факторный анализ не имеет единой и законченной структуры, необходима такая формальная система соотношений, которая помогла бы сопоставить между собой отдельные способы решения.

Очевидно, что приводимые далее уравнения и определения начинающий воспримет с некоторыми затруднениями. Однако они составляют необходимую канву, без которой не обойтись. Читателю рекомендуется при освоении этой вступительной главы выполнять самостоятельно на бумаге соответствующие преобразования. Это поможет ему освежить в памяти или усвоить основные операции с матрицами, которые уже были описаны в гл. 1.4. Факторный анализ невозможен без знания матричного исчисления, поэтому матричная форма записи используется с самого начала. Также сразу даются и матричные уравнения, чтобы ввести читателя в курс дела. При этом задача заключается не просто в ознакомлении с материалом, а в освоении метода. Это освоение облегчается, если чтение сопровождается записью матриц, их элементов и вдумчивым отношением к приводимым матричным уравнениям.

2.2.1. Фундаментальная теорема

Пусть исходные данные записаны в виде матрицы $\mathbf{Y} = (y_{ij})$, где индекс $i = 1,2, \ldots, m$ относится к переменным, а индекс $j = 1, 2, \ldots, n$ к индивидуумам. Коэффициент корреляции между двумя переменными i и k вычисляется по известной формуле[1]

$$r_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{y_i})(y_{kj} - \overline{y_k})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{y_i})^2 \sum_{j=1}^{n} (y_{kj} - \overline{y_k})^2}} = \frac{s_{ik}}{s_i \cdot s_k}, \tag{2.8}$$

где $\overline{y_i} = 1/n \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$ — среднее значение,

$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{y_i})^2}$ — стандартное отклонение и $s_{ik} =$

$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{y_i})(y_{kj} - \overline{y_k})$ — ковариация.

Если все m переменных $\mathbf{Y}$ подвергнем следующему преобразованию

$$z_{ij} = \frac{y_{ij} - \overline{y_i}}{s_i}, \tag{2.9}$$

то матрица $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ будет удовлетворять следующим $2m$ условиям:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 = 1, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е. все средние значения переменных $\mathbf{Z}$ равны нулю, а все дисперсии равны единице. Строки матрицы $\mathbf{Z}$ называют *стандартизованными*, или *нормированными*, переменными, а z_{ij} называют также стандартизованным значением (*standard score*). Такое нормирование всегда возможно. Если исходить из стандартизованных переменных, то формула (2.8) упрощается:

$$r_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (z_{ij} z_{kj})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} z_{kj}^2}} = s_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} z_{kj}, \tag{2.10}$$

[1] См. также табл. 1.1 н 1.2.

т. е. для стандартизованных переменных коэффициенты корреляции и ковариации равны.

Для корреляционной и ковариационной матриц **R** и **S** имеет место соотношение

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{ZZ}'=\mathbf{R}=\mathbf{S}. \qquad (2.11)$$

В формуле (2.11) выражение $\frac{1}{n-1}$ является скаляром, **Z** — матрицей стандартизованных исходных данных, **R** — корреляционной матрицей и **S** — ковариационной матрицей. С корреляционной матрицей мы уже знакомились неоднократно. Она имеет размер $m \times m$, диагональные элементы отражают корреляцию переменных самих с собой, следовательно, они равны единице. Матрица также является симметрической, т. е. $r_{ik} = r_{ki}$. Корреляционная или ковариационная матрица является отправной точкой факторного анализа. Хотя обе матрицы при указанных условиях идентичны, но исторически так сложилось, что большей частью выбирали корреляционную матрицу, поэтому далее будем также исходить из стандартизованных переменных и матрицы **R**. В принципе можно было бы исходить из ковариационной матрицы. В этом случае пришли бы к аналогичным формулировкам[1].

Целью любого метода факторного анализа является представление величины z_{ij}, т. е. элемента матрицы **Z**, в виде линейной комбинации нескольких гипотетических переменных, или факторов. Положим, что значение z_{ij} может быть выражено в виде линейной комбинации r факторов[2].

$$z_{ij} = a_{i1}p_{1j} + a_{i2}p_{2j} + \ldots + a_{ir}p_{rj}. \qquad (2.12)$$

Это равенство выражает основную модель факторного анализа. Здесь a_{il} являются постоянными коэффициентами, которые следует определить; p_{1j} — p_{rj} — значениями факторов у j-го индивидуума (*factor scores*). Используя матричную форму записи, для всех z_{ij} имеем

$$\mathbf{Z} = \mathbf{AP}, \qquad (2.13)$$

где **Z** является матрицей порядка $m \times n$ стандартизованных переменных — исходных данных. Это равенство приводится еще раз на следующей странице в развернутом виде. $\mathbf{A} = (a_{il})$ является матрицей порядка $m \times r$, которую нужно определить. Она называется факторным отображением (*factor pattern*), а ее коэффициенты — факторными нагрузками (*factor loadings*). **A** является матрицей коэффициентов регрессии факторов по переменным; $\mathbf{P} = (p_{lj})$ — матрицей порядка $r \times n$ значений всех факторов у всех индивидуумов и должна

---

[1] См., например, [183].

[2] Буква r здесь используется как индекс, не следует смешивать его с коэффициентом корреляции.

быть также пронормирована построчно. Как видно из равенства 2.13, матрица **Z** представляет собой произведение двух матриц: **A** и **P**. При этом матрица **A** отражает связи *переменных* с факторами, а **P** описывает отдельные *индивидуумы*.

В (2.13) **A** и **P** неизвестны, известна лишь **Z**. Уравнение без введения дополнительных ограничений имеет бесконечное множество решений. Эти ограничения также составляют основную посылку всех методов факторного анализа. *Отдельные наблюдаемые значения являются линейными комбинациями гипотетических, ненаблюдаемых, или скрытых, переменных, называемых факторами, которые не могут быть обнаружены в процессе наблюдения.* Равенство (2.12) или (2.13) является математической моделью, причем мы еще не рассматривали ее со статистической точки зрения, например, не касались оценки параметров генеральной совокупности по результатам выборки. Подставив (2.13) в (2.11), получим

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n-1}\mathbf{ZZ}' = \frac{1}{n-1}\mathbf{AP}(\mathbf{AP})' = \frac{1}{n-1}\mathbf{APP}'\mathbf{A}' = \mathbf{A}\frac{1}{n-1}\mathbf{PP}'\mathbf{A}'.$$

Теперь по аналогии с формулой (2.11) можно утверждать, что выражение $\frac{1}{n-1}\mathbf{PP}' = \mathbf{C} = (c_{lp})$ является корреляционной матрицей, отражающей связи между факторами, т. е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{ACA}'. \tag{2.14}$$

Если наложить на это равенство условие некоррелированности факторов, т. е. $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, то в результате получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{AA}'. \tag{2.15}$$

Тэрстоун называет (2.14) и (2.15) *фундаментальной теоремой* факторного анализа. **C** является матрицей коэффициентов корреляции между факторами. В том случае, когда постулируются ортогональные* факторы, **C** становится единичной матрицей и при умножении ее опускают.

Фундаментальная теорема утверждает, что корреляционная матрица может быть воспроизведена с помощью факторного отображения и корреляций между факторами. Это положение уже было проиллюстрировано вводными примерами. Равенство (2.15) является отправной точкой классического метода решения. Однако нам бы хотелось пока воздержаться от обсуждения различных методов решения. Для

* Некоррелированные факторы на языке терминологии факторного анализа называются *ортогональными* (перпендикулярными), а коррелированные факторы — *косоугольными*. Эти термины связаны с геометрической интерпретацией корреляции. — *Примеч. пер.*

наглядности еще раз приведем равенства (2.13) и (2.14) в более подробной записи:

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1j} & \ldots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & z_{2j} & \ldots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{i1} & z_{i2} & \ldots & z_{ij} & \ldots & z_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{m1} & z_{m2} & \ldots & z_{mj} & \ldots & z_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{j2} & \ldots & a_{il} & \ldots & a_{ir} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mr} \end{pmatrix} \times$$

$$\mathbf{Z} \qquad = \qquad \mathbf{A} \qquad \times$$

$$\times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2j} & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{l1} & p_{l2} & \ldots & p_{lj} & \ldots & p_{ln} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & p_{r2} & \ldots & p_{rj} & \ldots & p_{rn} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$\mathbf{P}.$$

Для каждого отдельного элемента матрицы $\mathbf{Z}$ имеет место равенство (2.12).

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} \end{pmatrix} \times \tag{2.14}$$

$$\mathbf{R} \qquad = \qquad \mathbf{A} \qquad \times$$

$$\times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \qquad\qquad \mathbf{A}'$$

При $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ получаем (2.15); тогда для каждого отдельного элемента матрицы $\mathbf{R}$ имеет место выражение

$$r_{ik} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{ir}\,a_{kr}. \tag{2.16}$$

Здесь следует указать на основополагающее значение равенств (2.13), (2.14) и (2.15) и в дальнейшем предполагается их формальное понимание. Они выражают основную модель факторного анализа, из которой далее можно исходить при создании различных специальных моделей.

В гл. 2.1 мы уже познакомились с простым числовым примером. Числа были подобраны так, чтобы можно было легко произвести вычисления. В определенной степени процедура факторного анализа обратима. Так, если в правой части равенства (2.15) находится **A**, то в левой части обязательно получим **R**:

$$\underset{\mathbf{R}}{\begin{pmatrix} (0{,}82) & -0{,}73 & 0{,}17 & 0{,}00 \\ -0{,}73 & (0{,}65) & -0{,}16 & -0{,}01 \\ 0{,}17 & -0{,}16 & (0{,}65) & 0{,}71 \\ 0{,}00 & -0{,}01 & 0{,}71 & (0{,}82) \end{pmatrix}} = $$

$$= \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ -0{,}80 & -0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}80 \\ -0{,}10 & 0{,}90 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{A}'}{\begin{pmatrix} 0{,}90 & -0{,}80 & 0{,}10 & -0{,}10 \\ 0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix}}.$$

Первый элемент матрицы **R** получается следующим образом: $0{,}90 \cdot 0{,}90 + 0{,}10 \cdot 0{,}10 = (0{,}82)$. Он не равен единице, как это должно было бы быть в корреляционной матрице.

Значение первого элемента заключается в скобки и называется *общностью*. Это понятие мы будем еще обсуждать более детально. Второй элемент первого столбца равен: $-0{,}80 \cdot 0{,}90 - 0{,}10 \cdot 0{,}10 = -0{,}73$. Совершенно аналогично получаются другие элементы матрицы **R** путем перемножения матриц **A** и **A′** по соответствующему правилу. В факторном анализе эта процедура обратима: Может быть задана корреляционная матрица **R** и по ней находится **A**. Здесь была задана **A** и по ней определялась **R**. Указанные в примере числа удовлетворяют равенству (2.15). Можно легко сконструировать самостоятельно другие примеры.

2.2.2. Классификация факторов и связь между отдельными видами факторов

Задачей факторного анализа является определение матрицы **A**. Следует иметь в виду, что за время развития идей факторного анализа вошел в употребление ряд терминов, строго не дифференцированных. Но они имеют практическое значение, так как часто встречаются в литературе, и, кроме того, заслуживают внимания из-за своего основополагающего значения. Поэтому мы будем останавливаться на этих терминах. Как уже отмечалось, матрица **A** называется *факторным отображением,* а ее элементы a_{il} — *факторными нагрузками.* При ортогональных факторах, которые мы до сих пор исключительно и рассматривали, элементы принимают значения между -1 и $+1$. Если факторы не ортогональны, то элементы могут принимать большие значения. Здесь мы ограничимся только этим замечанием. Каждый фактор характеризуется столбцом, каждая переменная — строкой матрицы **А**. Если факторная нагрузка значительно больше или меньше нуля, то принята упрощенная форма записи в виде крестика (×) в соответствующем месте факторного отображения (см. рис. 2.3).

Выражение «значительно больше или меньше нуля» здесь означает не $\neq 0$ в математическом смысле, а такое значение $|a_{il}|$, которое превосходит более или менее произвольное или заданное на определенном уровне значимости критическое значение. Это критическое значение не требует более точного определения для введения дальнейших понятий. Пока нам достаточно лишь указать в каждом конкретном случае это критическое значение, которое позволяет выделить различные виды факторов, если $|a_{il}|$ фактора превосходит это значение. При этом всеми другими нагрузками этого фактора пренебрегают, т. е. факторное отображение упрощается. Нагрузки, которые считаются существенными, обозначаются на схеме факторного отображения крестиком (×), а пустые клетки матрицы **А** соответствуют нагрузкам, которыми можно пренебречь.

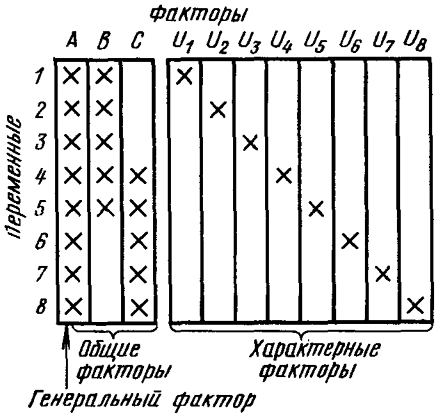


Рис. 2.3. Схематическое изображение факторного отображения. Крестик × означает высокую факторную нагрузку

Фактор называется *генеральным* (*general factor*), если все его нагрузки значительно отличаются от нуля. Следовательно, он имеет нагрузки от всех переменных и схематически такой фактор изображается столбиком A на рис. 2.3. Фактор называется *общим* (*common factor*), если хотя бы две его нагрузки значительно отличаются от нуля. Столбики A, B, C на рис. 2.3 представляют такие общие факторы. Они имеют нагрузки от двух и более переменных. Они могут взаимно перекрываться, т. е. одни и те же переменные могут давать нагрузки на несколько факторов. Генеральный фактор является частным случаем общих факторов, так как он имеет более двух значимых нагрузок. В противоположность этому факторы являются индивидуальными, если у них только одна нагрузка значительно отличается от нуля (см. столбики U_1—U_8 на рис. 2.3). В этом случае говорят о *характерных факторах* (*unique factors*), которые представляют только одну переменную. По аналогии с факторами можно провести классификацию переменных по числу достаточно высоких нагрузок. Число высоких нагрузок переменной на общие факторы называется ее *сложностью* (*complexity*). Например, переменная 1 на рис. 2.3 имеет сложность два, переменная 4 — три.

Решающее значение в факторном отображении на рис. 2.3 имеют общие факторы A, B, C. Как будет еще показано, характерные факторы получаются автоматически, если общие факторы установлены. Гипотеза, которая содержит факторное отображение на рис. 2.3, может быть представлена в другой форме на рис. 2.4. Связь трех факторов A, B, C с восемью переменными изображена прямыми.

Любая матрица, которая, например, содержит общие факторы A, B, C, отражает дифференцированные гипотезы о структуре величин, которые отчасти стоят за наблюдаемыми переменными (т. е. являются факторами), а отчасти сами являются переменными. Рис. 2.3 и 2.4 соответствуют друг другу. Хотя это и наглядно, результат факторного анализа не изображается графически в форме, приведенной на рис. 2.4. Чаще всего используется схема рис. 2.3. При любом факторном отображении легко перейти от одного способа изображения к другому. Общие факторы для отличия их от переменных обозначаются *здесь* буквами A, B и C. Однако чаще всего они обозначаются римскими цифрами.

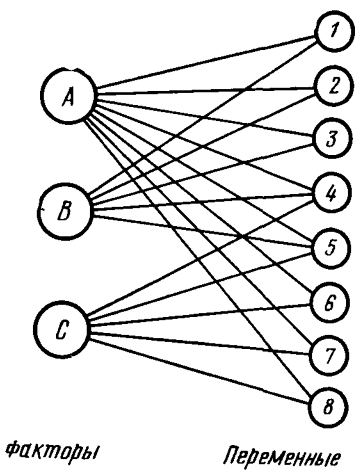


Рис. 2.4. Структура гипотезы факторного отображения рис. 2.3. Прямые, соединяющие факторы A, B, C с переменными, соответствуют высоким факторным нагрузкам

Нагрузки общих и характерных факторов связаны определенным соотношением через единичную дисперсию переменных. Действительно, эта единичная дисперсия равна:

$$s_i^2 = 1 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \text{ для всех } i. \tag{2.17}$$

Подставляя значения из (2.12) в (2.17) (причем мы берем не r факторов, а q и при этом $q \geqslant r$), в результате получим

$$s_i^2 = a_{i1}^2 \frac{\Sigma p_{1j}^2}{n-1} + a_{i2}^2 \frac{\Sigma p_{2j}^2}{n-1} + \ldots + a_{iq}^2 \frac{\Sigma p_{qj}^2}{n-1} +$$
$$+ 2\left(a_{i1} a_{i2} \frac{\Sigma p_{1j} p_{2j}}{n-1} + \ldots\right).$$

Теперь постулируем, что факторы должны быть стандартизованы и некоррелированы, тогда суммы $\frac{\Sigma p_{1j}^2}{n-1}$ и т. д. все равны 1, а суммы в скобках все равны 0. Итак, имеем

$$s_i^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{iq}^2 = 1. \tag{2.18}$$

Сумма квадратов всех нагрузок одной переменной равна единице. Равенство (2.18) выполняется при условии, что переменные стандартизованы, факторы стандартизованы и некоррелированы и в основу положена линейная модель. Соблюдение этих условий является необходимым требованием при использовании наиболее употребляемых сегодня методов. Равенство (2.18) можно записать в более модифицированном виде (2.19), где в скобках сначала приведены нагрузки r общих факторов, а затем — доля дисперсии характерного фактора. Равенство (2.19) отличается от (2.18) лишь последними тремя членами.

$$s_i^2 = 1 = (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{ir}^2) + b_i^2 + e_i^2. \qquad (2.19)$$

Полная дисперсия переменной по равенству (2.19) раскладывается на отдельные компоненты, которые представляют собой квадраты факторных нагрузок. Для наглядности это разложение графически представлено на рис. 2.5. Суммы квадратов нагрузок общих факторов называются *общностью* (*communality*) h_i^2. Это та доля дисперсии, которая указана в скобках равенства (2.19).

$$h_i^2 = a_{i1}^2 + \ldots + a_{ir}^2. \qquad (2.20)$$

Общность представляет собой часть единичной дисперсии переменной, которую можно приписать общим факторам. Она равна квадрату коэффициента множественной корреляции между переменной и общими факторами. Если из 1 вычесть h_i^2, то останется доля дисперсии, обозначаемая u_i^2, которая соответствует квадрату нагрузки определенного характерного фактора. Далее u_i^2 называется *характерностью*. Она представляет собой часть единичной дисперсии переменной, которая не связана с общими факторами:

$$u_i^2 = 1 - h_i^2 = b_i^2 + e_i^2. \qquad (2.21)$$

Как показывает вторая половина равенства, характерность u_i^2 можно разбить на две составляющие, одна из которых, b_i^2, называется *специфичностью*, а другая, e_i^2, является дисперсией, *обусловленной ошибкой*. Такое разделение на практике проводится редко. Специфичность b_i^2 является той долей единичной дисперсии переменной, которая не связана с общими факторами, не может быть также сведена к ошибке и присуща лишь одной определенной переменной. Специфичность и общность образуют *надежность* r_{ii}^2 (*reliability*):

$$r_{ii}^2 = h_i^2 + b_i^2 = 1 - e_i^2, \text{ т. е. } r_{ii}^2 \geqslant h_i^2. \qquad (2.22)$$

Надежность, являясь долей единичной дисперсии, дополняет дисперсию ошибки до единицы. Она может быть измерена различными способами, описание которых можно найти в [69]. Здесь этот вопрос подробно рассматриваться не будет. В любом случае из (2.22) следует, что общность не превышает надежности и равна ей только в случае нулевой специфичности.

Приведенные только что понятия графически представлены на рис. 2.5. Первая строчка на рисунке представляет собой дисперсию любой переменной, приведенную к единице, или 100%. Эту единичную дисперсию можно разбить на две составляющие: общность

h_i^2, которая обусловливается общими для нескольких переменных факторами, и характерность u_i^2, которая может быть приписана только этой переменной (вторая строчка на рисунке). Обе составляющие можно расчленить еще дальше (третья строка на рисунке), а именно: на квадраты отдельных факторных нагрузок, дисперсию ошибки e_i^2 и специфичность b_i^2. Сумма общности и специфичности образует надежность, и она является дополнением дисперсии ошибки до единицы (четвертая строка рисунка).

Теперь поставим задачу—получить общность и соответствующий характерный фактор из корреляционной матрицы. Основная модель факторного анализа записывается следующим образом: $\mathbf{Z} = \mathbf{AP}$

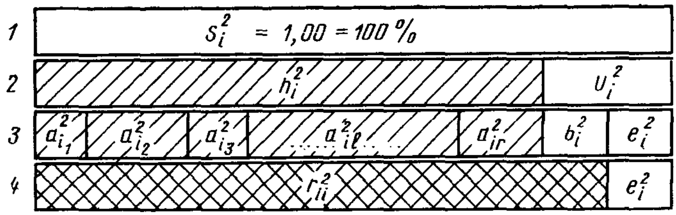


Рис. 2.5. Составляющие полной дисперсии переменной по равенству (2.19)

(равенство (2.13)). В этой модели не проводится разницы между общими и характерными факторами. В равенстве (2.23) постулируется для каждой переменной характерный фактор. Эта специальная модель многофакторного метода имеет следующий вид:

$$z_{ij} = a_{i1}p_{1j} + \ldots + a_{ir}p_{rj} + u_i p_{(r+i)j} \qquad (2.23)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{FP}^+. \qquad (2.24)$$

При этом $\mathbf{Z}$ является, как и в равенстве (2.13), матрицей исходных данных, записанных в стандартизованной форме. $\mathbf{F}$ — факторное отображение, включающее характерные факторы, т. е. $\mathbf{F}$ является матрицей порядка $m \times (r + m)$. $\mathbf{P}^+$ имеет размер $(r + m) \times n$ и содержит значения факторов у отдельных индивидуумов, включая значения характерных факторов. Подробно это записывается в следующем виде:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ z_{m1} & z_{m2} & \ldots & z_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & u_1 & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & & u_2 & & \varnothing & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & & \varnothing & & \cdot & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} & & & & & u_m \end{array}\right),$$

$$\mathbf{P}^{+} = \left(\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ p_{r1} & p_{r2} & \ldots & p_{rn} \\ \hline p_{(r+1)1} & \ldots & \ldots & p_{(r+1)n} \\ p_{(r+2)1} & \ldots & \ldots & p_{(r+2)n} \\ \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ p_{(r+m)1} & \ldots & \ldots & p_{(r+m)n} \end{array}\right).$$

F можно представить в виде суммы двух матриц, а именно **A** + **U** (равенство (2.25)). **F** представляет собой так называемую *полную факторную матрицу*. Она содержит нагрузки общих и характерных факторов. **A** является редуцированной факторной матрицей, содержащей нагрузки общих факторов. Она дополняется справа на m столбцов путем присоединения нулевых элементов. Это дополнение необходимо только для последующих математических выкладок. В общем под **A** понимается так же, как в равенствах (2.13)—(2.15), матрица нагрузок общих факторов. С этой матрицей **A** обычно работают (и она приводится в литературе), так как полная факторная матрица и **U** легко получаются из нее (по формуле $u_i^2 = 1 - h_i^2$). Матрица **U** является диагональной и содержит нагрузки характерных факторов на главной диагонали. Она дополняется слева на r столбцов путем присоединения нулевых элементов.

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{U}, \tag{2.25}$$

где

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & u_1 & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & & u_2 & & \varnothing & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & & \varnothing & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} & & & & & u_m \end{array}\right),$$

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \varnothing \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \end{array}\right),$$

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|ccccc} & u_1 & & & & \\ & & u_2 & & \varnothing & \\ \varnothing & & & \cdot & & \\ & & \varnothing & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & u_m \end{array}\right).$$

Применив фундаментальную теорему, можем записать:

$$\mathbf{R} = \mathbf{FF}',$$

т. е. $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + \mathbf{U})(\mathbf{A} + \mathbf{U})' = (\mathbf{A} + \mathbf{U})(\mathbf{A}' + \mathbf{U}') = \mathbf{AA}' +$

$$+ \mathbf{UA}' + \mathbf{AU}' + \mathbf{UU}'.$$

Путем соответствующих выкладок легко показать, что $\mathbf{UA}' = \mathbf{AU}' = 0$. Следовательно, $\mathbf{R} = \mathbf{AA}' + \mathbf{UU}'$.

Так как $\mathbf{AA}' = \mathbf{R}_h$ и $\mathbf{UU}' = \mathbf{U}^2$ (при этом матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}$ можем рассматривать без их дополнений), то

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_h + \mathbf{U}^2 \tag{2.26}$$

или

$$\mathbf{R} = \mathbf{AA}' + \mathbf{U}^2. \tag{2.27}$$

$\mathbf{R}$ — корреляционная матрица с единицами на главной диагонали; $\mathbf{R}_h$ — корреляционная матрица с общностями на главной диагонали. Ее называют также редуцированной корреляционной матрицей:

$$\underset{\mathbf{R}_h}{\begin{pmatrix} h_1^2 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & h_2^2 & \dots & \cdot \\ r_{31} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & \dots & \dots & h_m^2 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}} \times$$

$$
\times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \tag{2.28}
$$

$$\mathbf{A}'.$$

Элементами матрицы $\mathbf{R}_h$ соответственно являются

$$\text{при } i = k\colon a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{ir}^2 = h_i^2, \qquad (\text{по } 2.20)$$

$$\text{при } i \neq k\colon a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \dots + a_{ir}a_{kr} = r_{ik}. \qquad (\text{по } 2.16)$$

Наконец, $\mathbf{U}^2$ является диагональной матрицей с характерностями u_i^2 на главной диагонали. Из равенства (2.28) видно, что выбором диагональных элементов $\mathbf{R}_h$ устанавливаются величины общностей, а в необходимости их определения мы уже убедились во вводных примерах.

До сих пор предполагалось, что факторы не коррелированы друг с другом, т. е. речь шла только об ортогональных факторах. Это было удобно для упрощения формулировки задачи и математической записи решения. Однако, если подходить с общенаучной точки зрения, постулирование только ортогональных факторов сужает проблему, хотя этим достигается упрощенная в математическом смысле «идеальная картина». И надо иметь в виду, что в действительности она встречается редко, так как многие влияющие факторы наверняка коррелируют друг с другом. Поэтому мы хотели бы вначале формально обсудить возможность косоугольных факторов и соотношения между ними.

Выше была выведена формула (2.14) : $\mathbf{R} = \mathbf{ACA}'$, где $\mathbf{C}$ является матрицей коэффициентов корреляции между факторами. Вначале для упрощения уравнения мы постулировали, что $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, и получали частное решение. Решение же в общем случае усложняется. Однако если вначале вычислить ортогональную матрицу $\mathbf{A}$, то можно вслед за тем искать решение для косоугольных факторов по критериям, которые еще будут обсуждаться. Получение однозначного решения для косоугольных факторов более сложно. Обычно задается либо $\mathbf{C}$, либо матрица $\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{AC}$, которая содержит коэффициенты корреляции между переменными и факторами и называется *факторной структурой* (*factor structure*). Далее для матриц с косоугольной факторной структурой используется обозначение $\mathbf{V}$. Индексы *fs* обозначают факторную структуру. Позднее остановимся на различных видах этих матриц.

$$\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{AC}, \tag{2.29}$$

или в подробной записи:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1r} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ c_{31} & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{r1} & \cdot & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

Итак, для коэффициентов корреляции между переменными и факторами имеет место соотношение по (2.29):

$$v_{il} = a_{i1}c_{1l} + a_{i2}c_{2l} + \dots + a_{ir}c_{rl}. \tag{2.30}$$

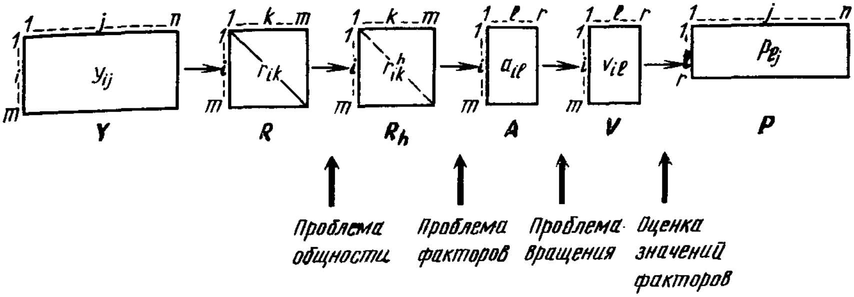
При $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ $\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{A}$, т. е. в случае ортогональных факторов факторное отображение идентично структуре: $v_{il} = a_{il}$. Тогда в правой стороне равенства (2.30) остается только один член, а именно тот, множителем которого является $c_{ll} = 1$, так как $c_{il} = 0$ при всех $i \neq l$.

Все представленные до сих пор равенства и определения содержат важнейшие концепции факторного анализа, а также основную и специальную модели многофакторного анализа. С их помощью теперь можно приступить к описанию общей процедуры решения.

2.2.3. Схема решения и основные проблемы факторного анализа

При проведении факторного анализа все расчеты носят последовательный характер. Процедура выполнения вычислительных операций схематично представлена на рис. 2.6. При этом еще раз приводится подробное описание важнейших матриц. Четыре вертикальные стрелки соответствуют четырем основным проблемам, возникающим при проведении факторного анализа в тех местах схемы, куда указывают эти стрелки.

Любой метод факторного анализа начинается с **Y** — матрицы исходных данных. По ней вычисляется корреляционная матрица **R**. По главной диагонали корреляционной матрицы затем проставляют



$\mathbf{Y}=(y_{ij})$ — матрица исходных данных,
$i=1,\dots,m$ — переменные,
$j=1,\dots,n$ — индивидуумы (объекты),
$\mathbf{R}=(r_{ik})$ — корреляционная матрица,
$i,\ k=1,\dots,m$,
$\mathbf{R}_h=(r^h_{ik})$ — редуцированная корреляционная матрица,
$i,\ k=1,\dots,m$

$\mathbf{A}=(a_{il})$ — матрица отображения, элементами которой являются факторные нагрузки,
$l=1,\dots,r$ — факторы,
$i=1,\dots,m$ — переменные,
$\mathbf{V}=(v_{il})$ — факторная матрица после поворота,
$l=1,\dots,r$ — факторы,
$i=1,\dots,m$ — переменные,
$\mathbf{P}=(p_{lj})$ — матрица значений факторов,
$l=1,\dots,r$ — факторы,
$j=1,\dots,n$ — индивидуумы (объекты),

Рис. 2.6. Схема факторного анализа. Связь между отдельными матрицами, указанными в схеме, объясняется подробно в соответствующих разделах книги. Процедура вычислений начинается с матрицы исходных данных **Y**. Горизонтальные стрелки указывают последовательность отдельных этапов факторного анализа; вертикальные стрелки — четыре основные проблемы факторного анализа

оценки общностей и получают $\mathbf{R}_h=(r^h_{ik})$. Это составляет *проблему общности*, которая состоит в установлении оценок $\hat{h}^2_i$. Это самая первая проблема, которая возникает в ходе факторного анализа. Стрелка между $\mathbf{R}_h$ и **A** указывает на *проблему факторов*. Из $\mathbf{R}_h$ с помощью определенных способов извлекают факторы, получая в результате матрицу **A**. Столбцы матрицы **A** ортогональны и занимают произвольную позицию в отношении переменных, определяемую методом выделения факторов. Возможно большое число матриц **A**, которые будут одинаково хорошо воспроизводить $\mathbf{R}_h$ по равенству (2.28). Из них должна быть выбрана одна, что составляет *проблему вращения*. Решение проблемы вращения одним из нескольких способов приводит к матрице **V**. И наконец, последняя проблема касается *оценки значений факторов* для каждого индивидуума.

На схеме рис. 2.6 только указаны четыре основные проблемы факторного анализа. Далее им будут посвящены целые разделы книги, структура которой как раз и определяется рис. 2.6. Здесь мы пока удовлетворимся тем, что отдельные проблемы сформулированы в качестве задач факторного анализа и установлена их последовательность.

В литературе по факторному анализу в большинстве случаев отдельные этапы вычисления приводятся в сильно упрощенном виде или выполняются тривиальным способом. Например, не употребляется метод вращения и отказываются от оценки значений факторов. Формально схема на рис. 2.6 охватывает всю процедуру выполнения факторного анализа. На практике часто из-за большого объема вычислений останавливаются на каких-либо ранних этапах или некоторые проблемы решают не полностью. При имеющихся в настоящее время возможностях применения электронных вычислительных машин такое отношение к анализу не может быть оправдано.

2.2.4. Наглядное пояснение с помощью числового примера

Чтобы сделать основную концепцию факторного анализа конкретнее и понятнее, приведем пример, который может быть легко просчитан. Благодаря примеру известные уже понятия и соотношения приобретут числовую наглядность.

В примере исходим из того, что решение заранее известно, оно задано. Тогда можно вычислить матрицу исходных данных, корреляционную матрицу и общности. Процедура вычислений в факторном анализе является в известной степени обратимой. В табл. 2.2 по **A** и **P** строится **Z** матрица исходных данных, записанных в стандартизированной форме. В действительности же при проведении факторного анализа поступают наоборот: по **Z** определяют **A** и **P**.

Матрица **P** в табл. 2.2 содержит значения двух факторов у десяти индивидуумов. Числа были подобраны так, чтобы среднее значение каждого фактора было приблизительно равно нулю, а его дисперсия — единице, причем для простоты использовались только целые числа между —2 и +2. У первого индивидуума проявление первого фактора оценивается нулем, второго фактора +1, у десятого индивидуума —

Таблица 2.2

Построение матрицы исходных данных по соотношению Z=AP

$$\overset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}80 \\ 0{,}10 & 0{,}70 \\ 0{,}05 & 0{,}50 \end{pmatrix}} \cdot \overset{\mathbf{P}}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & +2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & +2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{\mathbf{Z}}{\begin{pmatrix} 0{,}10 & -0{,}90 & 0 & -0{,}10 & -1{,}80 & 0{,}80 & 0 & 0{,}20 & 0 & 1{,}80 \\ 0{,}05 & -0{,}80 & 0 & -0{,}05 & -1{,}60 & 0{,}75 & 0 & 0{,}10 & 0 & 1{,}60 \\ 0{,}10 & -0{,}70 & 0 & -0{,}10 & -1{,}40 & 0{,}60 & 0 & 0{,}20 & 0 & 1{,}40 \\ 0{,}80 & -0{,}05 & 0 & -0{,}80 & -0{,}10 & -0{,}75 & 0 & 1{,}60 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}70 & -0{,}10 & 0 & -0{,}70 & -0{,}20 & -0{,}60 & 0 & 1{,}40 & 0 & 0{,}20 \\ 0{,}50 & -0{,}05 & 0 & -0{,}50 & -0{,}10 & -0{,}45 & 0 & 1{,}00 & 0 & 0{,}10 \end{pmatrix}}$$

соответственно +2 и 0. Матрица **A** в табл. 2.2 задана произвольно. Она отражает связи между двумя факторами и шестью переменными, а именно показывает, что три переменные относительно высоко «нагружают» фактор. Пользуясь равенством (2.13), можно вычислить матрицу стандартизованных исходных данных **Z** для шести переменных и десяти индивидуумов. Например, измеренным значением первой переменной у первого индивидуума будет число: $0{,}90 \cdot 0 + 0{,}10 \cdot 1 = 0{,}10$. Аналогично могут быть вычислены все элементы матрицы **Z**, представленные в табл. 2.2. Таким образом, у нас получается конкретная система уравнений, которая соответствует равенству (2.13) и основной исходной идее факторного анализа. Два фактора определяют вариацию шести переменных у десяти индивидуумов.

В действительности же при проведении факторного анализа была бы известна только **Z**, и из этой матрицы нужно было бы определять **A** и **P**. Для этого вначале исходя из **Z** строилась бы корреляционная матрица **R**. В нашем примере мы получили **R** простым способом, определив ее как **AA′**, что показано в табл. 2.3. Эта операция соответствует фундаментальной теореме (2.15). Если бы мы исходили из **Z**, то пришли бы к тому же самому результату, но на главной диагонали стояли бы всегда единицы. Благодаря же нашей маленькой уловке мы получили на диагонали матрицы $\mathbf{R}_h$ общности, обойдя таким образом в примере первую проблему факторного анализа, проблему общности. Общности здесь вычисляются непосредственно. В реальной же ситуации мы бы их оценивали определенным способом.

Таблица 2.3

Построение R_h по равенству, соответствующему фундаментальной теореме

$$
\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}80 \\ 0{,}10 & 0{,}70 \\ 0{,}05 & 0{,}50 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{A}'}{\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}80 & 0{,}70 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}70 & 0{,}50 \end{pmatrix}}
$$

$$
= \underset{\mathbf{R}_h}{\begin{pmatrix} (0{,}8200) & - & - & - & - & - \\ 0{,}7250 & (0{,}6425) & - & - & - & - \\ 0{,}6400 & 0{,}5650 & (0{,}5000) & - & - & - \\ 0{,}1250 & 0{,}0800 & 0{,}1150 & (0{,}6425) & - & - \\ 0{,}1600 & 0{,}1150 & 0{,}1400 & 0{,}5650 & (0{,}5000) & - \\ 0{,}0950 & 0{,}0650 & 0{,}0850 & 0{,}4025 & 0{,}3550 & (0{,}2525) \end{pmatrix}}
$$

Матрицы **Z**, $\mathbf{R}_h$, **A** и **P** представляют собой конкретную систему чисел, с помощью которых можно уяснить себе процедуру факторного анализа. По наблюдаемым значениям **Y** или **Z** строится **R**, оцениваются общности и путем выделения факторов определяется **А**. После процедуры вращения — здесь пока опускается описание этого метода — оцениваются значения факторов **P**. В нашем примере они были заданы и известны с самого начала.

Важное значение в факторном анализе имеет матрица **А**. Ее структура для наглядности изображена графически на рис. 2.7. По **А** вычисляются общности, как это показано в табл. 2.4. Общность h_1^2 первой переменной по равенству (2.20) равна: $0{,}90^2 + 0{,}10^2 = 0{,}82$. Тогда характерность определяется по равенству (2.21) : $1{,}00 - 0{,}82 = 0{,}18$. Таким же образом могут быть определены эти вели-

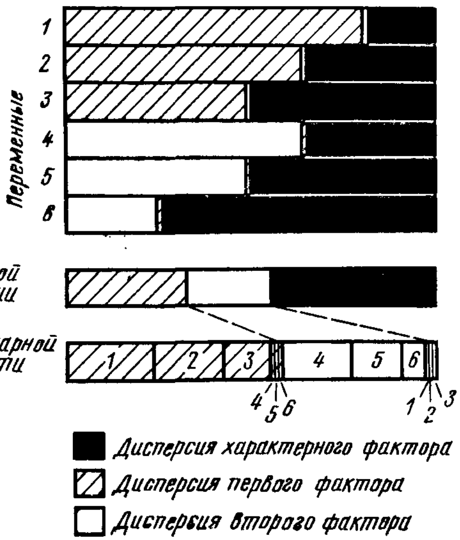


Рис. 2.7. Распределение долей единичных дисперсий переменных по факторам. Доли соответствуют численным значениям табл. 2.4.

чины для всех переменных. Дисперсия каждой переменной была приведена к единице. На рис. 2.7 единичная дисперсия каждой переменной изображена в виде прямоугольника, площадь которого равна единице. Единичная дисперсия с помощью методов факторного анализа разбивается на составляющие, одна из которых является дисперсией характерного фактора (затушевано), а другая — ее общностью (остальная часть площади прямоугольника). Общность каждой переменной далее расчленяется на доли дисперсии, связанные с отдельными факторами. В данном примере выделены два фактора. Доля дисперсии первого фактора изображена косой штриховкой, дисперсии второго фактора соответствует чистая площадка. Количественные соотношения между долями дисперсии взяты из табл. 2.4. Например, единичная дисперсия первой переменной на 81% состоит из дисперсии первого фактора, на 1% — из дисперсии второго фактора и на 18% — из дисперсии характерного фактора. Аналогично из табл. 2.4 берется распределение долей дисперсии других переменных. Взглянув на рис. 2.7,

Таблица 2.4

Вычисление долей дисперсии по матрице A

$\mathbf{A}=(a_{il})$		$\mathbf{A}^2=(a_{il}^2)$		h_i^2	u_i^2
0,90	0,10	0,8100	0,0100	0,8200	0,1800
0,80	0,05	0,6400	0,0025	0,6425	0,3575
0,70	0,10	0,4900	0,0100	0,5000	0,5000
0,05	0,80	0,0025	0,6400	0,6425	0,3575
0,10	0,70	0,0100	0,4900	0,5000	0,5000
0,05	0,50	0,0025	0,2500	0,2525	0,7475
Суммы столбцов:		1,9550+	1,4025 =	3,3575	2,6425
$h_i^2=a_{i1}^2+a_{i2}^2$				+2,6425	
$u_i^2=1-h_i^2$				6,0000	

Полная дисперсия	=6,0000	
Дисперсия первого фактора	=1,9550=32,58%	полная дисперсия
Дисперсия второго фактора	=1,4025=23,37%	полная дисперсия
Суммарная общность	=3,3575=55,95%	полная дисперсия
Суммарная характерная дисперсия	=2,6425=44,04%	полная дисперсия

Доли дисперсий отдельных факторов можно легко вычислить в процентах от суммарной общности или от полной дисперсии. Доли дисперсии отдельных переменных могут быть также выражены в процентах от дисперсии соответствующего фактора или от суммарной общности.

можно оценить, какая часть дисперсии каждой переменной объясняется факторами, выделенными в процессе анализа, и какая доля приходится на характерность. Также легко уловить, какие переменные с какими факторами связаны. Если рассматривать лишь заштрихованные области, то видно, откуда первый фактор получает свою дисперсию. Рассматривая только пустые клетки в прямоугольниках, определяем источники дисперсии второго фактора. В прямоугольнике с надписью «% полной дисперсии» сопоставляются друг с другом доли дисперсии обоих факторов и суммарной характерности. Полная дисперсия m переменных всегда равна m, поскольку каждая переменная была преобразована так, что ее дисперсия равна единице. В табл. 2.4 показано, как определяют доли дисперсии обоих факторов в процентах от полной дисперсии. В последнем прямоугольнике рис. 2.7 за 100% принята сумма h_i^2 и показано соотношение дисперсий обоих факторов, отнесенных к Σh_i^2. Дисперсию каждого фактора в свою очередь можно расчленить на доли, связанные с дисперсиями всех переменных. Эти доли, выраженные в процентах, легко определяются по схеме табл. 2.4.

Способ изображения, представленный на рис. 2.7, отличается наглядностью, позволяя быстро оценивать результаты факторного анализа. Им рекомендуется пользоваться при любом методе факторного анализа. Если ограничиваются лишь вычислением матрицы A, то хотя в ней содержится вся информация, однако, большей частью не уясняют себе, что она означает. Например, легко заметить, какая доля полной дисперсии приходится на общность, специфичность и дисперсию ошибки. Если надежность известна, возможно дальнейшее расчленение дисперсии переменной, как это изображено на рис. 2.5. Подобный способ также рекомендуется при проведении анализа.

Итак, если исходя из **Y** получено решение в виде матрицы **A**, то возможны следующие выводы, которые графически изображены на рис. 2.7: 1) два фактора «объясняют» почти всю общую дисперсию, которая даже немного превышает половину полной дисперсии; 2) первые три переменные связаны с первым фактором, последние три — со вторым. Выводы, полученные в результате факторного анализа, относительно общи и одновременно специфичны. К сожалению, еще не имеется сколько-нибудь удовлетворительных методов оценок вероятностей ошибок этих выводов. Однако разбиение дисперсии переменных на составляющие в результате факторного анализа эмпирически оправдало себя. В разделах 3, 4 и 5 обсуждается техника выделения составляющих полной дисперсии, так как к одним и тем же данным можно применить различные способы обработки.

На рис. 2.7 наглядно демонстрируется сущность проблемы общности, которая состоит в определении границ между затушеванными, заштрихованными и чистыми областями для каждой переменной. Проблема факторов касается установления количества факторов, обусловливающих корреляции и определения их связей с переменными. Вполне очевидно, что обе проблемы взаимосвязаны. Чем дальше налево распространяется затушеванная область на рис. 2.7, тем меньше факторов можно осмысленно выделить, и обратно. Если популярно объяснять проблему вращения, то можно сказать, что она состоит в установлении внутри фиксированных общностей границ между заштрихованными и чистыми участками для всех переменных таким образом, чтобы факторы по возможности однозначно определялись переменными.

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Геометрическая иллюстрация алгебраических зависимостей факторного анализа облегчает усвоение отдельных проблем. С другой стороны, n-мерная геометрия для большинства людей так же не наглядна, как матричное исчисление. Геометрическое представление обладает рядом важных преимуществ при знакомстве с математической стороной факторного анализа. Но при этом понятно, что пространственную модель можно строить только лишь в трехмерном случае. При выделении четырех и более факторов, что чаще всего и встречается на практике, невозможность наглядного пространственного изображения не имеет решающего значения. В этом случае при численном решении используются чисто алгебраические приемы матричного исчисления. Далее займемся геометрической иллюстрацией понятий и систем уравнений, приведенных в гл. 2.2.

2.3.1. Геометрическое представление матрицы исходных данных и пространство тестов

В гл. 1.3, посвященной корреляции и регрессии, мы уже познакомились с геометрическим изображением связи между двумя переменными (см. рис. 1.2 — 1.6). На графиках каждому индивидууму соответствует точка в двумерной системе координат, причем по осям координат откладываются значения переменных. В общем случае наблюдается более двух переменных. Тогда исходные данные задаются в виде матрицы. В табл. 2.5 приведен простой пример такой матрицы только для трех лиц.

Таблица 2.5

Пример матрицы исходных данных

	A	*B*	*C*
1	7,3	3,0	0,0
2	3,4	3,1	0,9
3	0,6	5,3	5,4
4	0,8	—1,5	2,7
5	6,5	—2,5	1,0

A, *B*, *C* — лица; 1÷5 — переменные.

Проиллюстрируем данную матрицу графически, а именно начертим корреляционные диаграммы. Каждая диаграмма будет содержать только три точки, так как мы располагаем данными только по трем лицам.

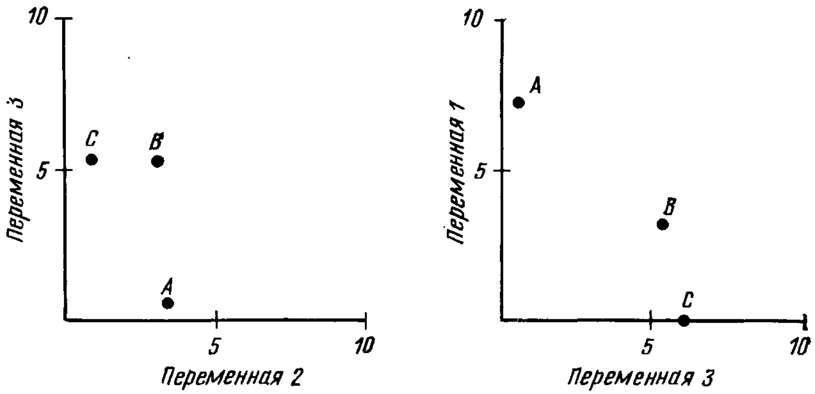


Рис. 2.8. Корреляционные диаграммы по данным табл. 2.5. Буквы *A*, *B*, *C* соответствуют индивидуумам (лицам)

На рис. 2.8 изображены две такие диаграммы, а именно для второй и третьей переменных, а также для первой и третьей переменных. Точки при этом соответствуют лицам, т. е. столбцам табл. 2.5. Координатные оси каждый раз соответствуют двум строкам. При подобном графическом изображении для матрицы исходных данных потребовалось бы несколько корреляционных диаграмм, а именно столько, сколько имеется коэффициентов корреляции, т. е. $(m/2)\ (m-1)$. В нашем случае это было бы $2 \cdot 5 = 10$ двумерных корреляционных диаграмм, из которых только две представлены на рис. 2.8. Вполне очевидно, что такой способ геометрического представления не очень удобен из-за большого числа графиков. Отказываясь от двумерного изображения можно пойти по одному из следующих путей.

Во-первых, можно столбцы табл. 2.5 представить в виде трех точек в пятимерном пространстве. Обычные корреляционные диаграммы являются тогда проекциями этого пространства на соответствующие плоскости.

Во-вторых, можно пять переменных, или строки табл. 2.5, представить в виде пяти точек в трехмерном пространстве. Три лица здесь соответствуют координатным осям. Это так называемое *пространство тестов** изображено на рис. 2.9 для матрицы исходных данных табл. 2.5. Вся информация этой таблицы содержится в рисунке. Каждая переменная представлена вектором, или стрелкой, координаты концов которых берутся из табл. 2.5. Итак, матрицу исходных данных можно рассматривать как n-мерное пространство тестов, в котором находится m точек-переменных. Если бы в нашем примере было более трех лиц, то мы вынуждены были бы использовать бо́льшую размерность и наглядность примера исчезла бы.

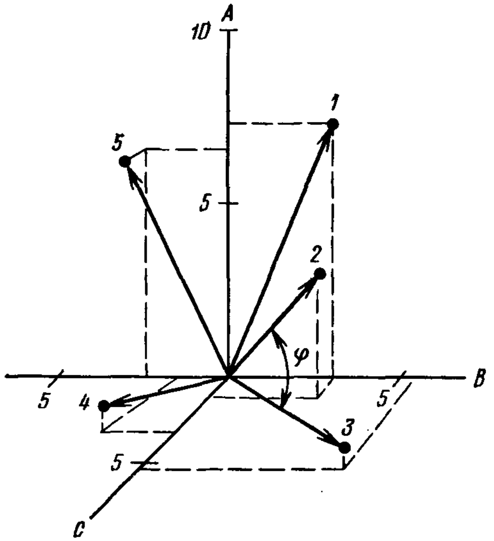


Рис. 2.9. Пространство тестов по данным табл. 2.5

Оба способа геометрического представления матрицы исходных данных эквивалентны. В первом случае n лиц изображаются точками в m-мерном пространстве (рис. 2.8, $m = 2$). При этом столбцы матрицы исходных данных являются точками, а строки — осями координат. Во втором случае m переменных изображаются точками в n-мерном пространстве (рис. 2.9). При этом строки матрицы исходных данных являются точками, а столбцы — координатными осями. Представление переменных в виде векторов, или точек, в n-мерном *тестовом пространстве* приближает нас непосредственно к факторному анализу. Такой способ рассмотрения является в известной степени обратным по отношению к обычному изображению в виде корреляционной диаграммы и, кроме того, отличается размерностью.

---

* Термин «пространство тестов» возник в результате применения факторного анализа в психологии, где в качестве переменных чаще всего выступают величины, характеризующие результаты выполнения человеком тех или иных тестов. — *Примеч. пер.*

Давайте более подробно рассмотрим пространство тестов на рис. 2.9. Расстояние точки i от начала координат в r-мерном пространстве называется нормой вектора d_i, она определяется как $d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2}$. В нашем случае для матрицы исходных данных (y_{ij}) $d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2}$. Как известно, стандартное отклонение переменной со средним значением, равным нулю, вычисляется по формуле $s_i = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2}$. Подставив эту формулу в приведенное выше выражение, получим для пространства тестов T:

$$d_i^T = s_i\sqrt{n-1}. \tag{2.31}$$

Расстояние точки, или переменной, от начала координат в тестовом пространстве d_i^T пропорцинально стандартному отклонению этой переменной. Коэффициент пропорциональности равен $\sqrt{n-1}$. (Легко можно убедиться, что для переменных, среднее значение которых $\neq 0$, коэффициент пропорциональности тоже является постояиным числом.) Чем длиннее вектор, изображаемый в виде стрелки на рис. 2.9, тем больше стандартное отклонение или дисперсия соответствующей переменной.

Коэффициент корреляции также имеет геометрическую интерпретацию в тестовом пространстве. Вообще коэффициент корреляции в r-мерном пространстве между двумя векторами определяется по формуле

$$r_{ik} = \cos(\varphi_{ik}) = \frac{\sum_{j=1}^{r} x_{ij}\cdot x_{kj}}{d_i\cdot d_k},$$

где d_i и d_k являются нормами обоих векторов, а x_{ij}, x_{kj} — проекциями точек i и k на r координатных осей. Исходя из этого для пространства тестов получим следующее выражение коэффициента корреляции между двумя переменными i и k:

$$r_{ik}^T = \cos(\varphi_{ik}^T) = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\cdot y_{kj}}{(n-1)\cdot s_i\cdot s_k} = \frac{s_{ik}}{s_i\, s_k}, \tag{2.32}$$

т. е. косинус угла между двумя векторами на рис. 2.9 соответствует коэффициенту корреляции между ними. Формула (2.32) идентична обычной формуле коэффициента корреляции (2.8) в том случае, когда $\bar{y} = 0$.

2.3.2. Пространство общих факторов и полное факторное пространство

При геометрической интерпретации матриц, элементами которых являются действительные числа, используется n-мерное пространство. Если столбцы матрицы рассматривать как точки, то получим ряд корреляционных диаграмм, выполненных в двумерном изображении. Если, наоборот, рассматривать строки матрицы как точки, то получим пространство тестов, понятие о котором было дано выше.

Вполне очевидно, что оба способа геометрической интерпретации идентичны в смысле представления информации, так как в их основе лежит одна и та же матрица исходных данных.

В факторном анализе предпочитают геометрическую интерпретацию переменных в виде точек в многомерном пространстве. Матрица исходных данных предстает тогда в виде тестового пространства, размерность которого соответствует количеству столбцов, или индивидуумов. Таким же образом можно интерпретировать все остальные матрицы, встречающиеся в факторном анализе. Но обычно ограничиваются только матрицей исходных данных и еще двумя матрицами, пространственные представления которых из-за своих примечательных свойств получили особые названия. Это так называемое *пространство общих факторов* (*common factor space*) *и полное факторное пространство* (*total factor space*).

Координатными осями пространства общих факторов являются столбцы матрицы **A**. Для иллюстрации этого пространства используем из табл. 2.4 матрицу **A**, графическое изображение которой дано на рис. 2.10.

Положение векторов-переменных определяется значениями факторных нагрузок, являющихся координатами концов этих векторов. Первая переменная с факторными нагрузками 0,90 и 0,10 обозначена точкой 1. Шесть переменных являются точками или векторами в двумерной ортогональной системе координат. Так как векторы (стрелки) расположены близко друг к другу, на графике обозначены только их концы. Если было бы три фактора, то использовалась бы трехмерная система координат, при r факторах — r-мерная система координат. *Пространство общих факторов является пространством наименьшей размерности, в котором можно представить m переменных в виде векторов*. Любое пространство с меньшей размерностью не смогло бы включить в себя все переменные. Любое пространство с большей размерностью обладало бы бо́льшими возможностями, чем это необходимо для изображения в нем переменных. Размерность, минимально необходимая для изображения в пространстве всех m переменных, соответствует рангу корреляционной матрицы или матрицы исходных данных (см. с. 46). *При геометрической интерпретации факторами являются координатные оси, на которые натянуто пространство общих факторов*. Они нормированы, т. е. их длина приведена к единице. Это связано с тем, что дисперсия фактора должна быть равна единице. Каждая переменная представлена вектором в пространстве общих факторов. Как и при рассмотрении тестового пространства, можно поинтересоваться, какова длина этого вектора в пространстве общих факторов. Применив общую формулу для определения расстояния конца вектора от начала координат в r-мерном пространстве, получим

$$d_i^G = \sqrt{\sum_{l=1}^{r} a_{il}^2} = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{ir}^2} = h_i, \qquad (2.33)$$

т. е. оказывается, что длина вектора-переменной в пространстве общих факторов равна корню квадратному из общности. Наибольшая длина такого вектора равна единице, а именно в том случае, если общность равна единице. На практике это встречается редко. Итак, длина стрелок на рис. 2.10 указывает на то, какая доля единичной дисперсии каждой переменной является общей с факторами. Рис. 2.10 является графической иллюстрацией общности, или, вернее, корня квадратного из общности. Другой способ графического представления общности был указан на рис. 2.7.

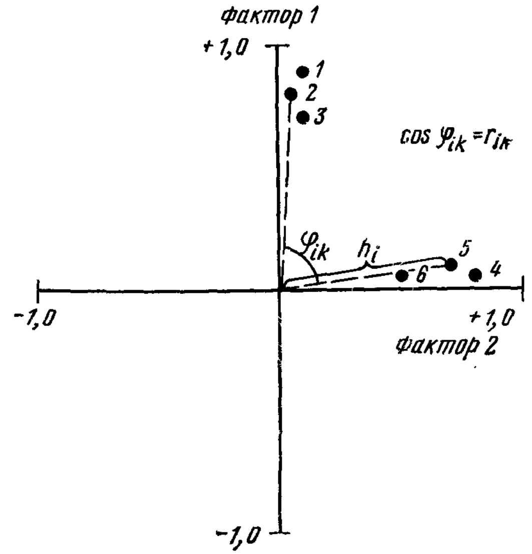


Рис. 2.10. Пространство общих факторов ($r=2$) по данным табл. 2.4. Длина вектора-переменной h_i равна квадратному корню из общности. Коэффициент корреляции между переменными равен косинусу угла между этими переменными в пространстве общих факторов

Угол φ между двумя векторами-переменными в пространстве общих факторов является мерой корреляции обеих переменных, т. е. справедливо следующее равенство:

$$r_{ik}^O = \cos \varphi_{ik}^G = \frac{\sum_{l=1}^{r} a_{il} a_{kl}}{h_i h_k}. \qquad (2.34)$$

Следовательно, косинус угла между двумя векторами так же, как в пространстве тестов, соответствует коэффициенту корреляции. Формулу (2.34) можно записать в таком виде:

$$h_i h_k r_{ik} = \sum_{l=1}^{r} a_{il} a_{kl}. \qquad (2.35)$$

Теперь приступим к рассмотрению *полного факторного пространства*. Координатными осями в этом пространстве являются столбцы матрицы F (см. (2.25)). Эта матрица в приведенном числовом примере имеет вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0{,}900 & 0{,}100 & 0{,}180 & & & & & \\ 0{,}800 & 0{,}050 & & 0{,}357 & & \varnothing & & \\ 0{,}700 & 0{,}100 & & & 0{,}500 & & & \\ 0{,}050 & 0{,}800 & & \varnothing & & 0{,}357 & & \\ 0{,}100 & 0{,}700 & & & & & 0{,}500 & \\ 0{,}050 & 0{,}500 & & & & & & 0{,}747 \end{pmatrix}.$$

При геометрической интерпретации шесть переменных были бы представлены векторами в $2+6=8$-мерном пространстве. При этом часть координатных осей, а именно две первые оси, соответствовали бы пространству общих факторов. Остальные факторы содержат соответственно только одну нагрузку от одной переменной. Следовательно, оба вида факторов определяют размерность полного факторного пространства. *Полное факторное пространство натянуто на все факторы как общие, так и характерные.* Пространство общих факторов натянуто только на общие факторы и является подпространством полного факторного пространства. Так как нагрузки общих факторов с помощью равеиства (2.21) однозначно определяют нагрузки характерных факторов, то проекции переменных на оси в пространстве общих факторов также однозначно определяют проекции переменных на оси в полном факторном пространстве. Следовательно, вполне достаточно представить переменные в пространстве общих факторов, а их положение в полном факторном пространстве тогда синхронно определится. Так как пространство общих факторов имеет размерность на m единиц меньше размерности полного факторного пространства, то оно проще, но, к сожалению, представляет только общие факторы.

Аналогично определению расстояния конца вектора от начала координат в пространстве тестов и пространстве общих факторов длину вектора, который представляет определенную переменную в полном факторном пространстве, можно выразить таким образом:

$$d_i^{\tau} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m+r} a_{ij}^2} = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{ir}^2 + u_i^2} = 1, \qquad (2.36)$$

т. е. концы всех векторов в полном факторном пространстве лежат на поверхности $m+r$-мерного шара с радиусом, равным единице. Косинус угла между двумя векторами в полном факторном пространстве равен:

$$\cos \varphi_{ik}^{\tau} = r_{ik}^{\tau} = \sum_{j=1}^{m+r} a_{ij} \cdot a_{kj}, \qquad (2.37)$$

т. е. в полном факторном пространстве угол между двумя векторами и, стало быть, коэффициент корреляции между двумя переменными равен скалярному произведению обоих векторов. Основные характеристики рассмотренных видов пространств собраны в табл. 2.6. Как это было принято и раньше, в данной таблице m означает число переменных, n — число индивидуумов, а r — число факторов.

Таблица 2.6

Длина вектора и коэффициенты корреляции в пространстве тестов, общих факторов и в полном факторном пространстве

	Пространство тестов T	Пространство общих факторов G	Полное факторное пространство τ
Размерность	$m \times n$	$m \times r$	$m \times (m+r)$
Длина вектора-переменной	$s_i \sqrt{n-1}$	h_i	1,00
Коэффициент корреляции между переменными i и k	$r_{ik}^T = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij} \cdot y_{kj}}{(n-1) \cdot s_i \cdot s_k}$	$r_{ik}^G = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{r} a_{il} \cdot a_{kl}}{h_i \cdot h_k}$	$r_{ik}^\tau = \sum\limits_{j=1}^{m+r} a_{ij} \cdot a_{kj}$

2.3.3. Геометрическая интерпретация выделения факторов и метод вращения

На схеме рис. 2.6 были указаны важнейшие матрицы и основные проблемы, возникающие в процессе факторного анализа. Мы также познакомились с геометрической интерпретацией матрицы исходных данных **Y**, с интерпретацией матрицы **A** в виде пространства общих факторов и матрицы **F** — в виде полного факторного пространства. Предоставим читателю возможность самому геометрически проиллюстрировать остальные матрицы схемы рис. 2.6. Если посмотреть на начало и конец схемы проведения факторного анализа, а именно на матрицы **Y** и **P**, то становится очевидным упрощение, которое достигается этим методом. Матрица **Y** имеет размер $m \times n$, а **P** — размер $r \times n$, т. е. m переменных, измеренные у n индивидуумов, сводятся к r факторам. Сокращение размерности происходит не непосредственно на матрице **Y**, а между $\mathbf{R}_h$ и **A**. Решение проблемы факторов геометрически соответствует уменьшению размерности.

Корреляционная матрица числового примера, приведенного для наглядности, имеет порядок, равный шести, т. е. шесть переменных обусловливают размер матрицы **R**. При этом каждой строке матрицы **R** в пространстве соответствует точка. Это 6-мерное пространство графически изобразить невозможно. Соответствующая матрица **A** (см. рис. 2.10) имеет порядок, равный 6×2, что дает возможность представить шесть переменных в двумерном пространстве. Этот переход от 6-мерной корреляционной матрицы к двумерному пространству общих факторов осуществляется путем выделения факторов. Целью этого процесса является установление пространства минимальной размерности, в котором бы содержались все переменные. Как этого можно достигнуть в частных случаях и насколько решения являются адекватными, обсуждается в разделе 3. Нас здесь интересует только тот факт, что *выделение факторов геометрически означает отыскание пространства наименьшей размерности, которая еще допускает содержание в этом пространстве всех переменных* и также проецирование переменных в этом r-мерном пространстве общих факторов. В алгебраических терминах решение факторной проблемы означает нахождение ранга r корреляционной матрицы. В геометрическом плане эта проблема состоит в отыскании путей перехода от высокоразмерного пространства к низкоразмерному с минимально возможной потерей информативности. Верхней границей для r является число переменных m. При переходе от m к r часть информации, конечно, теряется, но с этим приходится мириться ради сокращения набора переменных и упрощения модели. При применении некоторых способов выделения факторов понижение размерности происходит чисто вычислительным путем без учета статистических концепций. Благодаря выделению факторов способом, который еще подлежит подробному обсуждению, обязательно определяется размерность пространства, в котором должны быть представлены наблюдаемые переменные. В геометрических терминах это означает определение координатных осей в пространстве общих факторов.

Другой проблемой факторного анализа является так называемая *проблема вращения*, которая также имеет геометрическое истолкование. Двумерное пространство общих факторов по данным числового примера еще раз представлено на рис. 2.11, *А* (см. табл. 2.4 и рис. 2.10). Векторы на рис. 2.11 соответствуют переменным. Расположение векторов по отношению друг к другу строго определено, углы между ними соответствуют элементам корреляционной матрицы в табл. 2.3. Тэрстоун называет представление переменных в пространстве общих факторов в виде совокупности векторов *конфигурацией*. На рис. 2.11 отдельно изображена конфигурация шести переменных. Конфигурацию можно представлять себе независимо от системы координат, хотя при этом всегда подразумевается конкретная система координат, даже если ее не вычерчивают (на рис. 2.11, *В* переменные представлены в двумерной системе координат, но координатные оси отсутствуют). Связь между конфигурацией и системой координат не определяется условием, что векторы-переменные должны воспроизводить корреляционную матрицу. Можно себе представить, что конфигурация векторов на рис. 2.11, *А* вращается вокруг своей начальной точки так же, как колесо со спицами вращается вокруг своей оси, а система координат при этом занимает фиксированное положение. Можно также представить себе, что поворачивается система координат, а конфигурация векторов занимает фиксированное положение. Одно из бесконечно многих возможных положений конфигураций векторов относительно системы координат представлено на рис. 2.11, *Б*. Все эти возможные положения конфигурации векторов относительно системы координат одинаково хорошо воспроизводят корреляционную матрицу; углы между векторами каждый раз остаются теми же самыми. Проблема факторов не имеет однозначного решения, более того, имеется целое семейство равнозначных решений. *Из этого бесконечно большого числа возможных решений, которые геометрически представляются в виде различных положений конфигурации векторов относительно системы координат, должно быть выбрано одно.* Такой способ получения решения называется *вращением*, так как геометрически эта процедура выполняется путем вращения конфигурации векторов вокруг своей начальной точки.

На рис. 2.11 представлено вращение в двумерной задаче. Вычислительные операции приводятся в гл. 5.1. Если же пространство общих факторов имеет размерность более трех, то вращение можно наглядно представить на нескольких плоскостях, т. е. все $r(r-1)/2$ двумерных представления переменных выполняются с двумя факторами.

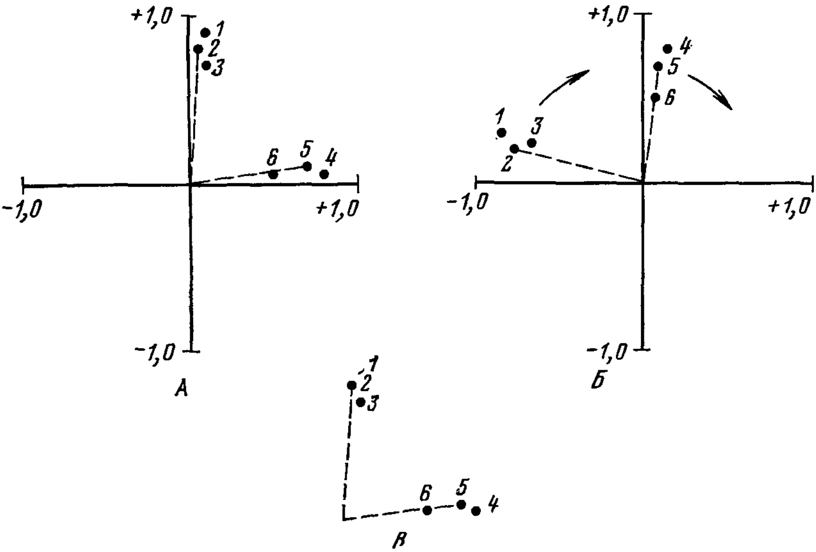


Рис. 2.11. *А—В*. Вращение. *А* — положение системы координат, обеспечивающее наиболее простое соотношение между переменными и факторами; *Б* — одно из возможных положений конфигурации векторов относительно системы координат; *В* — конфигурация векторов без системы координат

Применение метода вращения вызывает ряд других проблем, например выбор координатных осей при косоугольных факторах или вопрос альтернативного представления систем координат, ортогональных по отношению друг к другу, на которых позднее мы остановимся более подробно. Для начала достаточно добиться понимания способа вращения, его возможностей и роли в получении решения. Метод вращения необходим в силу того, что проблема факторов не имеет однозначного решения при решении ее алгебраическим путем. Как добиваются однозначного решения с помощью метода вращения, будет показано дальше. Сейчас мы пока только укажем на эту возможность.

Из рис. 2.11 видно, что положение конфигурации векторов в системе координат на диаграмме *А* «проще», чем на диаграмме *Б*. Стрелки на диаграмме *А* лежат близко к координатным осям. Интуитивно можно было бы предпочесть это решение. Оба фактора, или обе координатные оси на рис. 2.11, *А*, могли бы быть отождествлены с двумя пучками переменных и интерпретированы ими. По рис. 2.11, *Б* такая интерпретация невозможна. При вращении конфигурации векторов принимают бесчисленное множество положений относительно системы координат. Из этих положений должно быть выбрано одно, при котором достигается возможно более простое расположение векторов-переменных по отношению к координатным осям. Это еще будет подробно обсуждаться.

2.4. ЧАСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ КАК ИСХОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

В самом начале развития факторного анализа не было ни точных формулировок с привлечением матричного исчисления, ни соответствующей геометрической интерпретации. Более того, Спирмэн при построении своей теории исходил из частных коэффициентов корреляции. В связи с тем, что такая исходная позиция сама по себе не приводит к современной теории факторного анализа, она пока не рассматривалась нами. Однако она способствует пониманию материала.

Общепринятое вычисление коэффициентов корреляции между двумя переменными на практике приводит к ряду трудностей, которые не могут быть преодолены только с помощью этих коэффициентов. Значимые коэффициенты корреляции лишь констатируют связь между двумя наблюдаемыми переменными, и часто остается открытым вопрос, благодаря чему же осуществляется эта связь. Обычно при наличии корреляции считают, что переменная x определяет переменную y или, наоборот, переменная y определяет x, или что третья переменная z либо же совокупность других переменных x определяют y. Знание только одних коэффициентов корреляции не является достаточным основанием для выдвижения этих гипотез. Коллер [176; *1*, *2*, *3*] неоднократно указывал, что корреляция может возникнуть за счет неоднородности выборки или из-за технических либо вычислительных погрешностей. В принципе погрешности можно исключить, если они известны, а также избежать влияния неоднородности. Что является результативным и факторным признаками, определяется только экспериментальным путем. Вопрос, обусловливается ли корреляция между x и y связью третьей переменной с x и y, приводит к понятию частной корреляции.

Частный коэффициент корреляции между двумя переменными при фиксированном значении третьей переменной вычисляется по известной формуле

$$r_{xy\cdot z}=\frac{r_{xy}-r_{xz}\cdot r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}. \tag{2.38}$$

Выводом этой формулы мы заниматься не будем. При анализе корреляции и корреляционной матрицы Спирмэн исходил из того, что частные коэффициенты корреляции между двумя переменными должны быть равны нулю, если общий «фактор» поддерживается постоянным:

$$r_{ik \cdot f_1} = 0 \text{ для } i \neq k. \tag{2.39}$$

В корреляционном анализе при вычислении частных коэффициентов корреляции соответствующие переменные остаются на одном и том же уровне; в факторном анализе постоянное значение принимает фактор. Если удалось свести к нулю значения частных коэффициентов корреляции путем удачного выбора одного фактора, поддерживаемого на постоянном уровне, то имеются все основания предполагать, что этот фактор один обусловливает наблюдаемые корреляции переменных своим воздействием на них. В этом случае говорят о генеральном факторе, с которым мы уже познакомились. Коэффициенты корреляции между переменными и факторами являются факторными нагрузками. Остановимся вначале только на одном факторе и подставим (2.38) в (2.39), тогда получим

$$0 = \frac{r_{ik} - r_{if_1} \cdot r_{kf_1}}{\sqrt{(1 - r_{if_1}^2)(1 - r_{kf_1}^2)}}. \tag{2.40}$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы числитель этой дроби был равен нулю, т. е.

$$r_{ik} = r_{if_1} \cdot r_{kf_1} \text{ для } i \neq k, \tag{2.41}$$

где r_{if_1} и r_{kf_1} являются факторными нагрузками, которые раньше мы обозначали a_{il}. Их произведение дает коэффициент корреляции между наблюдаемыми переменными.

На практике редко встречается выполнение условия (2.41) для корреляционной матрицы. Поэтому вводят другие факторы, которые поддерживаются на постоянном уровне и от которых требуется, чтобы они были некоррелированы. Если одного фактора по равенству (2.41) недостаточно, чтобы свести к нулю частные корреляции, то для объяснения наблюдаемых корреляций применяют два фактора:

$$r_{ik \cdot f_1 f_2} = 0 \text{ для } i \neq k. \tag{2.42}$$

Формула частного коэффициента корреляции при фиксированных значениях двух переменных имеет вид:

$$r_{xy \cdot zu} = \frac{r_{xy \cdot u} - r_{xz \cdot u} \cdot r_{yz \cdot u}}{\sqrt{(1 - r_{xz \cdot u}^2)(1 - r_{yz \cdot u}^2)}}, \tag{2.43}$$

т. е.

$$r_{ik \cdot f_1 f_2} = 0 = \frac{r_{ik \cdot f_2} - r_{if_1 \cdot f_2} \cdot r_{kf_1 \cdot f_2}}{\sqrt{(1 - r_{if_1 \cdot f_2}^2)(1 - r_{kf_1 \cdot f_2}^2)}}.$$

Правая часть равенства тогда будет равна нулю, когда числитель этой дроби будет равен нулю. Подставляя в числитель выражения, соответствующие формуле (2.38), получим

$$0=\frac{r_{ik}-r_{if_2}\cdot r_{kf_2}}{\sqrt{(1-r_{if_2}^2)(1-r_{kf_2}^2)}}-\frac{r_{if_1}-r_{if_2}\cdot r_{f_1 f_2}}{\sqrt{(1-r_{if_2}^2)(1-r_{f_1 f_2}^2)}}\cdot\frac{r_{kf_1}-r_{kf_2}\cdot r_{f_1 f_2}}{\sqrt{(1-r_{kf_2}^2)(1-r_{f_1 f_2}^2)}}.$$

Коэффициент корреляции между обоими факторами $r_{f_1 f_2}$ должен быть равен нулю. Приведя члены к общему знаменателю, получим

$$0=\frac{r_{ik}-r_{if_2}\,r_{kf_2}-r_{if_1}\,r_{kf_1}}{\sqrt{(1-r_{if_2}^2)(1-r_{kf_2}^2)}}.$$

В силу того, что числитель должен быть равен нулю, имеем

$$r_{ik}=r_{if_1}r_{kf_1}+r_{if_2}r_{kf_2} \text{ при } r_{f_1 f_2}=0. \tag{2.44}$$

Если двух факторов недостаточно, т. е. после введения двух факторов имеется еще остаточная корреляция между переменными, то добавляют еще третий фактор и т. д. Таким образом, мы пришли к многофакториому анализу, который уже упоминался выше, но с другой исходной позиции. Если в факторном анализе исходят из частных коэффициентов корреляции, то основное требование записывается в следующем виде:

$$r_{ik\cdot f_1 f_2 \ldots f_r}=0 \text{ для } i\neq k, \tag{2.45}$$

т. е. r факторов своим воздействием целиком обусловливают наблюдаемую корреляцию между переменными и полностью воспроизводят корреляционную матрицу. Эта формулировка эквивалентна формулировке фундаментальной теоремы (2.15) и приводит к формуле (2.46), которая полностью соответствует формуле (2.16):

$$r_{ik}=r_{if_1}r_{kf_1}+r_{if_2}r_{kf_2}+\ldots+r_{if_r}r_{kf_r} \text{ для } i\neq k. \tag{2.46}$$

Обращаясь к формуле (2.16), надо иметь в виду, что $r_{if_1}=a_{i1}$, $r_{kf_1}=a_{k_1}$ и т. д.

С исторической точки зрения основную идею многофакторного анализа можно воспринять как попытку по возможности точно воспроизвести наблюдаемые корреляции переменных путем поддержания на постоянном уровне определенных величин, так называемых факторов. Должно быть подобрано как можно меньшее число факторов, но с таким расчетом, чтобы при их фиксировании частные корреляции были равны нулю. Взаимосвязь переменных с факторами определяет наблюдаемые коэффициенты корреляции между переменными.

Такой подход всегда можно осуществить при $r=m$. Однако интерес представляют те случаи, когда r значительно меньше m, причем если это достигается без большой потери информации. При изучении частной корреляции обычным способом соответствующие коэффициенты вычисляются между всеми переменными. Большое число частных коэффициентов корреляции дает трудно обозримую информацию.

По сравнению с этим подход, используемый в факторном анализе, дает то преимущество, что фиксируется небольшое число факторов, и факторы, не удовлетворяющие принципу частной корреляции, могут быть отброшены.

2.5. МЕСТО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА СРЕДИ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Говорят о многомерных статистических методах, когда каждый индивидуум или объект характеризуется значениями многих подлежащих измерению переменных и все эти величины рассматриваются в статистическом анализе одновременно для целого ряда индивидуумов и оцениваются совместно. Такие методы по самым различным причинам приобретают все большее значение. Совершенно очевидно, что одновременная оценка нескольких переменных в целом позволяет сделать более четкие и более полные выводы, чем рассмотрение только одной переменной. Обзор многомерных стандартных методов имеется у Кендэла [172] или у Кендэла и Стьюарта [173]. Андерсон [5; *4*] дает математическое обоснование многомерных методов при условии нормальности распределений.

В этой вводной части не ставится цель дать полное и систематическое описание призиаков, позволяющих установить четкие границы между факторным аиализом и другими многомерными методами. Однако для более глубокого понимания самого факторного анализа полезно рассмотрение его на фоне некоторых других методов, даже если этот фон обрисован не очень четко. Далее обсуждаются цели и основные постановки задач отдельных методов, безотносительно к их математическим обоснованиям, сходству и различиям в формулировках. Постараемся обрисовать хотя бы в общих чертах место факторного анализа среди этих методов, насколько это возможно.

Кендэл [172; *3*] указывает в качестве исходной позиции при разграничении многомерных методов различия в понятиях «зависимость» и «взаимозависимость» (*dependence and interdependence*). Имеется в виду *зависимость* одной или нескольких переменных от остальных. Конкретная постановка вопроса позволяет определить, что является результативной и факторной величиной. Самым простым примером теории, занимающейся исследованием зависимости, является регрессионный анализ. Кендэл сюда же относит дисперсионный и ковариационный анализ. В противоположность этому под *взаимозависимостью* понимается исследование связей между несколькими переменными без выделения результативных и факторных величин. Сюда относится корреляционный и ассоциативный анализ, анализ функциональных связей, компонентный и факторный анализ. Дискриминантный анализ и вычисление канонических корреляций нельзя отнести ни к одному из этих видов анализа. Разграничение зависимости и взаимозависимости связано с трудностями, присущими любой схематизации. Разница между ними определяется направленностью вопроса. По сути доказательство различия между ними идентично доказательству связи их друг с другом.

Вначале ставился вопрос: является ли факторный анализ вообще статистическим методом? Так как факторный анализ исходит из коэффициентов корреляции, его следует считать статистическим методом. Однако определение главных компонент корреляционной матрицы является вычислительной абстракцией, которая не распространяется на генеральную совокупность. Но аналогично определение среднего значения и регрессионной прямой тоже является вычислительной процедурой, осуществляемой по определенному алгоритму. Такое представление данных через среднее значение, регрессионную прямую, а также главные компоненты является уже одной из статистических задач.

Распространение вывода по результатам опыта на генеральную совокупность во многих задачах факторного анализа молчаливо проводится без оценки точности факторного отображения. В противоположность этому, например, при вычислении среднего значения и регрессионной прямой обычно оценивают точность их определения и используют систему критериев с определенной заранее вероятностью ошибки. Статистические соображения повсюду присутствуют также в факторном анализе, например при определении числа факторов, подлежащих выделению, при определении общностей, при вращении (критерий Баргмана) или при оценке значений факторов. Определение факторных нагрузок в максимально правдоподобном решении Лоули и так называемый канонический факторный анализ Рао являются статистическими методами. Оценка значимости остаточной корреляции после выделения r факторов производится по статистическим критериям. В настоящее время факторный анализ можно излагать на основе математико-статистических концепций, как это и делают, например, Лоули и Максвелл. При изучении такого материала читатель с невысоким уровнем подготовки неизбежно встретится с определенными трудностями. Поэтому обычно предпочитают наглядный и эмпирический способы изложения, а там, где это необходимо, прибегают к статистическим рассуждениям. Такой подход соответствует также становлению факторного анализа в историческом аспекте. Современный уровень его развития со всей очевидностью показывает, что факторный анализ относится к многомерным статистическим методам. Далее факторный анализ сравнивается с четырьмя известными многомерными методами, чтобы показать разницу в постановках задач.

Множественный регрессионный анализ. В множественном регрессионном анализе задаются целью получить оптимальную оценку зависимой переменной z_0 исходя из нескольких так называемых «независимых переменных» $(z_1 \dots z_m)$. Эта терминология неудачна и может ввести в заблуждение. Особенную путаницу вносит название «независимые» для переменных $z_1 \dots z_m$ потому, что эти переменные не являются в общем случае независимыми в вероятностном смысле. Эти переменные могут быть связаны друг с другом и, конечно, связаны с зависимой переменной, иначе не имело бы смысла производить оценку. Если бы переменные были действительно независимыми, а следовательно, ортогональны друг к другу и к целевой функции, они ничего бы не вносили в оценку. Их независимость надо понимать в том смысле, что они определяются раздельно и ими можно варьировать в опыте, в то время как зависимую переменную лишь измеряют. Поэтому следует отдавать предпочтение другим терминам (для $z_1 \dots z_m$) и z_0, например, *регрессоры* (регрессионные переменные) и *зависимая переменная*, или *исходные величины* и *целевая функция*. В гл. 1.3 уже была описана линейная регрессия между исходной величиной x и целевой функцией y.

Модель множественной регрессии для стандартизованных данных имеет следующий вид:

$$z_{0j} = \beta_1 z_{1j} + \beta_2 z_{2j} + \dots + \beta_m z_{mj} + e_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.47}$$

т.е. зависимая переменная z_0 рассматривается как линейная комбинация переменных $z_1 \dots z_m$. Коэффициенты $\beta_1 \dots \beta_m$ выбираются так, чтобы $\sum_{j=1}^{n} e_j^2$ становилась возможно меньше. Более подробное описание модели имеется в гл. 6.2. Целевая функция, а именно z_0, оценивается для каждого индивидуума по ряду других переменных так, чтобы погрешность e_j была по возможности малой.

В противоположность этому в факторном анализе пытаются определить новые переменные, так называемые *факторы*, величины которых могут быть затем оценены для каждого индивидуума. Во множественном регрессионном анализе ограничиваются сопоставлением изменений, лежащих на поверхности явлений, в факторном анализе пытаются заглянуть за кулисы этих явлений, обнаружить основные влияния, лежащие в основе этих изменений, и произвести их оценку в каждом отдельном случае. Модель факторного анализа более сложна. В факторном анализе все переменные одинаково важны и все оцениваются, в то время как в множественном регрессионном анализе производится расчленение переменных. По всем переменным определяется минимально возможное число независимых факторов (проблема факторов и проблема вращения), которые затем могут быть оценены с помощью множественного регрессионного анализа для всех индивидуумов (оценка значений факторов). Оба метода различаются постановкой целей и ни в коем случае не противопоставляются друг другу. В факторном анализе метод множественной регрессии применяется для оценки значений факторов. И наоборот, может оказаться вполне рациональным привлекать факторный анализ к определению коэффициентов регрессии при вычислении уравнений регрессии. Гуттман [112; *1*] и Дуайер [79; *3*] показали, что благодаря этому можно достигнуть уменьшения объема вычислений, если требуется определить связь между всеми m переменными при m больше 4 или 5.

Существенное различие между обоими методами состоит в том, что факторный анализ не довольствуется данными переменными, а ищет те немногие величины, которые воспроизводят переменные и объясняют их. Кроме указанных, существуют еще другие точки соприкосновения обоих методов, например совокупный коэффициент корреляции (см. гл. 6.3).

Дисперсионный анализ. В то время как в регрессионном анализе предполагается различие между исходными величинами и целевой функцией, т. е. производится группировка переменных, в дисперсионном анализе исходят из данных, уже сгруппированных по различным индивидуумам. Оценка расхождения между двумя средними значениями выполняется с помощью t-критерия. В рамках дисперсионного анализа значительно расширяются возможности проверки гипотезы существенности различия между парами средних. В случае однофакторного комплекса проверяется гипотеза, является ли существенным различие между средними значениями отдельных групп и средним значением всей совокупности. Итак, в дисперсионном анализе проверяется определенная гипотеза. Вид гипотезы зависит от постановки задачи и от исходных данных. Прежде всего, большим достоинством дисперсионного анализа является возможность исследования влияния сразу нескольких факторов. В многофакторном дисперсионном анализе (MANOVA)[1] проверяется гипотеза различия между векторами средних значений.

Здесь не будет излагаться теория дисперсионного анализа. Этой теме посвящены публикации многих авторов, к которым мы и отсылаем читателя, например Линдер [190], Вебер [303], Коллер [176] и др. Из книг, изданных на английском языке, можно назвать книги таких авторов, как Диксон [76], Браунли [26], Беннет и Франклин [18], Шеффе [252], Кендэл и Стьюарт [173], а также Андерсон [5, *4*]. Дисперсионный анализ является классическим методом проверки существенности различия между средними значениями данных, разбитых на группы, и других гипотез, связанных с этой постановкой, например проверка отсутствия влияния различных факторов и их взаимодействий. При этом большей частью используется линейная модель, как и в факторном анализе. Осуществить выбор соответствующей модели многофакторного дисперсионного анализа в каждом конкретном случае не так просто, как это может показаться вначале. Вид дисперсии, подставляемой в знаменатель F-критерия, определяется каждый раз выбранной моделью. Встречаются значительные трудности при интерпретации отдельных взаимодействий и прежде всего потому, что число взаимодействий сильно возрастает с увеличением числа факторов-переменных. Кроме того, в имеющихся в распоряжении программах для электронных вычислительных машин чрезвычайно редко учитывается более 5 или 6 факторов, т. е. выбор числа переменных в дисперсионном анализе ограничен. Следует указать на то, что термин «фактор» общепринят в дисперсионном анализе и означает наблюдаемую величину. Следовательно, понимание этого термина в рамках дисперсионного анализа отлично от его толкования в факторном анализе.

Постановка задачи в факторном анализе существенно отличается от ее постановки в дисперсионном анализе. Задачей дисперсионного анализа является исследование влияния одного или нескольких факторных признаков и их взаимодействий на результативный признак и оценки этого влияния. При этом отдельные значения результативного признака увязываются с выбранной моделью. Заранее задаются факторы, число которых ограничено, и их уровни.

В факторном анализе переменные исследуются в отношении их взаимосвязи. При этом заранее не постулируется, что наблюдаемые переменные полностью представляют исследуемую область. Напротив, ставится задача определения количества и вида линейно-независимых друг от друга переменных (факторов), которые бы достаточно точно воспроизводили взаимосвязи наблюдаемых данных. Факторный

[1] MANOVA — сокращенное название многофакторного дисперсионного анализа.

анализ пытается выявить «существенные» величины, которые определяют вариацию большого числа переменных. В то время как в дисперсионном анализе имеют дело с одной или несколькими переменными, заданными заранее, и по разработанной методике проверяют их влияние, в факторном анализе пытаются через имеющееся, ничем не ограниченное число наблюдаемых переменных воспроизвести величины, полностью их объясняющие, и оценить эти величины для отдельных индивидуумов.

При конкретных исследованиях имеет смысл оба метода комбинировать, на что особо указывал Каттелл [35, *4*]. Вначале, при неопределенной еще структуре исследуемой области, полезно провести факторный анализ, чтобы выявить факторы, вызывающие рассеяние, а потом экспериментировать с ними или, например, провести дисперсионный анализ, чтобы доказать их влияние на третьи величины. Кроме того, можно объединить обе концепции в одном эксперименте и при получении оценок факторов, на что также обращает внимание Каттелл [35; *4*].

Приоритет в проведении параллели между факторным и дисперсионным анализом принадлежит Барту [27; *2*, *8*], но его публикации труднодоступны. Из работ, выполненных его учениками, следует особо отметить работу Кризи [68]. В ней автор пытается исходя из матрицы исходных данных проверить гипотезу существования факторов с помощью дисперсионного анализа. К сожалению, метод дает не очень хорошие результаты, но он прекрасно улавливает связь между дисперсионным и факторным анализом. Фрюхтер в статье, опубликованной в справочнике [35; *21*], описывает некоторые варианты комбинированного применения обоих методов. Но до сих пор отсутствует полное изложение сопоставления обоих методов.

Дискриминантный анализ. Выработка правила, позволяющего приписать некоторый элемент к одной из двух групп, является основной задачей дискриминантного анализа. При такой постановке вопроса должны иметься значения m переменных для n индивидуумов, полученные в результате наблюдений. Кроме того, должна быть известна принадлежность каждого индивидуума к одной из двух групп. К какой из этих двух групп теперь относить новые индивидуумы исходя из имеющейся информации? Вопрос упирается в подбор такой линейной комбинации переменных, которая бы оптимально разделила обе группы. В геометрических терминах задача сводится к определению положения новой оси T, удовлетворяющего следующему условию: проекции индивидуумов двух заранее известных групп должны казаться возможно более разделенными. На рис. 2.12 графически представлено решение проблемы разделения в случае двух переменных и двух групп. Ни вдоль оси переменной x_1, ни вдоль оси переменной x_2 нельзя произвести разделение обеих групп, хотя в действительности индивидуумы обеих групп различны между собой. Надо найти такое положение новой оси T, чтобы обе группы в проекции на нее казались бы полностью разделенными. Более подробно описание дискриминантного анализа имеется, например, у Линдера [190; *2*], Коллера [176; *3*], Андерсона и Бэнкрофта [6], Кендэла [172; *1*], Кендэла и Стьюарта

[173], Кули и Лонза [62], а также Андерсона [5; *4*]. Процедура расчетов не ограничивается двумя группами индивидуумов, ее можно распространить на несколько групп в r-мерном пространстве.

Существенное отличие от факторного анализа заключается в том, что в дискриминантном анализе определяется разделение точек, причем заранее уже известно, какие точки к какой группе должны относиться. С помощью факторного анализа в принципе такие группы можно найти. Обычно в факторном анализе переменные рассматривают-

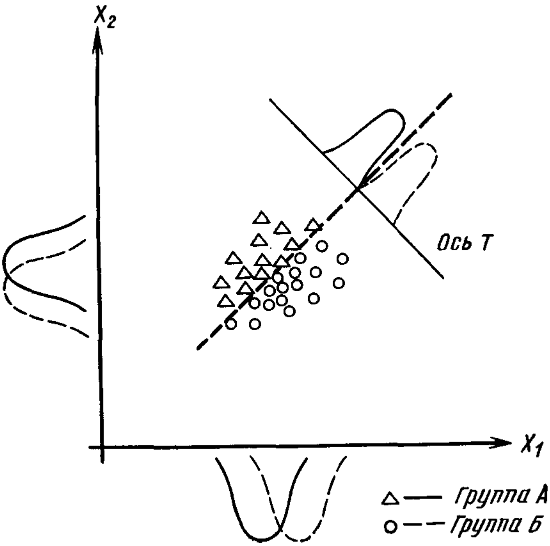


Рис. 2.12. Геометрическая интерпретация задачи дискриминантного анализа. Проекции точек на оси x_1 и x_2 дают два накладывающихся друг на друга распределения. При проекции точек на ось T распределения обеих групп точек полностью разделены

ся как точки; при использовании так называемой Q-техники расчета (см. гл. 8.1) оси меняются и точками становятся индивидуумы. Скопление точек на рис. 2.12 неоднородно, оно состоит из двух различных облаков. Такие неоднородности оказывают влияние на коэффициенты корреляции и могут проявиться в виде факторов, как это будет показано ниже.

Из всего вышесказанного ясно, что дискриминантный анализ определенным образом связан с проблемой вращения, в которой также идет речь об установлении нового положения осей. При применении метода вращения, однако, заранее не известно, какие точки связаны друг с другом. По-видимому является целесообразным при нахождении групп комбинировать оба метода.

Метод главных компонент. В то время как дисперсионный и дискриминантный анализ имеют лишь немного общего с факторным анализом, метод главных компонент очень тесно связан с факторным анализом. Этот метод разработан Хотеллингом [144; *1*]. Он позволяет при заданной m-мерной корреляционной матрице найти новую ортогональную m-мерную систему координат и именно так, чтобы максимум полной дисперсии лежал в направлении первой главной оси, а максимум оставшейся дисперсии — в направлении 2-й главной оси и т. д. Соответствующие формулы и процедура вычислений приведены в гл. 3.1. Метод главных компонент является важнейшим методом выделения факторов. Однако его следует строго отличать от факторного анализа как такового.

Метод главных компонент заключается в нахождении последовательности ортогональных осей координат, вдоль которых каждый раз в убывающем порядке определяется максимум полной дисперсии. Процедуру вычисления можно прекратить в любом месте и, например, выбрать только первые две главные компоненты, которые воспроизводят лишь 80% полной дисперсии. Проекции индивидуумов на главные компоненты можно определить точно. Существенное отличие от факторного анализа заключается в том, что диагональные элементы матрицы **R**, используемой в компонентном анализе, каждый раз равны единице. Это означает, что общности равны единице, т. е. характерные факторы отсутствуют. Этим модель компонентного анализа отличается от модели факторного анализа.

Единичная дисперсия всех переменных в компонентном анализе рассматривается в совокупности как общая дисперсия. Хотя это приводит к однозначному решению, однако это нереально почти во всех практических ситуациях. Пожалуй, никогда не проводится анализ переменных, при котором имела бы место гипотеза, что полная дисперсия равна общей, т. е. что она определяется только наблюдаемыми переменными. Лишь в том случае, когда эта гипотеза подтверждается критерием, можно применять модель компонентного анализа.

Разумеется, главные компоненты можно рассматривать лишь как возможные математические описания измерений полной дисперсии и им нельзя приписать никакого другого эквивалента в действительности. Сообразно с этим метод главных компонент позволяет определить ортогональную систему координат с определенными «стоящими» свойствами, которой в действительности чрезвычайно редко могут соответствовать какие-либо условия. Это находится в прямом соответствии с тем, что главные компоненты ортогональны и дальше не вращаются. В действительности влияющие факторы большей частью коррелированы, и поэтому могут лишь рассматриваться как полезные описания измерений, которые исчерпывают максимум дисперсии.

В противоположность этому модель факторного анализа позволяет отыскать весь комплекс взаимосвязанных дисперсий. При этом вычислительная операция по определению главных компонент используется в качестве одного из этапов.

Размежевание факторного и компонентного анализа связано с различием решаемых вопросов. Специалисты по факторному анализу со времени существования метода главных компонент рассматривали его в качестве возможного и весьма полезного этапа в расчетах внутри факторного анализа. Статистики, напротив, все время пытались факторный анализ рассматривать как частный случай метода главных компонент. Мы здесь придерживаемся того мнения, что нерационально факторный анализ втискивать в модель метода главных компонент. Метод главных компонент рассматривается лишь как средство решения проблемы факторов и более подробно обсуждается в соответствующем месте.

Описанное в этом вводном разделе разграничение факторного анализа от четырех других многомерных методов имело целью облегчить понимание дальнейшего материала, но оно было рассчитано на такого читателя, который уже знаком хотя бы с одним или двумя приведенными методами.

Факторный анализ относится к многомерным статистическим методам, являясь одним из них. Он пригоден только для решения определенных задач. Имеется целый ряд таких задач, для решения которых более эффективны другие методы. Выбор соответствующей методики при конкретных исследованиях зависит от многих обстоятельств, разработка какого-либо простого правила невозможна. Остается довериться опыту практического работника и специалиста-статистика, которые должны суметь выразить в статистических терминах задачу, адекватную требованиям проводимого исследования, и правильно выбрать статистический метод.

2.6. ВЫВОДЫ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАСЧЛЕНЕНИЕ МАТЕРИАЛА

Цель данного вводного обзора — дать описание различных подходов к факторному анализу и наметить в общих чертах процедуру расчета. Факторный анализ был разработан при проведении психометрических исследований в англосаксонских странах. Он возник из потребности узнать что-либо о структуре взаимосвязей большого числа измеримых переменных. В настоящее время он все еще тесно связан с психологией, однако часто применяется и в других областях исследования.

Целью метода является выделение из большого числа наблюдаемых переменных наиболее простых показателей (факторов), которые бы описывали данный объект изучения, как можно точнее воспроизводили бы данные, полученные в результате наблюдения, и в определенном смысле также «объясняли» внутренние объективно существующие закономерности. В принципе факторный анализ не ограничивается лишь воспроизведением исходных данных, что, правда, также является его целью; в этом случае он называется «описательным факторным анализом». Такой подход приводит к компонентному анализу и с самого начала не претендует на интерпретацию результатов и отыскание эквивалентов в действительности. Факторный анализ решает больший объем задач. С его помощью пытаются разработать такую рациональную модель, которая не только воспроизводит исходные данные, но и позволяет получить интерпретируемую систему показателей модели, имеющих реальные эквиваленты в действительности. Затем на втором этапе можно эту модель проверить на новых данных.

Первоочередной задачей факторного анализа является не проверка гипотезы, а ее формирование. Этим факторный анализ отличается от других распространенных статистических методов. Он принадлежит к одному из тех методов, которые делают возможным формирование гипотезы на основе большого комплекса данных. При отыскании факторов, наиболее существенно влияющих на исследуемый признак, которые стоят за наблюдаемыми переменными, нужно руководствоваться принципом как можно более простого объяснения природы данного явления. Это стремление к упрощению находит свое выражение в том, что выделяется такое количество факторов, которое минимально необходимо для воспроизводимости наблюдаемых данных.

Упрощение выступает так же, как критерий вращения. Вращение производится до получения «простой структуры», т. е. пытаются принять в качестве критерия локализации системы координат расположение наблюдаемых переменных в пространстве. Специалисты, занимающиеся прикладной математикой, в общем случае представляют данные в произвольной системе координат. Решающая роль принадлежит при этом самим данным, а выбор системы координат не имеет значения. В противоположность этому в факторном анализе пытаются найти определенную предпочтительную систему координат, которая должна интерпретироваться и выбираться в зависимости от имеющихся данных. Вопрос, насколько система координат, полученная по определенным исходным данным с помощью определенного способа вычисления, соответствует объективно существующей закономерности и помогает вскрывать влияющие факторы и насколько эти факторы являются искусственными, должен ставиться и решаться в каждом отдельном случае. Безусловно, «объяснительная миссия» факторного анализа может быть выполнена только при определенных условиях, которые не всегда зависят от экспериментатора. Однако с оговоркой можно сказать, что это может быть достигнуто при благоприятных условиях.

Процедура расчетов, применяемых в факторном анализе, сталкивается с рядом проблем (см. рис. 2.6), которые получили особые названия и для решения которых в каждом конкретном случае имеется несколько способов. Каждая последующая проблема не зависит от способа решения предыдущей. Поэтому рассмотрение отдельных этапов факторного анализа приводит к структуре книги, связанной с этими этапами. Вначале обсуждается проблема факторов и приводятся различные способы ее решения (раздел 3). За ней следует проблема общности (раздел 4), хотя в действительности эта проблема предшествует. Так как некоторые способы решения проблемы общностей непонятны без подробного ознакомления с проблемой факторов, пришлось сделать перестановку разделов. Раздел 5 посвящен проблеме вращения. При этом в основу положен принцип получения простой структуры. Затем обсуждаются методы оценок значений факторов (раздел 6). Возможность применения факторного анализа и выбор метода в каждом конкретном случае решаются самим исследователем. Отдельные примеры таких исследований кратко описаны в разделе 7. В последнем разделе затрагиваются некоторые частные проблемы факторного анализа. Книга заканчивается замечаниями о возможностях, условиях и границах применения факторного анализа. В приложении даны несколько таблиц. Список литературы не претендует на полноту, но призван облегчить дальнейшее освоение темы.

● 3. ПРОБЛЕМА ФАКТОРОВ

Проблема факторов уже формулировалась в предыдущем разделе. Она состоит в установлении числа и вида осей координат, необходимых для отображения корреляции m переменных. Имеется несколько путей решения, которые схематично можно разбить на три группы.

1. Многофакторные решения: метод главных факторов и центроидный метод.

2. Методы выделения факторов, исторически возникшие первыми, но мало употребительные в настоящее время.

3. Новые методы решения.

При любых способах решения проблемы факторов вводятся различные ограничения для того, чтобы однозначно определить систему равенств: $\mathbf{R} = \mathbf{AA}' + \mathbf{U}^2$. Каждому методу присущи свои ограничения, введение которых позволяет получать однозначные решения. Результаты, полученные одними методами выделения факторов, могут быть использованы в других методах. Эта возможность будет показана в гл. 3.6.

Важнейшее место среди методов в количественном отношении занимают *многофакторные методы* (термин Тэрстоуна). В настоящее время при проведении анализа в 90% случаев используется центроидный метод или метод главных факторов. Описание многофакторного анализа является главной целью первой части этого раздела. Поэтому относительно полно охарактеризованы метод главных факторов и центроидный метод. Для обоих способов необходима предварительная оценка значений общностей, которая будет обсуждаться лишь в разделе 4. В связи с этим общности, т. е. диагональные элементы матрицы $\mathbf{R}_h$, считаем здесь заданными. Оба метода требуют последующего вращения, на котором подробно остановимся в разделе 5. В гл. 3.3 обсуждаются критерии определения числа факторов, подлежащих выделению при обоих методах.

В главе, описывающей методы выделения факторов, исторически возникшие первыми, но мало употребительные в настоящее время, кратко поясняется ряд методов, которые не находятся больше в центре внимания и представляют лишь исторический интерес, однако их знание углубляет понимание проблемы факторов. Наконец, упоминаются новые методы решения, основанные на статистических концепциях. Речь пойдет об оценке факторных нагрузок методом максимального правдоподобия (*maximum likelihood*) Лоули и о так называемом каноническом факторном анализе Рао и альфа-методе Кайзера.

3.1. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

Описание метода главных компонент «*principal components*» было опубликовано Г. Хотеллингом [144; *1*] в 1933 г. Но идея была высказана Пирсоном еще в 1905 г. без ее алгебраического обоснования. Подробное описание метода главных компонент имеется у Андерсона [5; *4*], Хармана [117], Кендэла [172; *1*], Вульстена [325] и других авторов. Метод можно применять при различных исходных матрицах. Если отправной точкой является матрица **R** с единицами на главной диагонали, то говорят о компонентном анализе (см. с. 99), чья модель отлична от модели классического факторного анализа и приводит к дескриптивным факторам. Если в матрице **R** используют оценки общностей, то получают модель факторного анализа. Чтобы избежать путаницы в терминологии, условимся далее говорить о *методе* главных компонент и *методе* главных факторов, если речь идет лишь о способе расчета без подробного указания исходной матрицы. Под *компонентным анализом* будем понимать определение главных компонент корреляционной матрицы, т. е. в этом случае исходной является матрица **R** с единицами на главной диагонали. Под *анализом главных факторов* подразумевается приложение метода главных компонент к редуцированной корреляционной матрице после оценки общностей.

Определение главных компонент с помощью настольных вычислительных средств требует значительной затраты времени. Это было причиной того, что лишь после внедрения в 50-е годы ЭВМ стали проводиться такие анализы в широких масштабах. Если в распоряжении исследователя имеется ЭВМ, то рациональнее проводить анализ с помощью метода главных факторов. При работе с вычислительными клавишными машинами (ВКМ) рекомендуется *центроидный метод*, разработанный Тэрстоуном [286; *6*]. Центроидный метод является упрощенным аппроксимационным вариантом метода главных факторов с меньшим объемом вычислительных работ, что достигается за счет сокращения процедуры вычисления. Но центроидный метод дает всего лишь приближенные результаты. По численному решению уравнений с помощью метода главных факторов имеется обширная литература. Проблема сводится к классической задаче нахождения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы. Многочисленные способы решения этой задачи описаны, например, у Цурмюля [329] и Уилкинсона [311].

3.1.1. Геометрическая интерпретация

Если измеряются три нормально распределенных параметра у n индивидуумов, то получится ситуация, изображенная на рис. 3.1, где n точек сосредоточены в трехмерном пространстве с тремя осями переменными X, Y, Z в облаке вокруг общего центра тяжести. Это облако точек наблюдений в общем случае имеет овальную форму и называется *эллипсоидом*. В частном случае, когда во всех трех направлениях дисперсия одинакова по величине, получают шар. На рис. 3.1 изображено овальное тело с тремя секущими плоскостями (различно заштрихованными), проходящими через центр тяжести. Оси координат исходных переменных X, Y, Z являются более или менее произвольными. Систему координат X, Y, Z можно было бы сместить вдоль одной или нескольких осей, не изменяя облако точек как таковое. Также можно было бы систему координат вращать как угодно вокруг начала координат в любом из трех измерений и в известной степени удерживать облако точек в неизменном состоянии. Итак, вполне очевидно, что имеется бесконечно много систем координат, в которых можно изобразить наблюдаемые точки. Но одна из них представляет особый интерес. Это система координат главных осей. Самый длинный диаметр овального тела является первой главной осью λ_1. Второй главной осью λ_2 является самый длинный диаметр в плоскости, ортогональной

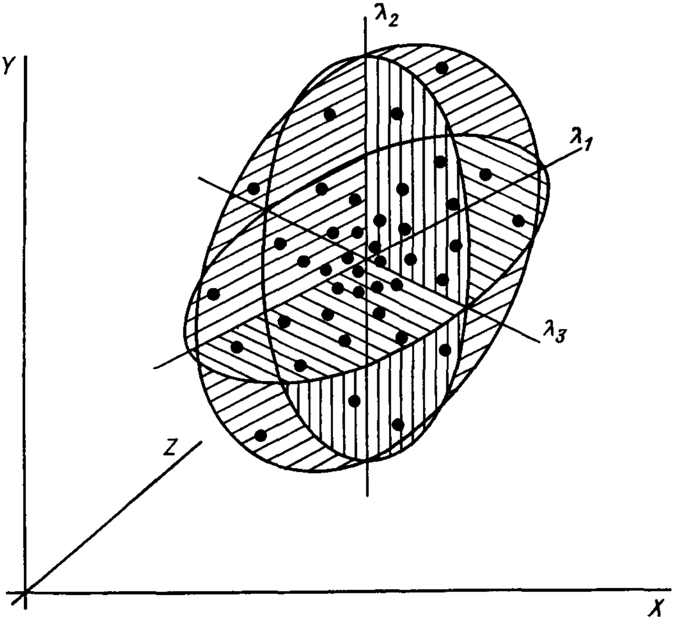


Рис. 3.1. Трехмерное распределение точек с соответствующими главными осями. XYZ — первоначальная система координат; $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ — система главных осей. Овальное тело (эллипсоид) пересечено тремя взаимоперпендикулярными плоскостями, проходящими через его центр тяжести

к первой главной оси и проходящей через центр тяжести системы (заштрихована вертикально). Третья главная ось λ_3 в трехмерном случае перпендикулярна к первой и второй главным осям и проходит через центр тяжести.

В геометрическом плане метод главных факторов состоит в том, что вначале определяют самую длинную ось эллипсоида. Она является первой главной осью, которая должна пройти через центр тяжести, на рис. 3.1 эта ось обозначена буквой λ_1. Затем устанавливают подпространство — в данном случае плоскость, — которое перпендикулярно к первой главной оси и которое проходит через центр тяжести (на рис. 3.1 заштриховано вертикально). В этом подпространстве находится следующая по величине ось скопления точек и т. д., пока не будут определены последовательно все главные оси. Длины главных осей пропорциональны величинам дисперсий в направлении соответствующей главной оси. С помощью метода главных факторов устанавливаются направления этих осей относительно первоначальной системы координат. Главные оси соответствуют факторам, которые должны быть лишь надлежащим образом пронормированы, чтобы выполнялось требование единичной дисперсии факторов.

На рис. 3.2 наглядно изображена ситуация после выделения первой главной оси. Все точки рис. 3.1 спроецированы на плоскость, проходящую через центр тяжести, перпендикулярно к первой главной оси, причем проецирование производится параллельно λ_1, как это

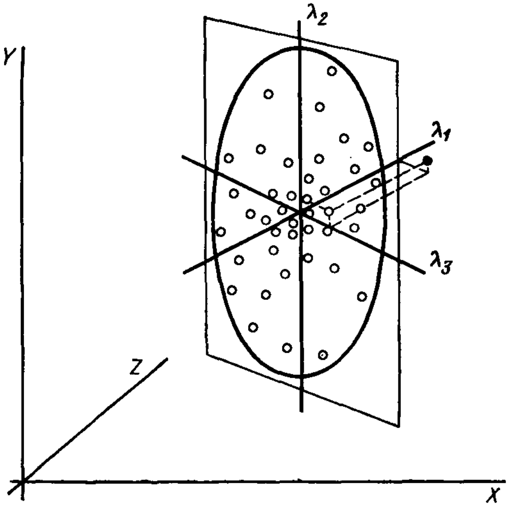


Рис. 3.2. Ситуация после установления положения первой главной оси. Определение второй и третьей главных осей λ_2 и λ_3. Кружочками обозначены проекции точек, изображенных на рис. 3.1, на плоскость $\lambda_2\lambda_3$. Показано проецирование одной из таких точек

показано для одной точки. По координатам точек на этой плоскости ищут вторую главную ось. Направление оси λ_2 устанавливается опять таким образом, чтобы максимум дисперсии лежал в направлении этой оси, т. е. определяется самая длинная ось эллипса на этой плоскости. Третья главная ось λ_3 проходит через центр тяжести и перпендикулярна к λ_1 и λ_2.

Все n точек, изображенные на рис. 3.1, можно спроецировать параллельно плоскости $\lambda_2\lambda_3$ на первую главную ось, тогда распределение точек на этой прямой укажет максимум дисперсии в одном измерении. Точно таким же образом можно спроецировать точки на любую другую главную ось или на так называемые *гиперплоскости*, или *подпространства*, которые натянуты на них. Плоскость, натянутая на первые две главные оси λ_1 и λ_2, на рис. 3.1 расположена так, что проекция всех точек на нее дает максимум дисперсии в двух измерениях. Изображение этой плоскости представлено еще раз на рис. 3.3. Так как полная дисперсия известна, то можно поэтапно установить, какая ее доля (в процентах) содержится в гиперплоскости r главных осей.

На рис. 3.4 демонстрируется случай, когда для описания всех точек достаточно двух главных осей. Хотя точки соответствуют результатам наблюдений по трем переменным, эти три переменные X, Y и Z почти полностью зависят от двух величин. Все точки находятся на одной плоскости или вблизи нее, причем эта плоскость наклонена под некоторым углом к первоначальной системе координат. Если вместо измеренных трех переменных выбрать для изображения точек только две, а именно использовать две главные оси λ_1 и λ_2, то при небольшом рассеянии точек вне плоскости, натянутой на эти оси, теряется незначи-

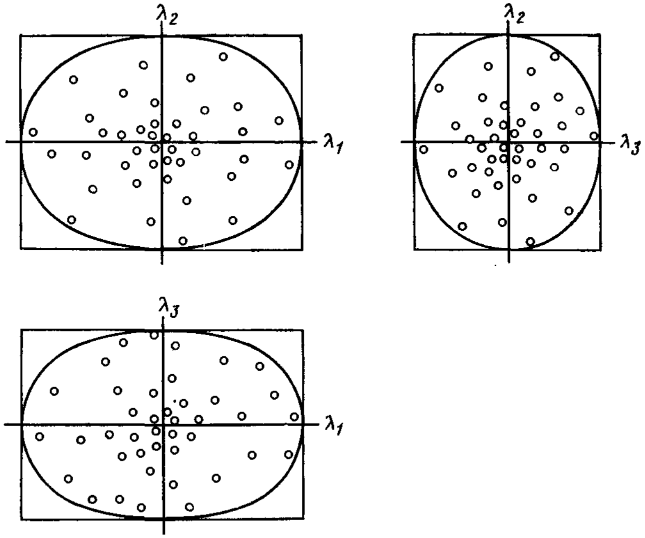


Рис. 3.3. Проекции точек, изображенных на рис. 3.1, на трех плоскостях, проходящих через главные оси λ_1, λ_2 и λ_3.

тельная часть информации. Изображенная в пространстве на рис. 3.4 плоскость, натянутая на главные оси, на рис. 3.5 представлена в плане. Дисперсия в направлении λ_3 мала. Если бы все точки лежали на одной плоскости, то потребность в третьей главной оси λ_3 отпала бы совсем, и без потери какой-либо информации можно было бы точки изображать не в системе координат XYZ, а в системе $\lambda_1\lambda_2$.

Переход от системы координат XYZ к системе $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ на рис. 3.1—3.5 соответствует геометрическому решению задачи выделения факторов, осуществляемому с помощью метода главных факторов. Этот переход от одной системы координат к другой без потери информации на практике большей частью возможен лишь тогда, когда определяются все главные компоненты, т. е. для m переменных определяют m главных компонент. При благоприятных обстоятельствах, а на практике это встречается довольно часто, довольствуются меньшим числом главных осей, но достаточным, чтобы воспроизвести большую часть дисперсии, как это схематично изображено на рис. 3.4 и 3.5. При применении метода главных факторов исходят бо́льшей частью не из тестового пространства, к которому здесь прибегают ради наглядности, а из корреляционной матрицы. Как будет далее показано, каждой главной оси соответствует собственный вектор α и собственное

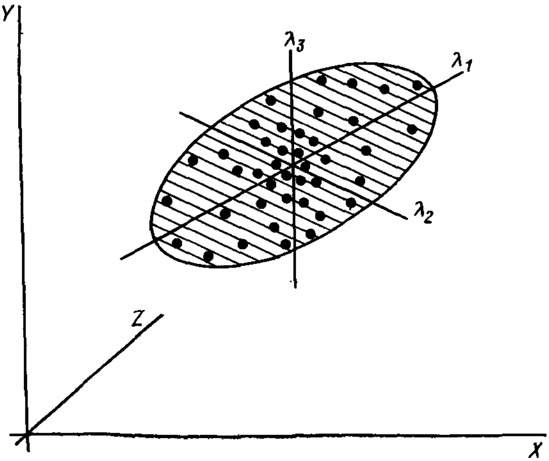


Рис. 3.4. Распределение результатов наблюдений с небольшим рассеянием вдоль оси λ_3. Все точки, которые были определены в системе координат *XYZ*, лежат практически на плоскости $\lambda_1\lambda_2$ и имеют лишь незначительное рассеяние в направлении λ_3

значение λ корреляциоиной матрицы. Собствениое значение λ имеет порядок величины дисперсии, корень из него соответствует поэтому длинам главных осей на рис. 3.1—3.5.

Чтобы добиться наглядности на этих рисунках, вопрос о знаке корня не затрагивался. Для обозначения главных осей использовался

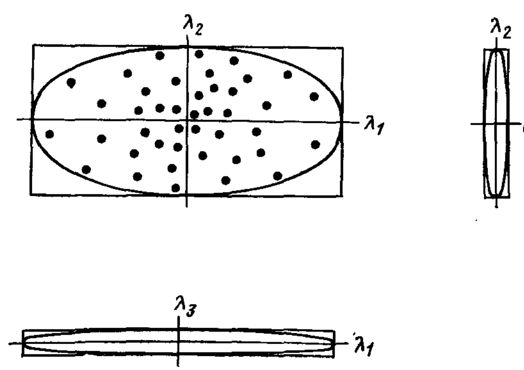


Рис. 3.5. Три проекции овального тела, изображенного на рис. 3.4

лишь символ λ. Вопрос, когда следует прекратить дальнейшее выделение факторов, обсуждается в гл. 3.3. Подходящим критерием для этого являются относительные величины длин главных осей. Например, из рис. 3.5 видно, что λ_3 можно было бы пренебречь; в ситуации, изображенной на рис. 3.3, λ_3 следует оставить.

3.1.2. Алгебраическое решение

В процессе создания метода главных факторов сформировались три различных подхода к выделению главных осей. Пирсон исходил из того, что при отыскании плоскостей или гиперплоскостей, проходящих через центр тяжести облака точек в n-мерном пространстве, обеспечивалась минимальная сумма квадратов расстояний всех точек от этих плоскостей. При втором подходе, использованном Андерсоном [5; *4*], исходят из геометрических представлений. Этот подход был описан в 3.1.1. И наконец, третий подход, самый распространенный, которым мы дальше и займемся, исходит из максимизации дисперсии в одном направлении при введении дополнительных условий. Более подробное изложение его приведено в книгах Андерсона [5; *4*], Хармана [117], Хотеллинга [144; *1*] и Вульстена [325].

Описание проблемы собственных значений имеется у Цурмюля [329].

Классическая модель факторного анализа имеет вид:

$$\mathbf{R} - \mathbf{U}^2 = \mathbf{ACA}'. \tag{3.1}$$

Если принять $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, то факторы должны быть ортогональны. Считаем известной $\mathbf{U}^2$ и для вывода приравниваем $\mathbf{U}^2$ нулевой матрице. Однако метод пригоден также для оценки характерностей в матрице $\mathbf{U}^2$. Таким образом, равенство (3.1) упрощается и принимает вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{AA}'. \tag{3.2}$$

Система уравнений, соответствующая (3.2), имеет однозначное решение с вводом дополнительных условий, а именно: сумма квадратов нагрузок первого фактора должна составлять максимум от полной дисперсии; сумма квадратов нагрузок второго фактора должна составлять максимум оставшейся дисперсии и т. д., т. е. максимизирует функцию

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2 = \max \tag{3.3}$$

при $\frac{m(m-1)}{2}$ независимых друг от друга условиях

$$r_{ik} = a_{i1} \cdot a_{k1} \ (i, k = 1, \ldots, m, \ i < k).$$

Для максимизирования функции, связанной некоторым числом дополнительных условий, пользуются методом множителей Лагранжа. В результате приходят к системе m однородных уравнений с m неизвестными a_{i1}:

$$\begin{array}{lllll}
(1-\lambda)\, a_{11} & + r_{12}\, a_{21} & + \ldots + & r_{1m}\, a_{m1} & = 0 \\
r_{21}\, a_{11} & + (1-\lambda)\, a_{21} & + \ldots + & r_{2m}\, a_{m1} & = 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r_{m1}\, a_{11} & + r_{m2}\, a_{21} & + \ldots + & (1-\lambda)\, a_{m1} & = 0.
\end{array} \tag{3.4}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю детерминанта матрицы коэффициентов этих уравнений.

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & (1-\lambda) & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.5)$$

Детерминант (определитель), записанный в виде (3.5), называют *характеристическим*, а в развернутом виде — *характеристическим уравнением*. Все m корней этого уравнения действительны, т. е. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$ являются возможными, иногда совпадающими решениями. Если в (3.4) подставить из (3.5) найденное значение λ_1, то получим вектор решеиия $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1})$, который удовлетворяет указанным дополнительным условиям и имеет максимум при $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1}^2$. То же самое имеет место для λ_2, т. е. получаем в качестве решения вектор $(\alpha_{22}, \dots, \alpha_{m2})$, причем $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2}^2$ является максимумом в отношении оставшейся дисперсии и т. д.

Система равенств (3.4) составляет так называемую проблему собственных значений действительной симметрической матрицы. В общем она записывается в следующем виде:

$$\mathbf{R}\alpha_l = \lambda_l \alpha_l \quad \text{или} \quad (\mathbf{R} - \lambda_l \mathbf{I})\, \alpha_l = \mathbf{0}, \qquad (3.6)$$

где λ_l — собственные значения, они соответствуют собственным векторам α_l матрицы $\mathbf{R}$. По собственным значениям и собственным векторам имеется обширная литература, которая указана в библиографии. Тот факт, что максимизация функции (3.3) приводит к классической проблеме собственных значений, облегчает численное решение системы уравнений (3.2), так как проблема собственных значений достаточно разработана.

Факторы пропорциональны собственным векторам матрицы $\mathbf{R}$. Путем нормирования получим искомые значения a_{il} матрицы $\mathbf{A}$ по компонентам собственных векторов матрицы $\mathbf{R}$:

$$a_{il} = \alpha_{il} \cdot \sqrt{\lambda_l} / \sqrt{\alpha_{1l}^2 + \alpha_{2l}^2 + \dots + \alpha_{ml}^2}. \qquad (3.7)$$

3.1.3. Процедура вычисления

Компонентный анализ можно провести с любой корреляционной матрицей с единицами на главной диагонали. Вычисление собственных значений и собственных векторов на КВМ довольно затруднительно и его имеет смысл проводить только в дидактических целях или при небольшой корреляционной матрице. Вообще для вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{R}$ привлекается ЭВМ. Разработан ряд машинных способов решения, отличных от вычислительной процедуры на КВМ.

Вычисление главных факторов на КВМ. Далее изложен итерационный метод определения собственных значений и собственных векторов корреляционной матрицы и приводится способ вычисления факторных нагрузок в такой же форме, как указано у Хармана [117]. Как и во многих подобных случаях, процедура вычисления не связана непосредственно с определениями, которые были приведены выше для собственных значений и векторов. Но можно показать, что результаты согласуются с этими определениями. Метод особенно пригоден при использовании КВМ, так как факторы вычисляются последовательно друг за другом и число факторов ограничивается требованиями соответствующей проблемы.

Итеративный процесс начинается с выбора вектора $\alpha^{(1)}$, элементы которого являются первыми приближениями значений элементов собственных векторов. Вектор $\alpha^{(1)}$ перемножается с матрицей $\mathbf{R}$ по формуле (3.8). Разделив элементы результирующего вектора $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ на наибольший по величине элемент этого же вектора (формула (3.9)), получаем новый вектор $\alpha^{(2)}$, с которым опять повторяется процедура (3.8). Верхние индексы в скобках означают здесь шаг итерации.

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \mathbf{R} \cdot \alpha^{(1)}, \tag{3.8}$$

$$\alpha^{(2)} = \boldsymbol{\beta}^{(1)}/\max\,(\beta_i^{(1)}), \tag{3.9}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)}/\max\,(\beta_i^{(k)}). \tag{3.10}$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не добиваются сходимости к первому собственному значению $\mathbf{R}$ ($\lambda_1 = \max\,(\beta_i^{(k)})$) и соответствующему первому собственному вектору $\alpha^{(k)}$. Формула (3.10) является общей формулой для k шагов. Итеративный процесс заканчивается, когда $\alpha^{(k)}$ и $\alpha^{(k-1)}$ с достаточной точностью совпадают друг с другом. В качестве элементов вектора $\alpha^{(1)}$ используются величины, пропорциональные суммам элементов строк матрицы $\mathbf{R}$. Исходя из полученных значений элементов собственного вектора и собственного значения по формуле (3.7) вычисляются нагрузки первого фактора $\mathbf{a}_1$, которые затем служат для определения $\mathbf{R}^+ = \mathbf{aa}'$. Матрица $\mathbf{R}^+$ является матрицей коэффициентов корреляции, вычисленных с учетом только первого фактора. Остаточная матрица в общем виде определяется так: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{R}^+$. Если принимают решение вычислять нагрузки второго фактора, то повторяется аналогичная процедура с $\mathbf{R}_1$ до получения второго собственного значения и второго собственного вектора. Процесс выделения факторов можно продолжить и дальше.

Если в качестве множителя для итерации в (3.8) вместо $\mathbf{R}$ брать $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ или $\mathbf{R}^8$, то скорость сходимости повышается соответственно в два, четыре или восемь раз, что равносильно сокращению числа итераций в такое же число раз. При этом $\mathbf{R}^4$ означает четырехкратное перемножение матрицы, а именно $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$, а не возведение в четвертую степень ее элементов. Это трудоемкая работа. Поэтому при возведении в соответствующую степень остаточной матрицы пользуются соотношением (3.11), позволяющим избежать последовательного умножения этой матрицы.

$$\mathbf{R}_1^l = \mathbf{R}^l - \lambda_1^{l-1} \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1'. \qquad (3.11)$$

Далее в примере показан порядок вычислений при работе с КВМ. Время, необходимое для расчета этого примера, составляет примерно одну рабочую неделю.

В табл. 3.1 приведена корреляционная матрица для 6 переменных. Общности уже известны. Матрица заимствована из табл. 2.3. К ней будет применяться описанная процедура вычисления для выделения главных факторов[1]. Вычислив суммы элементов строк матрицы $\mathbf{R}$ и разделив их на максимальную из этих сумм (в данном случае она равна сумме элементов первой строки: 2,5155), получим элементы первого вектора $\alpha^{(1)}$. Затем мы не сразу приступаем к выполнению операции (3.8). Сначала для ускорения процесса сходимости умножаем матрицу $\mathbf{R}$ саму на себя, что отражено в табл. 3.2. В силу симметрии матрицы $\mathbf{R}^2$ приходится вычислять только диагональные элементы и элементы выше или ниже главной диагонали. Далее опять образуем суммы из элементов строк $\mathbf{s}^{(2)}$. Для проверки правильности вычислений заполняется столбец $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}^{(1)}$, элементы которого с точностью до ошибок округления должны равняться соответствующим суммам $\mathbf{s}^{(2)}$. Таким образом, элементы контрольного столбца $\mathbf{p}^{(2)}$ в табл. 3.2 определяются по данным табл. 3.1 путем перемножения $\mathbf{R}$ с $\mathbf{s}^{(1)}$. В нашем примере $\mathbf{s}^{(2)}$ и $\mathbf{p}^{(2)}$ хорошо согласуются друг с другом, следовательно, квадрат корреляционной матрицы вычислен верно.

Таблица 3.1

Исходная редуцированная корреляционная матрица

	R						$s^{(1)}$	$\alpha^{(1)}$
	1	2	3	4	5	6		
1	(0,8200)	0,7250	0,6310	0,1250	0,1600	0,0545	*2,5155*	1,0000
2	0,7250	(0,6425)	0,5650	0,0080	0,1150	0,0650	2,1205	0,8429
3	0,6310	0,5650	(0,5000)	0,1150	0,1400	0,0850	2,0360	0,8093
4	0,1250	0,0080	0,1150	(0,6425)	0,5650	0,4025	1,8580	0,7386
5	0,1600	0,1150	0,1400	0,5650	(0,5000)	0,3550	1,8350	0,7294
6	0,0545	0,0650	0,0850	0,4025	0,3550	(0,2525)	1,2145	0,4828

В качестве следующего приближения берется вектор $\alpha^{(2)}$, элементы которого получаются делением элементов $\mathbf{p}^{(2)}$ на наибольший из них (следующий столбец табл. 3.2). И наконец, в последнем столбце вы-

[1] При переносе корреляционной матрицы из табл. 2.3 в табл. 3.1 вкрались незначительные ошибки: вместо $r_{61} = 0,0950$ записана величина 0,0545, а вместо $r_{42} = 0,0800$ — величина 0,0080. На ход решения эти ошибки не оказывают влияния.

Таблица 3.2

Квадрат корреляционной матрицы и первый цикл итерации

	$R^2=R\cdot R$						$s^{(2)}$	$p^{(2)}$	$\alpha^{(2)}$	$d^{(1)}=\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}\|$
	1	2	3	4	5	6				
1	1,6404	1,4398	1,2840	0,3735	0,4729	0,2663	5,4769	*5,4768*	1,0000	0,0000
2	1,4398	1,2752	1,1255	0,2570	0,3541	0,1898	4,6414	4,6413	0,8474	0,0045
3	1,2840	1,1255	1,0074	0,3281	0,4011	0,2311	4,3772	4,3772	0,7992	0,0101
4	0,3735	0,2570	0,3281	0,9230	0,8254	0,5779	3,2849	3,2849	0,5997	0,1389
5	0,4729	0,3541	0,4011	0,8254	0,7537	0,5226	3,3298	3,3298	0,6079	0,1215
6	0,2663	0,1898	0,2311	0,5779	0,5226	0,3662	2,1539	2,1539	0,3932	0,0896

числяется абсолютная величина разности $d^{(1)} = |\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}|$. Различие между двумя векторами еще относительно велико. Если бы разница между приближениями значений элементов собственного вектора не превышала 0,005, дальнейшие вычисления можно было бы прекратить. Но в данном случае требуется следующий цикл итерации.

Этот новый цикл проводится не с R^2, а с $R^2 \cdot R^2 = R^4$. В принципе повторяется процедура вычислений, приведенных в табл. 3.1 и 3.2. Однако лучше начинать с вычисления контрольного столбца. Вектор $p^{(3)}$ в табл. 3.3 определяется по данным табл. 3.2 как $R^2 \cdot p^{(2)}$. Разделив значения элементов вектора $p^{(3)}$ на наибольшее из них, получим вектор следующего приближения $\alpha^{(3)}$. Разница $d^{(2)} = |\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}|$ вычислена в последнем столбце табл. 3.3. Разница все ещё велика, следовательно, требуется следующий цикл. Если бы не это обстоятельство, можно было обойтись без определения R^4. Итак, по табл.3.2 вычисляем $R^2 \cdot R^2$ и заносим R^4 в табл. 3.3. Получив первый столбец и строку матрицы R^4, вычисляем сумму элементов первой строки. Если эта сумма не согласуется с первым элементом вектора $p^{(3)}$, то это свидетельствует об арифметической ошибке и нужно ее устранить. Затем приступают к вычислению второго столбца и строки матрицы R^4. При этом нужно вычислить только пять новых элементов. Если и обнаруживается ошибка в вычислении (при сравнении с элементом $p^{(3)}$), то она может быть допущена не более, чем в пяти скалярных произведениях. Так, последовательно, строка за строкой, определяется и одновременно проверяется вся матрица R^4, причем возможности допущения ошибок все больше и больше сужаются и тем самым экономится время на поиск этих ошибок. Ни в коем случае нельзя производить дальнейшие вычисления, если разница в $s^{(k)}$ и $p^{(k)}$ превосходит ошибку округления.

Совершенно аналогично по табл. 3.3 вычисляем табл. 3.4. Здесь разницы $d^{(3)}$ уже довольно малы. Контрольный столбец в табл. 3.5 получаем как $R^8 \cdot p^{(4)} = p^{(5)}$. Все элементы вектора $d^{(4)}$ меньше 0,01, так что на этом мы прекратим вычисления. Если бы требовалась бóльшая точность, можно было бы выполнить еще один цикл, определив для этого R^{16}.

Вычисления нагрузок первого фактора приведены в табл. 3.6, в первом столбце которого записан первый собственный вектор $\alpha_1 = \alpha^{(5)}$. Сумма квадратов элементов этого вектора $\Sigma\alpha_{i1}^2 = 2{,}8012$. Далее по формуле (3.8) определяем вектор $\beta^{(5)} = R \cdot \alpha^{(5)}$, наибольший элемент которого является первым собственным значением $\lambda_1 = 2{,}0809$. В последнем столбце таблицы по формуле (3.7) вычисляются факторные нагрузки. Целесообразнее всего это производить, умножая каждое значение первого столбца на $\sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\Sigma\alpha_{i1}^2} = 0{,}8619$. Матрица воспроизведенных корреляций $R^+ = a_1 \cdot a_1'$ приведена в табл. 3.7, остаточная матрица $R_1 = R_h - R^+$ — в табл. 3.8.

Таблица 3.3

Четвертая степень корреляционной матрицы и второй цикл итерации

	$R^4 = R^2 \cdot R^2$						$s^{(3)}$	$p^{(3)}$	$\alpha^{(3)}$	$d^{(2)} = \lvert\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}\rvert$
	1	2	3	4	5	6				
1	6,8466	5,9570	5,3940	2,2930	2,6045	1,5673	24,6624	*24,6625*	1,0000	0,0000
2	5,9570	5,1934	4,6880	1,8739	2,1621	1,2886	21,1630	21,1630	0,8581	0,0107
3	5,3940	4,6880	4,2522	1,8668	2,1037	1,2722	19,5769	19,5770	0,7937	0,0055
4	2,2930	1,8739	1,8668	2,1804	2,0852	1,4004	11,6997	11,6997	0,4743	0,1254
5	2,6045	2,1621	2,1037	2,0852	2,0324	1,3481	12,3360	12,3359	0,5001	0,1078
6	1,5673	1,2886	1,2722	1,4004	1,3481	0,9015	7,7781	7,7783	0,3153	0,0779

Таблица 3.4

Восьмая степень корреляционной матрицы и третий цикл итерации

	$R^8 = R^4 \cdot R^4$						$s^{(4)}$	$p^{(4)}$	$\alpha^{(4)}$	$d^{(3)} = \lvert\alpha^{(3)} - \alpha^{(4)}\rvert$
	1	2	3	4	5	6				
1	125,9547	108,9570	99,5469	99,5570	54,2466	33,4043	471,6665	*471,6665*	1,0000	0,0000
2	108,9570	94,2813	86,0990	42,5417	46,6447	28,6933	407,2170	407,2169	0,8633	0,0052
3	99,5469	86,0990	78,6828	39,3299	43,0132	26,5018	373,1736	373,1736	0,7911	0,0026
4	49,5570	42,5417	39,3299	23,3176	24,6233	15,5104	194,8799	194,8799	0,4131	0,0612
5	54,2466	46,6447	43,0132	24,6233	26,1797	16,4197	211,1272	211,1272	0,4476	0,0525
6	33,4043	28,6933	26,5018	15,5104	16,4197	10,3266	130,8561	130,8561	0,2774	0,0379

Таблица 3.5

Последний цикл итерации

	$R^{16}=R^{8}\cdot R^{8}$						$s^{(5)}$	$p^{(5)}$	$\alpha^{(5)}$	$d^{(4)}=\lvert\alpha^{(4)}-\alpha^{(5)}\rvert$
	1	2	3	4	5	6				
1								*166407,7826*	1,0000	0,0000
2								143807,3693	0,8641	0,0008
3								131590,0438	0,7907	0,0004
4								67147,3710	0,4035	0,0096
5								73106,6604	0,4393	0,0083
6								45170,4700	0,2714	0,0060

Таблица 3.6

Вычисление нагрузок первого фактора

	$\alpha_1=\alpha^{(5)}$	$\beta^{(5)}=R\cdot\alpha^{(5)}$	$a_1=\alpha_1\cdot\dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\Sigma\alpha_{i1}^2}}$
1	1,0000	2,0809	0,8619
2	0,8641	1,7983	0,7448
3	0,7907	1,6455	0,6815
4	0,4035	0,8395	0,3477
5	0,4393	0,9140	0,3785
6	0,2714	0,5648	0,2339

$$\sum\alpha_{i1}^2=2,8012 \quad \lambda_1=2,0809 \quad \sum a_{i1}^2=2,0809=\lambda_1$$

$$\sqrt{\lambda_1}\Big/\sqrt{\sum\alpha_{i1}^2}=0,8619$$

Таблица 3.7

Матрица воспроизведенных корреляций

	R^{+}					
	1	2	3	4	5	6
1	0,7429	0,6419	0,5874	0,2997	0,3262	0,2016
2	0,6419	0,5547	0,5076	0,2590	0,2819	0,1742
3	0,5874	0,5076	0,4644	0,2370	0,2579	0,1594
4	0,2997	0,2590	0,2370	0,1209	0,1316	0,0813
5	0,3262	0,2819	0,2579	0,1316	0,1433	0,0885
6	0,2016	0,1742	0,1594	0,0813	0,0885	0,0547

Таблица 3.8

Матрица первых остаточных коэффициентов корреляции

	$R_h - R^+ = R_1$						$s_1^{(1)}$	$\alpha_1^{(1)}$
	1	2	3	4	5	6		
1	0,0771	0,0831	0,0436	−0,1747	−0,1662	−0,1471	−0,2842	−0,3901
2	0,0831	0,0878	0,0574	−0,2510	−0,1669	−0,1092	−0,2988	−0,4101
3	0,0436	0,0574	0,0356	−0,1220	−0,1179	−0,0744	−1,7777	−0,2439
4	−0,1747	−0,2510	−0,1220	0,5216	0,4334	0,3212	*0,7285*	1,0000
5	−0,1662	−0,1669	−0,1179	0,4334	0,3567	0,2665	0,6056	0,8312
6	−0,1471	−0,1092	−0,0744	0,3213	0,2665	0,1978	0,4548	0,6242

Вычисление второго собственного значения и нагрузок второго фактора исходя из остаточной матрицы менее объемно. Можно воспользоваться формулой (3.10), как это показано в схеме вычислений у Хармана [117]. Ради простоты вычисления здесь производятся по предыдущей схеме, хотя объем работы потребуется больший. Но мы исходим из того, что пример должен иллюстрировать принцип. При проведении анализа главных факторов практически не пользуются КВМ и в данном случае воспроизведение полной процедуры вычислений преследует единственную цель — лучшее усвоение материала; ради этого мы позволяем себе пойти по пути увеличения объема работы.

Табл. 3.9 с определением $R_1 \cdot R_1 = R_1^2$ построена так же, как предыдущие таблицы. Нижний индекс векторов $s_1^{(2)}$, $p_1^{(2)}$ и $\alpha_1^{(2)}$ указывает на то, что они относятся к остаточной матрице первого фактора. В остальном процедура вычислений аналогична выделению первого фактора. Разницы между приближениями двух векторов, приведенные в последнем столбце, малы.

Результаты вычислений элементов вектора $p_1^{(3)} = R_1^2 \cdot s_1^{(2)}$ заносятся в табл. 3.10. Вектор $\alpha_1^{(3)}$ определяется так же, как было показано выше. Различие между $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_1^{(3)}$ так мало, что нецелесообразно повторять цикл. Поэтому не имеет смысла определять R_1^4 в табл. 3.10 и предусмотренная для этого часть таблицы остается не заполненной. Со вторым собственным вектором $\alpha_1^{(3)} = \alpha_2$ входим в табл. 3.11, совершенно аналогичную табл. 3.6, для определения факторных нагрузок. Опять определяем сумму квадратов элементов первого столбца. Наибольший элемент вектора $\beta_1^{(3)}$ является вторым собственным значением $\lambda_2 = 1{,}2763$. В третьем столбце вычисляются нагрузки второго фактора. И наконец, в табл. 3.12 приведена матрица вторых остаточных коэффициентов корреляции R_2 после выделения второго фактора, которая определяется как разность $R_1 - a_2 \cdot a_2'$.

По элементам остаточной матрицы видно, что не имеет смысла производить выделение других факторов. Если бы в ней были еще достаточно большие значения остаточных коэффициентов корреляции, то аналогичным путем определили бы следующий фактор. Ограничимся этим примером с двумя выделенными факторами, выбранным для иллюстрации процедуры вычислений на КВМ по методу главных факторов.

Таблица 3.9

Квадрат матрицы остатков и первый цикл итерации

	$R_1 \cdot R_1 = R_1^2$						$s_i^{(2)}$	$p_i^{(2)}$	$\alpha_i^{(2)}$	$d_i^{(1)} = \|\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}\|$
	1	2	3	4	5	6				
1	0,0945	0,1039	0,0615	−0,2500	−0,2060	−0,1532	−0,3493	−0,3493	−0,3736	0,0165
2	0,1039	0,1207	0,0691	−0,2819	−0,2327	−0,1728	−0,3937	−0,3936	−0,4210	0,0109
3	0,0615	0,0691	0,0408	−0,1650	−0,1358	−0,1007	−0,2301	−0,2300	−0,2460	0,0021
4	−0,2500	−0,2819	−0,1650	0,6715	0,5516	0,4088	+0,9350	*+0,9349*	+1,0000	0,0000
5	−0,2060	−0,2327	−0,1358	0,5516	0,4555	0,3384	+0,7710	+0,7710	+0,8246	0,0066
6	−0,1532	−0,1728	−0,1007	0,4088	0,3384	0,2524	+0,5729	+0,5730	+0,6128	0,0114

Таблица 3.10

Последний цикл итерации

	$R_1^2 \cdot R_1^2 = R_1^4$						$s_i^{(3)}$	$p_i^{(3)}$	$\alpha_i^{(3)}$	$d_i^{(2)} = \|\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(3)}\|$
	1	2	3	4	5	6				
1								−0,5684	−0,3730	0,0006
2								−0,6417	−0,4212	0,0002
3								−0,3747	−0,2459	0,0001
4								*+1,5235*	1,0000	0,0000
5								+1,2557	0,8242	0,0004
6								+0,9324	0,6120	0,0008

Таблица 3.11

Вычисление нагрузок второго фактора

	$\alpha_i^{(3)} = \alpha_2$	$\beta_i^{(3)} = R_1 \cdot \alpha_i^{(3)}$	$a_2 = \alpha_2 \cdot \dfrac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\sum \alpha_{i2}^2}}$
1	−0,3730	−0,4762	−0,2703
2	−0,4212	−0,5375	−0,3051
3	−0,2459	−0,3139	−0,1782
4	1,0000	*1,2763*	0,7246
5	0,8242	1,0518	0,5971
6	0,6120	0,7811	0,4435
	$\sum \alpha_{i2}^2 = 2,4307$	$\lambda_2 = 1,2763$	$\sum a_{i2}^2 = 1,2763 = \lambda_2$
$\sqrt{\lambda_2} / \sqrt{\sum \alpha_{i2}^2} = 0,7246$			

Таблица 3.12

Матрица вторых остаточных коэффициентов корреляции R_2

	1	2	3	4	5	6
1	0,0040					
2	0,0006	—0,0053				
3	—0,0046	0,0036	0,0038			
4	0,0212	—0,0299	0,0071	—0,0034		
5	—0,0048	0,0153	—0,0115	0,0007	0,0002	
6	—0,0272	0,0261	0,0046	—0,0002	0,0017	0,0011

Вычисление главных факторов с помощью ЭВМ. Определение собственных значений и собственных векторов очень больших корреляционных матриц с помощью КВМ требует значительных вычислительных работ, и иногда по этой причине анализ становится даже невозможным. С другой стороны, методу главных факторов присуща математическая строгость и элегантность, и он приводит к системе координат, обладающей определенными предпочтительными свойствами. Внедрение в практику ЭВМ привело к новой ситуации в применении метода. Оказалось возможным определять главные компоненты у 150 и более переменных. Это сделало метод главных факторов наиболее распространенным методом анализа, и он почти полностью заменил центроидный метод, употребляемый при ручном счете.

Здесь не будут приводиться указания по программированию метода главных компонент. Большей частью при работе на ЭВМ собственные значения и собственные векторы, в отличие от описанного ручного расчета, получаются одновременно. Имеется много способов их вычислений на ЭВМ. В первую очередь следует назвать метод Якоби и способ диагонализации корреляционной матрицы Хаусхолдера.

Обзор других методов имеется у Цурмюля [329] и Уилкинсона [311], а также Савириса [250], Уайта и Брауна [309]. Для программиста-непрофессионала целесообразнее всего использовать имеющиеся в распоряжении математического обеспечения ЭВМ пакеты прикладных программ статистического анализа, включающие в себя программу вычисления собственных значений и собственных векторов, и создавать свои процедуры ввода и вывода для реализации этих задач. В случае появления каких-либо неожиданностей, следует приспособить указанные процедуры под пакет прикладных программ статистического анализа. Так, прежде всего при работе с матрицами порядка больше 50, нужно обращать внимание на ошибки округления. Использование пакета прикладных программ статистического анализа резко сокращает время решения задач по факторному анализу. Таким пакетом программ уже пользуются во многих вычислительных центрах. Существующее в настоящее время расхождение между различными типами ЭВМ и алгоритмическими языками программирования часто вызывает затруднение при обмене программами. Постоянная эксплуатация стандартных программ по определению собственных значений и собственных векторов, входящих в состав математического обеспечения каждой ЭВМ, ведется во многих заинтересованных учреждениях.

3.1.4. Примеры

Приведем в качестве иллюстрации несколько примеров проведения анализа методом главных факторов, который был осуществлен с помощью ЭВМ. В этих примерах не доведена до конца процедура вычислений факторного анализа и представлен только один этап, а именно выделение факторов. В качестве первого примера возьмем корреляционную матрицу, рассмотренную ранее. Эта матрица воспроизводилась двумя факторами по равенству (2.6). Мы хотим теперь прове-

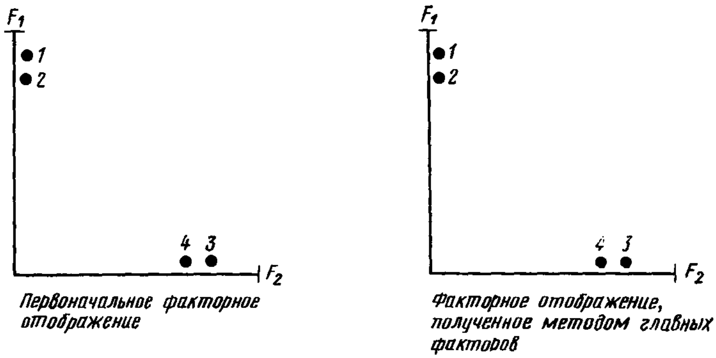


Рис. 3.6. Сравнение результатов вычисления методом главных факторов с первоначальным факторным отображением. Оба изображения практически не отличаются друг от друга

рить, даст ли нам применение метода главных факторов к этой корреляционной матрице те же самые первоначальные факторы, по которым она вычислялась.

Корреляционная матрица с вычисленными главными факторами и первоначальным факторным отображением представлена в табл. 3.13. Имеется небольшая разница между действительными и вычисленными факторными нагрузками. Графическое противопоставление произведено на рис. 3.6. Изображения соответствуют друг другу. Таким образом, применение метода главных факторов дало довольно точное воспроизведение факторов, которые мы первоначально заложили в модель.

Во втором примере рассмотрим корреляционную матрицу для 12 переменных. Речь идет о шести повторных измерениях систолического и диастолического кровяного давления у 90 студентов мужского пола в течение 30 мин. Переменные с нечетными номерами являются измерениями систолического кровяного давления, переменные с четными номерами — измерениями диастолического кровяного давления.

Таблица 3.13

Вычисление главных факторов по равенству (2.6)

	Корреляционная матрица			
	1	2	3	4
1	(0,8125)			
2	0,7225	(0,6425)		
3	0,0085	0,0080	(0,6425)	
4	0,0080	0,0075	0,5625	(0,4925)

	Первоначальное факторное отображение			Вычисленные главные факторы		
	F_1	F_2	h_i^2	$F_1 = \mathbf{a}_1$	$F_2 = \mathbf{a}_2$	h_i^2
1	0,90	0,05	0,8125	0,9005	0,0399	0,8125
2	0,80	0,05	0,6425	0,8008	0,0349	0,6425
3	0,05	0,80	0,6425	0,0449	0,8003	0,6425
4	0,05	0,70	0,4925	0,0399	0,7006	0,4925
Сумма квадратов	1,4550	1,1350	2,5900	1,4558	1,1342	2,5900
Процент от суммарной общности Σh_i^2	56,2%	43,8%	100%	56,20%	43,79%	99,99%

В качестве общностей выбраны наибольшие значения элементов в каждом столбце матрицы **R**. Коэффициенты корреляции и результаты решения по методу главных факторов с точностью до второго знака после запятой приведены в табл. 3.14. Оба фактора F_1 и F_2 в данном примере воспроизводят свыше 99% суммарной общности. Этот факт мы еще обсудим подробнее. Остаточная матрица не содержит больше коэффициентов корреляции, которые значительно отличаются от нуля. В этом читатель может сам убедиться, проделав в качестве упражнения соответствующие вычисления. Следовательно, двух факторов вполне достаточно для воспроизведения данной матрицы.

Оба фактора табл. 3.14 изображены на рис. 3.7. При этом в виде треугольников изображены переменные с четными номерами, т. е. измерения диастолического кровяного давления, а в виде кружков — переменные с нечетными номерами, т. е. измерения систолического давления. Обе группы точек четко отделены друг от друга. Полученное в результате решения положение системы координат относительно точек определяется тем, что максимум дисперсии лежит в направлении F_1 и перпендикулярно к нему второй максимум оставшейся дисперсии — в направлении F_2. Хотя положение системы координат определено однозначно, интерпретировать ее трудно. Для интерпретации было бы значительно проще, если бы координатные оси проходили через скоп-

Таблица 3.14

Вычисления главных факторов при повторных измерениях кровяного давления

	Корреляционная матрица												Главные факторы		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	F_1	F_2	h_i^2
1	(0,92)												0,84	—0,45	0,91
2	0,43	(0,92)											0,79	0,47	0,84
3	0,91	0,44	(0,93)										0,82	—0,46	0,89
4	0,33	0,69	0,32	(0,95)									0,65	0,56	0,74
5	0,89	0,49	0,93	0,34	(0,93)								0,85	—0,42	0,89
6	0,36	0,69	0,33	0,94	0,35	(0,94)							0,66	0,53	0,72
7	0,91	0,47	0,88	0,34	0,90	–0,36	(0,94)						0,87	—0,40	0,92
8	0,45	0,86	0,43	0,66	0,47	0,63	0,52	(0,92)					0,80	0,45	0,84
9	0,81	0,38	0,76	0,25	0,76	0,26	0,79	0,42	(0,82)				0,75	—0,40	0,72
10	0,50	0,92	0,47	0,67	0,52	0,65	0,56	0,92	0,47	(0,93)			0,84	0,42	0,88
11	0,92	0,45	0,89	0,32	0,89	0,34	0,94	0,47	0,82	0,53	(0,94)		0,86	—0,44	0,93
12	0,48	0,84	0,44	0,64	0,49	0,64	0,53	0,92	0,47	0,93	0,51	(0,93)	0,81	0,42	0,84
$\sum a_i^2$													7,62	2,48	10,10
Процент от суммарной общности $\sum h_i^2$													75,45%	24,54%	99,9%

ления точек. В этом случае одна ось координат, или один фактор, четко определялась бы измерениями систолического кровяного давления, а вторая ось — измерениями диастолического. Из этого примера видно, что решение, получаемое методом главных факторов, дает результаты не очень удачные для интерпретации, даже если вся общность воспроизводится только двумя факторами, как это имело место в данном случае.

В следующем примере рассматриваются психологические и физиологические параметры. Первые восемь переменных корреляционной матрицы в табл. 3.15 представляют собой физиологические параметры, значения которых получены в результате многократных измерений во время эксперимента. Речь идет о продолжительности реакции (1), силе реакции (2), частоте миганий глаза (3), изменении частоты миганий после акустического раздражения (4), числе движений зрачка глаза в единицу времени (5), среднем времени пяти ударов сердца (6), частоте дыхания (7) и процента α-волн в электроэнцефалограмме (EEG) (8). Остальные 16 переменных отражают результаты заполнения индивидуальных анкет в двух параллельных формах А и В. Данные анкет обеих форм А и В были усреднены для получения более стабильного результата. Переменные 9 — 24 отражают индивидуальные признаки, такие, как возбудимость, преобладание определенных признаков, эгоизм и т. д., в той же самой последовательности, как они приведены в анкете, примененной Каттеллом и Эбером [40]. Испытуемыми были 90 студентов мужского пола. Диагональными элементами являются наилучшие оценки общностей, полученные путем итерации для пяти факторов (см. 4.2.3).

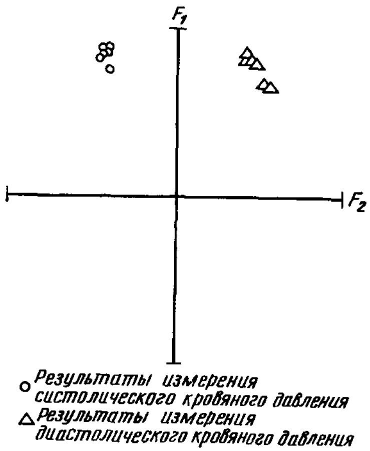


Рис. 3.7. Представление в пространстве главных факторов переменных, полученных в результате повторных измерений кровяного давления

Факторное отображение, полученное методом главных факторов, для 24 параметров приведено в табл. 3.16.

Пятый фактор соответствует собственному значению меньше единицы, поэтому далее будут приниматься во внимание только четыре фактора. Но нагрузки этих факторов не позволяют произвести их единую интерпретацию. Поэтому они должны быть подвергнуты вращению. Первые пять факторов «объясняют» или воспроизводят 79% суммарной общности. Пример отражает типичную ситуацию, возникающую при психологических исследованиях, а именно корреляция большей частью не очень сильна, поэтому общности довольно небольшие и часто вполне достаточно нескольких факторов для объяснения общей вариации исходных переменных.

Корреляционная матрица, построенная по данным

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	(0,34)											
2	0,24	(0,71)										
3	0,21	0,01	(0,43)									
4	0,13	—0,07	**0,27**	(0,15)								
5	—0,02	—0,05	0,23	0,05	(0,38)							
6	—0,08	—0,04	—0,07	0,01	—0,15	(0,17)						
7	0,02	—0,07	—0,02	0,05	0,08	0,01	(0,45)					
8	—0,00	0,05	—0,03	—0,04	—0,01	—0,02	0,01	(0,58)				
9	0,01	—0,02	—0,05	0,03	—0,17	0,19	—0,11	—0,05	(0,50)			
10	—0,15	—0,08	0,03	0,01	0,17	—0,03	0,05	—0,07	—0,05	(0,28)		
11	—0,03	—0,00	—0,18	—0,12	0,04	—0,12	0,19	—0,02	0,08	0,07	(0,75)	
12	—0,19	—0,08	—0,07	0,07	0,04	0,20	0,07	0,14	**0,28**	0,15	—0,00	(0,68)
13	—0,07	—0,14	—0,07	0,07	—0,13	0,18	—0,01	—0,03	**0,39**	—0,14	—0,03	**0,38**
14	0,12	—0,00	—0,02	0,02	0,03	—0,16	0,09	—0,03	0,13	—0,20	**0,36**	—0,23
15	—0,02	0,05	—0,06	—0,02	—0,17	0,12	0,08	—0,10	**0,45**	—0,03	**0,42**	**0,39**
16	0,15	—0,11	—0,02	0,05	0,10	—0,00	—0,06	—0,02	**0,27**	0,08	—0,14	0,10
17	—0,02	0,08	0,18	0,10	—0,02	0,11	—0,18	0,15	—0,03	—0,05	**—0.50**	**0,29**
18	0,21	—0,08	0,17	0,04	0,16	0,01	0,11	0,08	0,05	0,12	—0,22	0,26
19	—0,07	—0,04	—0,10	—0,07	—0,01	0,03	0,10	0,01	0,12	0,11	**—0,29**	0,17
20	0,05	0,03	0,12	0,00	0,02	0,08	—0,15	0,01	0,11	—0,05	**—0,71**	—0,00
21	—0,00	—0,13	—0,03	0,04	0,00	—0,15	0,22	—0,07	—0,14	0,21	0,02	0,08
22	—0,03	—0,15	0,04	0,09	0,14	**—0,27**	0,15	0,12	**—0,44**	0,20	—0,16	—0,03
23	0,12	—0,01	—0,05	—0,08	—0,10	—0,24	0,00	—0,06	—0,01	0,07	**0,52**	—0,14
24	—0,02	0,11	0,07	0,10	0,02	0,09	—0,05	0,10	—0,03	—0,15	**0,64**	0,01

Названия переменных приведены в тексте. Значения коэффициентов корреляции Жирным шрифтом напечатаны значимые коэффициенты корреляции.

3.2. ЦЕНТРОИДНЫЙ МЕТОД

Тэрстоун использовал центроидный метод в качестве упрощенного аппроксимационного расчета метода главных факторов. Всего лишь несколько лет тому назад он был самым распространенным способом определения факторов. Так как раньше из-за большого объема вычислительных работ метод главных факторов применялся лишь в исключительных случаях, довольствовались центроидным методом, хотя он дает неточное и неоднозначное решение. И сегодня при отсутствии ЭВМ отдается предпочтение центроидному методу среди других процедур выделения факторов. При применении метода главных факторов и центроидного метода к одним и тем же данным выделенные первые факторы практически совпадают. Каттелл [35; *4*] рекомендует при использовании центроидного метода выделять на один фактор больше, чем это бы делалось с помощью метода главных факторов, и лишь после вращения заниматься интерпретацией всех факторов.

По сравнению с другими методами выделения факторов центроидный метод отличается простотой расчетов. Довольно легко воспринимается сама процедура вычислений. При этом создается впечатление,

Таблица 3.15

физиологических измерений и заполнения анкет

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
(0,52)											
—0,16	(0,44)										
0,48	0,23	(0,75)									
0,03	—0,15	—0,13	(0,68)								
0,12	**—0,32**	—0,11	—0,03	(0,55)							
—0,02	—0,17	—0,13	**0,40**	0,10	(0,47)						
0,04	—0,03	0,16	—0,04	—0,18	—0,05	(0,24)					
0,14	**—0,37**	**—0,49**	0,18	**0,51**	0,26	**—0,31**	(0,74)				
—0,07	—0,10	—0,04	—0,10	—0,04	0,16	0,25	—0,11	(0,50)			
—0,40	—0,12	**—0,49**	0,02	—0,00	0,17	0,06	0,07	**0,35**	(0,58)		
—0,26	**0,44**	0,19	**—0,28**	**—0,34**	—0,16	0,25	**—0,53**	0,14	—0,03	(0,70)	
0,08	**—0,32**	**—0,31**	0,13	**0,41**	0,07	**—0,30**	**0,67**	—0,22	0,05	**—0,57**	(0,65)

вычислены с точностью до второго знака после запятой.

что другими методами можно овладеть лишь после интенсивных занятий. Из-за этого дидактического преимущества метод особенно пригоден для начинающего исследователя.

3.2.1. Происхождение названия центроидного метода

Синонимом названия «центроидный метод» является «метод центра тяжести». Это название объясняет принцип метода. Положение первой координатной оси должно быть определено так, чтобы она проходила через центр тяжести скопления точек. Как уже многократно упоминалось, факторное отображение можно рассматривать как размещение m точек-переменных в r-мерном пространстве, причем отдельные точки или векторы представляют переменные. На рис. 3.8, *А* схематично изображены несколько точек-переменных в двумерной системе координат. Кроме того, указана нулевая точка, в которой начинаются все векторы. Это соответствует типичной ситуации перед началом выделения факторов. Переменные представлены m точками в r-мерном пространстве, положение нулевой точки известно. Разумеется, точное значение необходимой размерности пространства неизвестно. Точки мож-

Таблица 3.16

Главные факторы, вычисленные по данным табл. 3.15

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	h_i^2
1	0,020	—0,092	—0,089	—0,424	—0,245	0,257
2	0,031	0,147	—0,336	0,142	—0,273	0,230
3	0,188	—0,103	0,005	—0,274	—0,506	0,377
4	0,106	0,022	0,075	—0,150	—0,262	0,109
5	0,082	—0,230	0,194	—0,169	—0,161	0,152
6	0,108	0,356	0,024	0,080	0,116	0,159
7	—0,156	—0,132	0,282	0,048	—0,107	0,135
8	0,108	—0,013	0,053	0,173	—0,112	0,057
9	—0,155	0,609	0,080	—0,275	0,094	0,486
10	—0,035	—0,161	0,388	0,063	0,038	0,183
11	—0,824	—0,026	0,055	—0,021	0,046	0,685
12	0,054	0,491	0,587	0,186	—0,133	0,641
13	—0,020	0,687	0,093	0,082	—0,078	0,494
14	—0,489	—0,100	—0,279	—0,248	—0,112	0,401
15	—0,536	0,637	0,099	0,003	—0,191	0,739
16	0,265	0,115	0,307	—0,576	0,340	0,625
17	0,568	0,212	0,017	0,210	—0,285	0,493
18	0,295	—0,040	0,455	—0,344	—0,110	0,426
19	—0,335	0,009	0,290	0,137	0,047	0,217
20	0,843	—0,021	—0,105	—0,028	0,040	0,725
21	—0,114	—0,290	0,458	0,188	—0,105	0,353
22	0,191	—0,634	0,328	0,158	—0,004	0,571
23	—0,692	—0,273	—0,090	—0,042	—0,146	0,585
24	0,749	0,138	—0,175	0,063	0,011	0,615
Сумма квадратов факторных нагрузок	3,728	2,405	1,601	1,127	0,853	9,714
Процент от суммарной общности Σh_i^2	38,38	24,75	16,48	11,61	8,778	100,00

но изобразить в очень многих ортогональных системах координат, из которых на рис. 3.8, *А* представлены две — F_1F_2 и $F'_1F'_2$. Чтобы получить однозначное положение системы координат, уславливаются, что первая ось должна проходить через центр тяжести S скопления точек-переменных. Вторая ось F_2, как показано на рис. 3.8, *Б*, перпендикулярна к первой. Представим себе, что определено положение отдельных точек-переменных, центра тяжести S и нулевой точки (рис. 3.8, *А*). Систему координат F_1F_2 можно повернуть так, что она, например, займет положение $F'_1\,F'_2$. Но результатом вращения должно быть такое ее положение, чтобы ось F_1 проходила через центр тяжести S, как показано на рис. 3.8, *Б*. Это положение осей соответствует позиции факторов в центроидном решении.

В методе главных факторов для определения предпочтительной системы координат требовалось, чтобы вдоль первой оси лежал максимум дисперсии (см. рис. 3.1). В центроидном методе требуется, чтобы первая ось проходила через центр тяжести. Назначение обоих требований — попытаться однозначно определить положение системы координат.

Проекции точек на оси координат на рис. 3.8, *Б* определяют факторные нагрузки a_{il}, которые рассчитываются по корреляционной матрице. Координаты центра тяжести можно вычислить по координатам

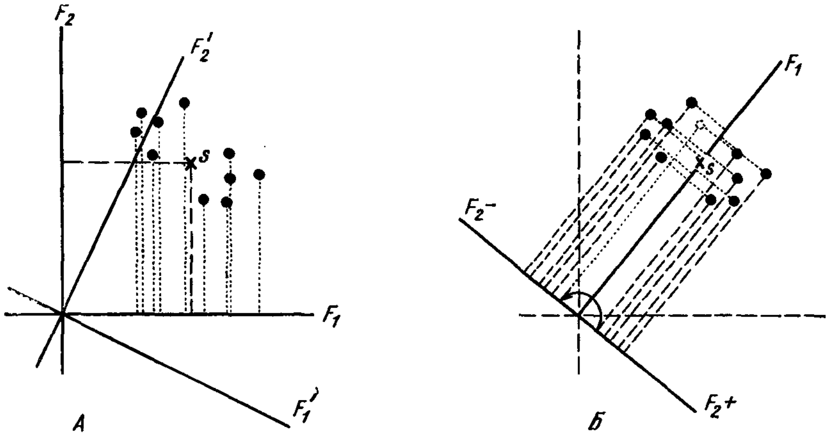


Рис. 3.8. Определение положения первой координатной оси с помощью центроидного метода. Диаграмма *А*: величина проекции центра тяжести *s* на F_1 является средним значением проекций всех точек на эту ось; конфигурация векторов не зависит от положения системы координат. Диаграмма *Б*: первая центроидная ось проводится через центр тяжести; тогда сумма остаточных проекций на ось F_2 равна нулю. Показано отражение одной точки переменной с положительной стороны на отрицательную

отдельных точек. Если в общем случае рассматривать r-мерную систему координат, то координатами центра тяжести являются выражения:

$$1/m\sum_i^m a_{i1};\quad 1/m\sum_i^m a_{i2},\ \ldots,\ 1/m\sum_i^m a_{ir}, \tag{3.12}$$

т. е. средние значения координат отдельных точек дают координаты центра тяжести. Это можно увидеть, рассматривая рис. 3.8, *А*, на котором координаты центра тяжести отмечены пунктиром. Если теперь система координат выбрана так, что первая ось проходит через центр тяжести, то сумма проекций точек на все остальные ортогональные к ней оси равны нулю (это следует из определения центра тяжести) и тогда координаты центра тяжести S становятся равными:

$$1/m\Sigma a_{i1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0, \tag{3.13}$$

т. е.

$$\Sigma a_{i2} = \Sigma a_{i3} = \ldots = \Sigma a_{ir} = 0,$$

в чем можно убедиться по рис. 3.8, *Б* для случая двумерной задачи. Сумма проекций на ось F_2 равна нулю, так как положительные и отрицательные значения проекций взаимно компенсируются. Условие (3.13) используется в расчетах по центроидному методу. Исходя из равенства $\mathbf{R}_h = \mathbf{AA}'$ (2.28) можем написать для каждого элемента k-го столбца матрицы $\mathbf{R}$ соответствующие выражения:

$$\begin{aligned} r_{1k} &= a_{11}\cdot a_{k1} + a_{12}\cdot a_{k2} + \ldots + a_{1r}\cdot a_{kr} \\ r_{2k} &= a_{21}\cdot a_{k1} + a_{22}\cdot a_{k2} + \ldots + a_{2r}\cdot a_{kr} \\ &\vdots \\ r_{mk} &= a_{m1}\cdot a_{k1} + a_{m2}\cdot a_{k2} + \ldots + a_{mr}\cdot a_{kr} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\sum_i r_{ik} = a_{k1}\sum_i a_{i1} + a_{k2}\sum_i a_{i2} + \ldots + a_{kr}\sum_i a_{ir}. \tag{3.15}$$

(3.15) представляет собой сумму равенств (3.14). Оно имеет место для каждого k-го столбца корреляционной матрицы. Если теперь просуммировать все суммы столбцов, т. е. просуммировать обе части равенства (3.15) по всем k, то получим общую сумму T элементов корреляционной матрицы:

$$T = \sum_i\sum_k r_{ik} = \sum_k a_{k1}\cdot\sum_i a_{i1} + \sum_k a_{k2}\cdot\sum_i a_{i2} + \ldots + \sum_k a_{kr}\cdot\sum_i a_{ir}. \tag{3.16}$$

В связи с тем, что $\sum\limits_i a_{i1} = \sum\limits_k a_{k1}$ (перемена индекса не изменяет смысла суммирования), получаем

$$T = \sum_{ik} r_{ik} = \Big(\sum_i a_{i1}\Big)^2 + \Big(\sum_i a_{i2}\Big)^2 + \ldots + \Big(\sum_i a_{ir}\Big)^2, \tag{3.17}$$

т. е. сумма всех элементов корреляционной матрицы равна сумме квадратов сумм столбцов матрицы факторного отображения. Это равенство имеет место только для ортогонального факторного отображения.

Подставив в (3.17) условия (3.13), получим

$$T = \Big(\sum a_{i1}\Big)^2 + 0 + 0 + \ldots \quad \text{или} \quad \sqrt{T} = \sum_i a_{i1}. \tag{3.18}$$

С учетом условия (3.13) равенство (3.15) примет вид:

$$\sum_i r_{ik} = a_{k1}\cdot\sum_i a_{i1}. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) получим

$$\sum_i r_{ik} = a_{k1}\cdot\sqrt{T}. \tag{3.20}$$

Введя обозначение $t = \frac{1}{\sqrt{T}}$, выразим:

$$a_{k1} = t \cdot \sum_i r_{ik} \qquad (k = 1, \; ..., \; m) \qquad (3.21)$$

или, опять изменив индекс, получим

$$a_{i1} = t \cdot \sum_i r_{ki} \qquad (i = 1, \; ..., \; m).$$

Оба сомножителя правой стороны этого равенства легко определяются из $\mathbf{R}$. Таким образом по (3.21) вычисляются нагрузки первого центроидного фактора. Равенство (3.18) служит для контроля правильности вычислений.

После вычисления нагрузок первого фактора по (3.21) определяют остаточные корреляции: $\mathbf{R}_h - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1' = \mathbf{R}_1$, где $\mathbf{a}_1$ является вектор-столбцом факторных нагрузок. Матрица $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1' = \mathbf{R}^+$ содержит так называемые воспроизведенные корреляции. $\mathbf{R}_1$ дает остаточные корреляции, которые остаются после выделения первого фактора ($\mathbf{R}_1$ — остаточная матрица). Если принимают решение выделить второй фактор (критерий см. в гл. 3.3), то повторяется та же самая вычислительная процедура по матрице остатков $\mathbf{R}_1$. При этом возникает затруднение, которое можно преодолеть с помощью некоторой уловки. Согласно определению после выделения фактора сумма проекции всех точек на другие ортогональные оси равна нулю. Второй центр тяжести, который не совпадает с началом координат, нельзя поэтому определить и, стало быть, нельзя приступить к выделению другого фактора. Например, по рис. 3.8, *Б* видно, что сумма проекций на ось F_2 равна нулю и совпадает с началом координат. Изменив знаки некоторых переменных таким образом, чтобы новый центр тяжести был удален от начала координат, создают предпосылку проведения вычислительной процедуры по выделению второго фактора. Изменение знака переменных нужно произвести так, чтобы все точки-переменные на рис. 3.8, *Б* находились по одну сторону от оси F_1. Например, если изменить все отрицательные знаки на положительные, то получим новый центр тяжести, который не совпадает с началом координат и используется дальше для вычисления нагрузок второго центроидного фактора. На последующем этапе расчета изменение знака аннулируется. Изменение знаков, или так называемое «отражение» переменных, лучше всего объяснить на конкретном примере. В этом месте вычислительной процедуры центроидного метода играет определенную роль субъективизм исследователя и его опыт. Можно, конечно, выработать определенные твердые правила, исключающие субъективизм в принятии решения. Но несмотря на это, изменение знаков остается слабым местом центроидного метода. Предположим, второй фактор выделен. Затем опять определяется остаточная матрица $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2'$ и принимается решение, выделять ли следующий фактор и т. д., пока последняя остаточная матрица не будет достаточно точно соответствовать нулевой матрице (см. 3.3.2). Теперь на числовом примере покажем вычислительную процедуру центроидного метода.

3.2.2. Вычислительная процедура

Для того чтобы можно было сравнить результаты обоих методов, здесь применяется та же самая корреляционная матрица, на которой демонстрировалась процедура вычислений с помощью метода главных факторов. Матрица еще раз представлена в табл. 3.17.

Таблица 3.17

Редуцированная корреляционная матрица R_h и нагрузки первого центроидного фактора

	1	2	3	4	5	6	
1	(0,8200)	0,7250	0,6310	0,1250	0,1600	0,0545	
2	0,7250	(0,6425)	0,5650	0,0080	0,1150	0,0650	
3	0,6310	0,5650	(0,5000)	0,1150	0,1400	0,0850	
4	0,1250	0,0080	0,1150	(0,6425)	0,5650	0,4025	$\sqrt{T}=3,40285$
5	0,1600	0,1150	0,1400	0,5650	(0,5000)	0,3550	
6	0,0545	0,0650	0,0850	0,4025	0,3550	(0,2525)	$t=1/\sqrt{T}=$ $=0,29387$
Сумма	2,5155	2,1205	2,0360	1,8580	1,8350	1,2145	$T=11,5795$
a_{i1}	0,7392	0,6232	0,5983	0,5460	0,5393	0,3569	$\sum a_{i1}=3,4029=$ $=\sqrt{T}$

Суммируем элементы каждого столбца и находим общую сумму $T = 11,5795$. Каждую сумму столбца затем умножаем на величину $t = 1/\sqrt{T} = 0,29387$, что соответствует формуле (3.21). Полученные таким образом нагрузки a_{i1} первого фактора для шести переменных записываем в последнюю строку таблицы. Для контроля правильности вычислений используем формулу (3.18), а именно, вычислив сумму факторных нагрузок, сравниваем ее с $\sqrt{T}$.

Как и в методе главных факторов, определяем матрицу воспроизведенных корреляций, нижний треугольник которой приведен в табл. 3.18. Каждый из элементов этой матрицы получаем путем перемножения соответствующих элементов векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_1'$, которые еще раз приведены в первой строке и первом столбце таблицы. Для контроля вычисляются полные суммы каждого столбца, причем принимаются во внимание также не указанные в таблице элементы корреляционной матрицы. Подсчет суммы ведется сначала по соответствующей строке матрицы до диагонали, а затем вниз от диагонального элемента по соответствующему столбцу. Умножая каждый элемент вектора $\mathbf{a}_1'$ на указанную справа в верхней строке таблицы сумму Σa_{i1}, получим значения, служащие для проверки сумм столбцов. Проверка считается удовлетворительной, если результаты совпадают с точностью до ошибок округления. В табл. 3.19 представлена остаточная матрица

Таблица 3.18

Матрица воспроизведенных корреляций R^+

a_1 \ a'_1		1 0,7392	2 0,6232	3 0,5983	4 0,5460	5 0,5393	6 0,3569	$\Sigma a_{i1}=3,4029$
1	0,7392	0,5464						
2	0,6232	0,4607	0,3884					
3	0,5983	0,4423	0,3729	0,3580				
4	0,5460	0,4036	0,3403	0,3267	0,2981			
5	0,5393	0,3987	0,3361	0,3227	0,2945	0,2908		
6	0,3569	0,2638	0,2224	0,2135	0,1949	0,1925	0,1274	
Сумма		2,5155	2,1208	2,0361	1,8581	1,8353	1,2145	
Контроль		2,5154	2,1207	2,0360	1,8580	1,8351	1,2144	

Таблица 3.19

Матрица первых остаточных коэффициентов корреляции R_1

	1	2	3	4	5	6
1	0,2736					
2	0,2643	0,2541				
3	0,1887	0,1921	0,1420			
4	—0,2786	—0,3323	—0,2117	0,3444		
5	—0,2387	—0,2211	—0,1827	0,2705	0,2092	
6	—0,2093	—0,1574	—0,1285	0,2076	0,1625	0,1251
Сумма	0,0000	—0,0003	—0,0001	—0,0001	—0,0003	0,0000
Контроль	0,0000	—0,0003	—0,0001	—0,0001	—0,0003	0,0000

$R_1 = R_h - R^+$. Опять достаточно записать нижний треугольник матрицы. Таким же образом, как и в табл. 3.18, образуем суммы столбцов, учитывая также элементы над диагональю. Элементы суммарной строки в табл. 3.19 должны в точности совпадать со значениями, получаемыми в результате вычитания соответствующих элементов суммарных строк табл. 3.18 и 3.17. Последняя строка в табл. 3.19 является контрольной.

Как было указано выше, сумма проекций на другие оси, ортогональные к первой центроидной, равна нулю, и, следовательно, центр тяжести системы лежит в начале координат. В соответствии с этим суммы элементов по столбцам остаточной матрицы с точностью до ошибок округления тоже равны нулю, и мы не можем прямо приступить к выделению второго фактора. Это препятствие можно обойти, произведя отражение отдельных переменных, или векторов. Практически это означает, что меняют знаки все элементы соответствующего столбца и строки корреляционной матрицы. Диагональный элемент остается без изменения. Перемена знаков геометрически соответствует зеркальному отражению вектора относительно оси. Отсюда и происхождение этого термина. Результатом этой операции является определение нового центра тяжести, перемещающегося из начала координат в новую точку, которая является теперь отправной для нахождения второго центроидного фактора. Через новый центр тяжести должна пройти вторая центроидная ось. После выделения каждого фактора знаки отражаемых переменных опять изменяются. Следовательно, изменение знаков каждый раз аннулируется. Перемена знака является лишь вычислительным трюком, чтобы сделать возможными дальнейшие расчеты.

В табл. 3.20 схематично показана последовательность выполнения процедуры отражения путем изменения знаков в матрице остатков $\mathbf{R}_1$. В верхней части таблицы представлены знаки остаточных коэффициентов корреляции после отражения первой переменной (меняются знаки первой строки и первого столбца). Диагональные элементы не участвуют в операции отражения, поэтому на их месте стоят пустые скобки. Отрицательные знаки имеются также у второй и третьей переменных. На следующем этапе подвергается отражению вторая переменная, что находит выражение в обращении знаков второй строки и второго столбца. Результат этой операции представлен в средней части таблицы. После отражения третьей переменной все знаки корреляционной матрицы становятся положительными. Но это отнюдь не всегда достигается. Целью отражения является получение по возможности большого числа положительных знаков у наибольших коэффициентов корреляции.

В описываемой процедуре придерживаются правила, по которому первой отражается переменная с наибольшим числом минусов. Если переменные имеют одинаковое число отрицательных знаков, как в нашем примере, то выбор переменной, отражаемой в первую очередь, осуществляется произвольно. По получившемуся отображению знаков опять выбирается переменная с наибольшим числом минусов, производится ее отражение и т. д.

Может случиться, что переменная подвергается отражению два раза и более. Тогда руководствуются следующим правилом: при четном числе отражений переменной ее знаки при последующем вычислении факторных нагрузок по суммам столбцов не изменяются. Если в исходной корреляционной матрице имеется почти одинаковое число минусов и плюсов, то необходимо произвести процедуру отражения перед выделением первого центроидного фактора. Тэрстоун [286; *6*] и Харман [117] приводят схему вычислительных процедур при обращении знаков. Мы воздержимся от ее описания. Отражение переменных должно выполняться осмысленно. Если изменение знаков каждой переменной записывать на каждом этапе, как это показано в табл. 3.20, то в итоге приходят к такому отображению знаков, которое для выделения следующего фактора окажется более пригодным, чем первоначальная матрица остатков.

Таблица 3.20

Отображение знаков R_1 при последовательном отражении переменных

	1	2	3	4	5	6	
1	( )	—	—	+	+	+	
2	—	( )	+	—	—	—	
3	—	+	( )	—	—	—	Знаки после отражения первой переменной
4	+	—	—	( )	+	+	
5	+	—	—	+	( )	+	
6	+	—	—	+	+	( )	
1	( )	+	—	+	+	+	
2	+	( )	—	+	+	+	
3	—	—	( )	—	—	—	Знаки после отражения второй переменной
4	+	+	—	( )	+	+	
5	+	+	—	+	( )	+	
6	+	+	—	+	+	( )	
1	( )	+	+	+	+	+	
2	+	( )	+	+	+	+	
3	+	+	( )	+	+	+	Знаки после отражения третьей переменной
4	+	+	+	( )	+	+	
5	+	+	+	+	( )	+	
6	+	+	+	+	+	( )	

В табл. 3.21 проводится выделение второго центроидного фактора. Номера отраженных переменных поставлены в скобки в верхней строке таблицы. Коэффициенты корреляции заимствованы из остаточной матрицы со знаками, которые были получены в результате последнего отражения. В нашем случае все переменные положительны. Ход вычислений тот же самый, что и в табл. 3.17, где производилось выделение первого фактора. Знаки сумм элементов столбцов отраженных переменных меняются на противоположные, чтобы после образования сумм аннулировать отражение. В нашем примере первые три нагрузки второго фактора отрицательны. Сумма нагрузок второго фактора должна приблизительно равняться нулю, что используется для проверки. Корреляции, воспроизведенные вторым фактором, представлены в табл. 3.22. Сумма элементов каждого столбца должна быть равна нулю с точностью до ошибок округления. Вторая остаточная матрица, полученная в результате вычитания R^{++} из R_1, приведена в табл. 3.23.

Наибольший остаточный коэффициент корреляции по абсолютной величине равен—0,034. Так же как и в методе главных факторов, удовлетворимся выделением двух факторов. В табл. 3.24 представлены для сравнения первоначальное факторное отображение и результаты вычисления факторных нагрузок обоими методами. Графическое сравнение проведено на рис. 3.9, по которому видно, что конфигурация векторов не зависит от накладываемых на них систем отсчета, т. е. она одинакова как при первоначальном факторном отображении (белые

Таблица 3.21

Выделение второго центроидного фактора

	(1)	(2)	(3)	4	5	6	
1	0,2736	0,2643	0,1887	0,2786	0,2387	0,2093	
2	0,2643	0,2541	0,1921	0,3323	0,2211	0,1574	
3	0,1887	0,1921	0,1420	0,2117	0,1827	0,1285	
4	0,2786	0,3323	0,2117	0,3444	0,2705	0,2076	
5	0,2387	0,2211	0,1827	0,2705	0,2092	0,1625	$\sqrt{T}=2,80007$
6	0,2093	0,1574	0,1285	0,2076	0,1625	0,1251	$t=1/\sqrt{T}=0,35713$
Сумма	—1,4532	—1,4213	—1,0457	1,6451	1,2847	0,9904	$T=7,8404$
a_{i1}	—0,5190	—0,5076	—0,3735	0,5875	0,4588	0,3537	$\Sigma a_{i2}=0,0001$

Таблица 3.22

Матрица корреляций, воспроизведенных с помощью второго фактора R^{++}

a_2 \ a'_2	—0,5190	—0,5076	—0,3735	0,5875	0,4588	0,3537
—0,5190	0,2694					
—0,5076	0,2634	0,2577				
—0,3735	0,1938	0,1896	0,1395			
0,5875	—0,3049	—0,2982	—0,2194	0,3452		
0,4588	—0,2381	—0,2329	—0,1714	0,2695	0,2105	
0,3537	—0,1836	—0,1795	—0,1321	0,2090	0,1623	0,1251
Сумма	0,0000	0,0001	0,0000	0,0033	0,0001	—0,0001

Таблица 3.23

Матрица вторых остатков корреляций R_2

	1	2	3	4	5	6
1	0,0042					
2	0,0009	—0,0036				
3	—0,0051	0,0025	0,0025			
4	0,0263	—0,0341	0,0077	—0,0008		
5	—0,0006	+0,0118	—0,0113	0,0010	—0,0013	
6	—0,0257	+0,0232	0,0036	—0,0014	0,0002	0,0000

кружочки), так и при центроидных факторах (крестики) и при факторах, полученных в результате применения метода главных факторов (черные кружочки). В каждом случае векторы лишь немного повернуты, что объясняется различными дополнительными условиями в методах выделения факторов, и эти условия характерны только для этих методов. В гл. 3.6 будет дана матрица преобразований, позволяющая

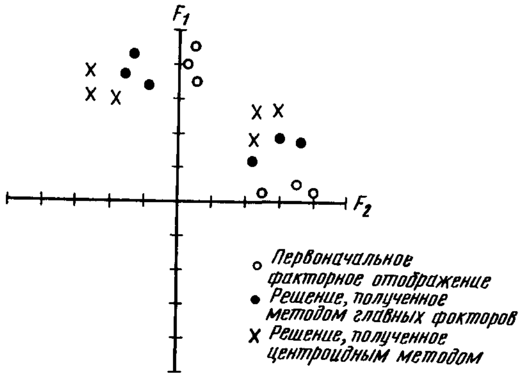


Рис. 3.9. Сравнение первоначального факторного отображения с результатами вычислений методом главных факторов и центроидным методом в одной и той же системе координат

результаты одного метода перевести в другой метод. Первоначальное положение системы координат, которое хорошо подходит для интерпретации факторов, не достигается в точности ни при методе главных факторов, ни при центроидном методе.

Таблица 3.24

Первоначальное факторное отображение и результаты выделения факторов методом главных факторов и центроидным методом

	Первоначальное факторное отображение			Решение методом главных факторов			Центроидное решение		
	F_1	F_2	h_i^2	F_1	F_2	h_i^2	F_1	F_2	h_i^2
1	0,90	0,10	0,82	0,86	−0,27	0,81	0,74	−0,52	0,82
2	0,80	0,05	0,64	0,74	−0,31	0,64	0,62	−0,51	0,64
3	0,70	0,10	0,49	0,68	−0,18	0,50	0,60	−0,37	0,50
4	0,05	0,80	0,64	0,35	0,72	0,64	0,55	0,59	0,65
5	0,10	0,70	0,49	0,38	0,60	0,50	0,54	0,46	0,50
6	0,05	0,50	0,25	0,23	0,44	0,25	0,36	0,35	0,25
Сумма квадратов	1,95	1,40	3,34	2,08	1,27	3,34	2,02	1,34	3,36
Процент от суммарной общности Σh_i^2	58,2%	41,8%	100%	61,9%	37,9%	99,8%	60,1%	39,9%	100%

3.3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ФАКТОРОВ, ПОДЛЕЖАЩИХ ВЫДЕЛЕНИЮ

При применении как метода главных факторов, так и центроидного метода возникает один и тот же вопрос: когда должен быть закончен процесс выделения факторов или каким числом факторов можно удовлетвориться? Имеются различные пути решения этого вопроса, которые отчасти приводят к новым способам решения, отчасти также связаны с проблемой общности, проблемой вращения и оценкой значений факторов, т. е. с теми проблемами, которые нами пока затрагивались поверхностно. Поэтому указанные далее идеи будут полностью понятны лишь после изучения последующих глав.

Общепризнанного метода определения числа факторов, подлежащих выделению, не существует. Представители различных школ расходятся в мнении о том, какой метод является более достоверным и пригодным для практики. К настоящему времени разработано более двадцати способов определения числа выделяемых факторов. Все эти способы, естественно, не могут быть здесь разобраны. В основном различают три подхода при решении задачи о числе выделяемых факторов: 1) алгебраический подход, который сводится к определению ранга **R**; 2) статистический подход, при котором на передний план выдвигается возможность сделать заключение на определенном уровне значимости о всей генеральной совокупности индивидуумов; 3) психометрический подход, при котором добиваются обобщения на совокупность всех переменных, и отчасти этот подход аргументирован с общенаучных позиций. Каждый из этих подходов можно проследить в большинстве имеющихся способах оценки числа факторов, подлежащих выделению. Перечисленные подходы и их возможные комбинации определяют многообразие созданных вычислительных процедур, которые можно найти в литературе.

3.3.1. Изображение долей дисперсии

Графическое изображение долей дисперсии факторов позволяет дать в общих чертах обзор критериев выделения r факторов. В принятом в факторном анализе подходе полная дисперсия m наблюдаемых переменных всегда равна m. Легко можно определить, какая доля этой дисперсии приходится на r выделяемых общих факторов. Доля дисперсии, которая вносится одним фактором, равна сумме квадратов факторных нагрузок одного столбца матрицы **A**. Приведенные рассуждения проиллюстрированы числовым примером в табл. 2.4. Можно произвольно положить, что достаточно выделить такое количество факторов, на которые приходится 90% или 95% полной дисперсии (см. рис. 3.10). Такое условие приводит к однозначному решению, но оно является обычно недостаточно аргументированным, почему именно ограничиваются 90% полной дисперсии. Могут возразить, что на результате выделения факторов сказывается разделение на общую и характерную дисперсию. Для выражения дисперсии фактора в процентах от полной дисперсии служит отношение: $\frac{\text{дисперсия фактора}\cdot 100\%}{\text{полная дисперсия}}$, в котором характерная дисперсия входит в знаменатель. Таким образом, с самого начала не указывается, сколько характерной дисперсии и сколько общей дисперсии приходится на определенную переменную. *В компонентном анализе*, где стремятся лишь к воспроизведению матрицы **R** без разделения на общую и характерную дисперсии, такой подход к выделению факторов вполне корректен. Но при использовании модели факторного анализа полезно знать доли дисперсии факторов относительно полной дисперсии. Эти доли часто

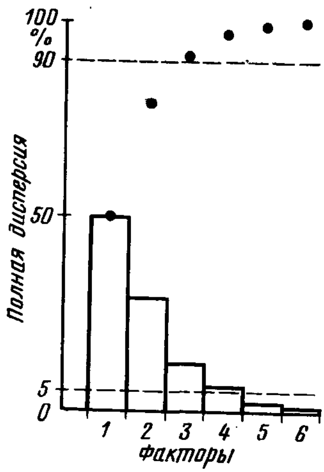


Рис. 3.10. Доли дисперсии шести факторов, выраженные в процентах от полной дисперсии, расположены в порядке, соответствующем выделению этих факторов. Точками изображены накопленные значения долей дисперсий. Пунктирные линии соответствуют обычным границам, принятым при выделении факторов в компонентном анализе

очень малы и отражают содержание анализа. Для наглядности чертят график долей дисперсии факторов, располагая их в порядке уменьшения или в виде накопленного ряда, как это показано на рис. 3.10. На основе такого изображения можно произвольно установить правило — выделять такое число факторов, на которые приходится 90% полной дисперсии, или выделять только те факторы, дисперсия которых составляет более 5% полной дисперсии. Как показывает пример на рис. 3.10, оба критерия не согласуются между собой. Если остановиться на объяснении только 90% полной дисперсии, то в этом случае ограничились бы выделением трех факторов, так как только третья точка лежит выше пунктирной линии. Если бы выбирались все факторы с дисперсией более чем 5%, то пришлось бы выделить четыре фактора, так как уже пятый фактор имеет меньшую долю дисперсии.

При применении *модели факторного анализа* часто рациональнее употреблять доли дисперсий общих факторов, отнесенных к суммарной общности, и указывать вклад каждого фактора в процентах. Такой подход представлен на рис. 3.11. Значения в процентах, которые указаны на шкале в левой стороне рисунка, неизбежно становятся больше, так как характерная дисперсия не входит более в знаменатель. При принятии решения о числе факторов, подлежащих выделению, недостаточно учитывать исключительно только эти значения в процентах, как это часто случается на практике. При небольшой суммарной общности доля, выраженная в процентах, часто очень велика, хотя это не отражает действительного положения вещей. Поэтому с правой стороны рис. 3.11 нанесена другая шкала, по которой можно считывать доли от полной дисперсии, выраженные в процентах. Дополнительно в правой части рисунка приведена шкала, по которой можно считывать абсолютные величины дисперсий в виде собственных значений. При определении числа выделяемых факторов надо учитывать в равной сте-

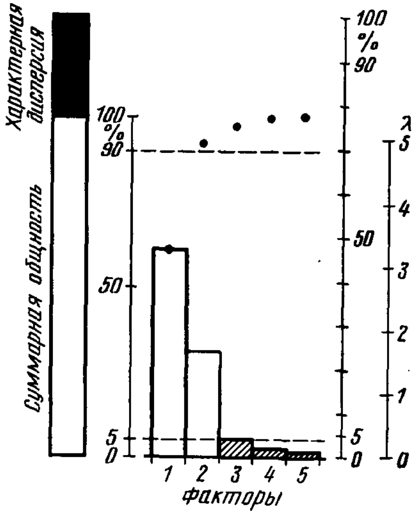


Рис. 3.11. Распределение долей дисперсии факторов, выраженных в процентах от суммарной общности и полной дисперсии. Слева указана шкала для долей дисперсий, выраженных в процентах от суммарной общности. Справа указана шкала для долей дисперсий, выраженных в процентах от полной дисперсии. Кроме того, справа приведена шкала для собственных значений. Доли дисперсии расположены в порядке убывания. Точками изображены накопленные значения долей дисперсий. Факторы, которые не должны выделяться, заштрихованы

пени доли дисперсий факторов, отнесенных как к полной дисперсии, так и к суммарной общности, а также абсолютные значения дисперсий. В этой связи следует упомянуть один критерий, предложенный Кайзером и Дикманом [166]. Факторы, вклады которых (сумма квадратов факторных нагрузок) в полную дисперсию меньше единицы, имеют долю дисперсии, меньшую единичной дисперсии переменных. Такие факторы не должны выделяться. На рис. 3.11 они заштрихованы. Приведенный критерий, по которому следует выделять только факторы с собственными значениями больше единицы, широко распространен благодаря своей простоте. Так как этот критерий основан на величине собственных значений, а число собственных значений зависит от числа переменных, то при небольшом числе переменных будет выделяться мало факторов, при большом числе переменных соответственно много факторов. Исходя из этих соображений в примере на рис. 3.11 надо было бы ограничиться двумя факторами.

Всегда рекомендуется дисперсии отдельных факторов вычислять в виде долей от полной дисперсии и от суммарной общности и графически их изображать, как это показано на рис. 3.11. Благодаря такому наглядному изображению получают возможность принять первое решение о числе факторов, подлежащих выделению, хотя такое решение является поверхностным и в определенной степени субъективным, В качестве критериев при этом следует учитывать обе доли дисперсий факторов, форму кривой (см. ниже) и абсолютные доли дисперсии. При этом не должна вводить в заблуждение высокая доля дисперсии, вычисленная относительно суммарной общности, если абсолютное ее значение мало. Указание на то, что 30% суммарной общности обеспечивается вторым фактором, ничего не дает, если не сообщается величина этой суммарной общности. Если, например, суммарная общность составляет одну треть от полной дисперсии, то на второй фактор приходится только 10% полной дисперсии. Изображение, подобное приведенному на рис. 3.11, где с левой стороны можно считывать долю дисперсии

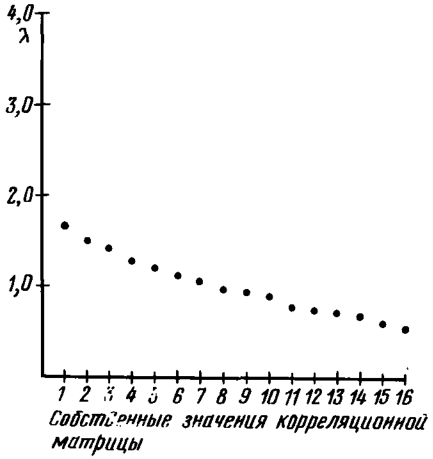


Рис. 3.12. Собственные значения корреляционной матрицы, построенной по случайным числам, имеющим нормальное распределение

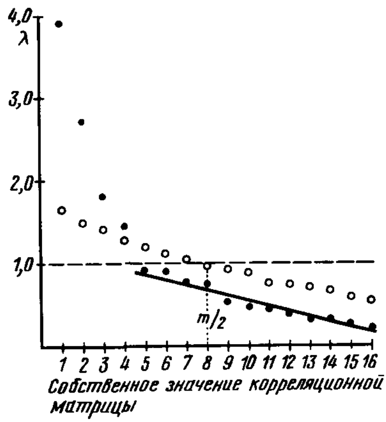


Рис. 3.13. Собственные значения матрицы выборочных коэффициентов корреляции (точки). Кружочками изображены собственные значения, приведенные на рис. 3.12

фактора, вычисленную относительно суммарной общности, а с правой — долю дисперсии фактора, вычисленную относительно полной дисперсии, а также собственные значения λ, позволяет избежать таких ошибочных заключений. Такое изображение является очень наглядным и помогает завершить факторный анализ.

При практической работе оправдала себя процедура, которая была разработана Каттеллом [35; *20*] и названа им критерием отсеивания (*scree-test*). В этой процедуре исходят из графического изображения всех собственных значений корреляционной матрицы, которые наносятся на график в порядке их убывания. Рис. 3.11 соответствует подобному изображению, так как доли дисперсии можно рассматривать как собственные значения. На рис. 3.12 представлены все проранжированные собственные значения корреляционной матрицы с единицами на диагонали. Корреляционная матрица была вычислена для 16 переменных (n = 150), значения которых были взяты из таблицы случайных чисел с нормальным распределением, и поэтому матрица содержит случайные корреляции. Как видно, собствённые значения лежат практически на прямой, наклон которой соответствует обратной зависимости.

Если имеет место неслучайная корреляция, то возможна кривая, изображенная на рис. 3.13. На этом рисунке нанесены собственные значения корреляционной матрицы, построенной по данным заполнения анкет для 16 параметров ($n = 136$). Точки не лежат на одной прямой. Кривая имеет явный изгиб. Правую ее часть можно выравнять по прямой. Последняя точка слева на этой прямой указывает число факторов, подлежащих выделению. В данном случае по критерию отсеивания надо было бы выделить пять факторов. На рис. 3.13 для сравнения представлены три других критерия определения числа факторов, подлежащих выделению. Второй критерий заключается в следующем. Над прямой $\lambda = 1$, проведенной на графике, лежат четыре точки, соответствующие четырем собственным значениям. Следовательно, число выделяемых факторов должно быть не меньше четырех. С другой стороны, по одному из простых правил, должно быть выделено меньше $m/2$ факторов, т. е. в нашем случае меньше восьми. Таким образом, число фактически выделяемых факторов лежит между четырьмя и восемью, следовательно, оба критерия не противоречат друг другу.

Крнтерий Хорна [140; *2*] также можно проиллюстрировать рисунком 3.13. Хорн предлагает для каждой исследуемой корреляционной матрнцы определять по случайным нормально распределенным числам k корреляционных матриц, используя при этом один и тот же объем выборок. Затем вычисляются среднне величины ранжированных собственных значений этих матриц. Полученная по усредненным величинам кривая собственных значений соответствует аналогичной кривой в генеральной совокупностн при определенном объеме случайных выборок, определенном числе переменных н определенной случайной корреляцни. Там, где эта кривая пересекает крнвую собственных значений, вычисленных по действительным наблюденням, Хорн предлагает прекратить выделение факторов. Крнвая собственных значений, заимствованная из рис. 3.12, на рис. 3.13 отмечена маленькими кружкамн. Согласно сформулированному правилу следовало бы ограничиться четырьмя факторами. Крнтерий Хорна в принципе сводится к правилу, по которому должны выделяться факторы с $\lambda > 1$, причем учитывается влияние случайности. По критерию Хорна выделяется меньше факторов, чем по критерию отсеивания Каттелла. Усредненная кривая собственных зиачений пересекает прямую $\lambda = 1$ в точке, абсцисса которой равна $m/2$. Гуттман [112, *6*] определил нижнюю границу числа r общих факторов, подлежащих выделению, при отсутствин данных об общностях. Еслн у матрицы $\mathbf{R}$ число собственных значенний, больших еднницы, равно s_1, то имеет место соотношение $r \geqslant s_1$. В работе Гуттмана указываются две другие граннцы, уточняющие значения r, но на практике онн редко прнменяются.

При принятии решения по критерию отсеивания о числе факторов, подлежащих выделению, исходят не из модели факторного анализа, а из главных компонент корреляционной матрицы. В этом случае процедура проведения факторного анализа состоит в следующем. Вначале определяют главные компоненты матрицы $\mathbf{R}$, не проводя оценку общностей. Затем устанавливают по критерию отсеивания число факторов r, которое должно быть выделено, как это сделано на рис. 3.13. После этого выбирают значения общностей (см. раздел 4) и к редуцированной корреляционной матрице $\mathbf{R}_h$ применяют метод главных факторов для выделения r факторов, используется процедура вращения осей системы координат (см. раздел 5), производится интерпретация выделенных факторов и оценка их значений (см. раздел 6). Лишь после этого принимают окончательное решение о числе факторов, которое следует оставить для объяснения рассчитанных корреляций. Графическое изображение долей дисперсии факторов дает возможность принять лишь предварительное решение, необходимое для дальнейшей процедуры. И только после завершения всего факторного анализа можно ответить на вопрос о числе факторов, которое должно было быть выделено. Трудность состоит в том, что в ходе анализа должно быть относительно рано принято решение, сколько факторов подвергать процедуре вращения. Критерий отсеивания позволяет в общем случае выделить больше факторов, чем другие критерии. Поэтому следует отдавать предпочтение этому критерию. На последующих этапах расчета число выделенных факторов сокращается.

3.3.2. Оценка остатков корреляций

Как в методе главных факторов, так и в центроидном методе предусмотрено на каждом этапе выделения факторов вычисление остатков. Часто уже при рассмотрении остаточной матрицы ясно, что не имеет смысла продолжать процедуру выделения факторов. Если все остаточные коэффициенты корреляции незначительно отличаются от нуля, то нет необходимости в новом факторе.

Употребленному выражению «незначительно отличаются от нуля» можно дать более точное истолкование. Распределение остаточных коэффициентов корреляции $r_{ост}$ должно соответствовать распределению коэффициентов корреляции, вычисленных по результатам случайных выборок одного и того же объема из нормально распределенной генеральной совокупности. Распределение $r_{ост}$ должно быть нормальным со средним значением, равным нулю, и стандартным отклонением

$$s_{r_{ост}} = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\,. \tag{3.22}$$

Для проверки значимости $r_{ост}$ нужно произвести точное сравнение фактического распределения остаточных коэффициентов корреляции с указанным эталонным распределением. Но обычно лишь устанавливается, насколько фактическое значение $s_{r\ ост}$ отличается от расчетного, вычисленного по формуле (3.22). Такого сравнения двух значений $s_{r\ ост}$ вполне достаточно для первого приближения. Часто распределение остатков приводится в таком виде, как показано в табл. 3.25. Применять более точный критерий проверки значимости остаточных коэффициентов корреляции не имеет смысла, так как остатки наверняка еще зависят от величин, которые не учитываются в формуле (3.22). Если стандартное отклонение остаточных коэффициентов корреляции значительно больше значения, вычисленного по формуле (3.22) и их среднее значение существенно отличается от нуля, то выделение нового фактора вполне оправдано. Описанная методика также не позволяет точно определить число факторов, подлежащих выделению, но служит необходимой отправной точкой проведения анализа. На рис. 3.14 изображено распределение остаточных коэффициентов корреляции из табл. 3.25. Речь идет о модели кровяного давления, составленной по 24 переменным (см. с. 265). Все получившиеся остаточные коэффициенты корреляции не значимы при $n=90$. Их среднее значение приблизительно равно нулю. Ожидаемое стандартное отклонение по формуле (3.22) равно 0,1066, следовательно, оно значительно больше стандартного отклонения, вычисленного по фактическому распределению, что видно также из рис. 3.14. Новый фактор не следует выделять.

Таблица 3.25

Распределение остаточных коэффициентов корреляций $r_{ост}$ для примера с измерением кровяного давления (24 переменные, $n=90$)

Интервалы	Частота
—0,049— —0,04	3
—0,039— —0,03	3
—0,029— —0,02	23
—0,019— —0,01	37
—0,009— —0,00	71
0,00 — 0,009	90
0,01 — 0,019	33
0,02 — 0,029	9
0,03 — 0,039	1
0,04 — 0,049	5
0,05 — 0,059	—
0,06 — 0,069	—
0,07 — 0,079	1
	Сумма 276

Барт [27; 7] предложил для оценки остатков употреблять величину $\chi^2 = (n-3)\ \Sigma\ (z-\bar{z})^2$ с $\frac{1}{2}\ ((m-r)^2-m-r)$ степенями свободы, где величина z является преобразованием Фишера, составленным по остаточным коэффициентам корреляции. Сокал [271] рассматривал остатки корреляций как частные коэффициенты корреляции и проверял их значимость по упрощенной схеме. В своей работе он проводит сравнительный анализ критериев по определению числа факторов, подлежащих выделению, и показывает, что предлагаемый им подход к этой проблеме оправдывает себя.

При оценке остатков каждый коэффициент корреляции рассматривается в определенной степени сам по себе, вне связи с другими коэффициентами, либо из них составляется распределение. Для оценки *значимости всей корреляционной матрицы* Бартлет [15; 3] предложил критерий, усовершенствованный далее Уилксом [312]:

$$\chi^2 = -\left[n - \frac{1}{6}(2m+5)\right] \ln|\mathbf{R}| \tag{3.23}$$

с $m\,(m-1)/2$ степенями свободы. В случае слабой корреляционной зависимости, прежде чем вообще приступать к факторному анализу, рекомендуется применять этот критерий к исходной корреляционной матрице. Разумеется, при этом значительно увеличивается объем счетных работ, так как приходится вычислять определитель матрицы $\mathbf{R}$. Если обработка данных методом главных компонент проводится на ЭВМ, то во время этой процедуры находят все собственные значения матрицы **R**. Тогда определитель матрицы **R** вычисляется по следующей формуле:

$$|\mathbf{R}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m. \tag{3.24}$$

В этом случае критерий χ^2 находится очень просто. При этом нужно учитывать погрешности, возникающие из-за неизбежных округлений при вычислении собственных значений. Обычно определитель вычисляется так, как показано в табл. 1.4.

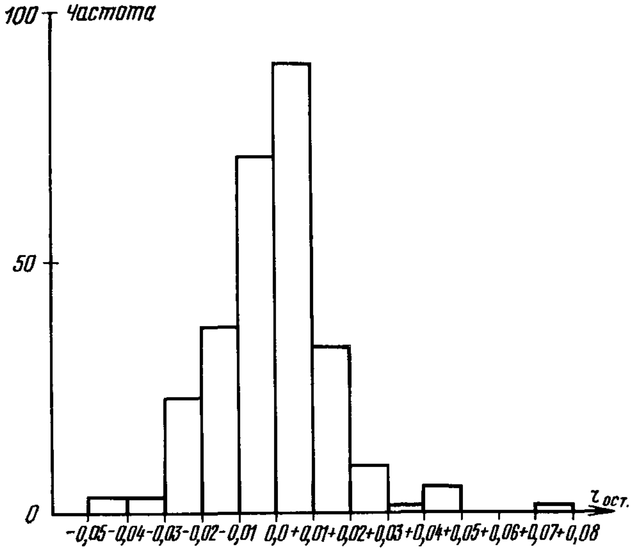


Рис. 3.14. Распределение остатков по табл. 3.25

Лоули предложил еще более простой критерий, который был найден в результате аппроксимации (3.23):

$$\chi^2 = n \sum_{i<j} r_{ij}^2, \quad i, \ j = 1, \ \ldots, \ m, \tag{3.25}$$

где n — объем выборки. Формулы (3.23), (3.25) используются для проверки гипотезы об окончании процесса выделения факторов по матрице остатков. Критерий (3.23) дает более точные результаты, чем распределение остатков со стандартным отклонением (3.22), так как в этом случае гипотеза проверяется по всей корреляционной матрице. На практике формула (3.23) употребляется редко из-за большого объема вычислений, связанных с ней.

Таким образом проверяется значимость корреляционной матрицы или матрицы остатков. Если проверка гипотезы дает отрицательные результаты, то это только означает, что не имеет смысла продолжать процедуру выделения факторов. Перечисленные критерии не дают оценки модели факторного анализа. Любые высказывания по этому вопросу с помощью этих критериев полностью произвольны и бессмысленны.

3.3.3. Критерий значимости в компонентном анализе

Собственные значения корреляционной матрицы, образованной из случайных чисел, располагаются на графике приблизительно по прямой (см. рис. 3.12 и 3.13). С помощью формулы (3.23) проверяется гипотеза, — значимо ли отличаются друг от друга главные компоненты матрицы **R**. Такой проверке подвергаются обычно исходные корреляционные матрицы. В компоиентном анализе, после того как выделены r главных компонент, возникает вопрос, значимо ли различаются между собой оставшиеся компоненты. Если рассматривать график рис. 3.13 слева направо, то видно, с какого момента оставшиеся собственные значения практически не отличаются друг от друга. Для подтверждения этого можно применить критерий, предложенный Бартлетом [15; *3*]. Критерий разработан для проверки гипотезы о том, что истинные величины $m - r$ собственных значений, оставшиеся после выделения r главных компонент, равны между собой. Критерий вычисляется по формуле

$$\chi^2 = -\left[n - \frac{1}{6}(2m+5) - \frac{2}{3}r\right] \ln \mathbf{R}_{m-r} \tag{3.26}$$

и имеет приближенно распределение χ^2 с $^1/_2\,(m-r)(m-r-1)$ степенями свободы. Эта формула аналогична формуле (3.23), причем величина $\mathbf{R}_{m-r}$ вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{R}_{m-r} = \frac{|\mathbf{R}|}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_r \left[\dfrac{(m-\lambda_1-\lambda_2- \ldots -\lambda_r)}{m-r}\right]^{(m-r)}} .$$

Рао [230; *3*] и Лоули [182; *1*, *3*] отмечают, что в предельном случае критерий (3.26) не имеет точного распределения χ^2. Лоули и Максвелл [183] предложили для улучшения приближения к χ^2-распределению критерий по проверке оставшихся $m - r$ собственных значений ковариационной матрицы вычислять по формуле

$$\chi^2 = n' \cdot [-\ln|\mathbf{C}| + \ln(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_r) + (m-r)\ln\lambda], \tag{3.27}$$

причем

$$n' = n - r - \frac{1}{6}\left[2(m-r) + 1 + \frac{2}{m-r}\right].$$

C — ковариационная матрица,

$$\lambda = \frac{\text{След}\,(\mathbf{C}) - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_r}{m-r} .$$

Число степеней свободы берется равным $\frac{1}{2}(m-r+2)(m-r-1)$.

Применение этого критерия предполагает знание собственных значений ковариационной матрицы, а не корреляционной, из которой исходят обычно в факторном анализе. Рао [230; *3*] разработал критерий для корреляционной матрицы генеральной совокупности, но для выборочных значений он не совсем пригоден. Пиллаи [225] предложил другую аппроксимацию критерия для самого большого по величине собственного значения ковариационной матрицы и опубликовал соответствующие таблицы.

Главные компоненты имеют произвольный характер и представляют собой линейную комбинацию наблюдаемых переменных. Критерий значимости главных компонент, вычисляемый по формуле (3.23), интересен прежде всего тем, что по нему проверяется значимость всей корреляционной матрицы. Реже интересуются вопросом, с какого момента оставшиеся главные компоненты значимо различаются между собой. Этот вопрос обычно ставится тогда, когда выделена первая линейная комбинация случайных величин, имевшая максимально возможную дисперсию, и удовлетворяются воспроизведением полной дисперсии переменных по возможности небольшим числом компонентов, допуская возможность незначительных остатков.

3.3.4. Критерий значимости при использовании модели факторного анализа

Критерии значимости, используемые в компонентном анализе, нельзя без изменения перенести на модель факторного анализа, так как она включает характерные факторы. Лоули [182; *1*] при разработке максимально правдоподобных (*maximum-likelihood*) оценок факторных нагрузок предложил тест, позволяющий оценить, достаточно ли точно воспроизводят корреляционную матрицу r общих факторов. В этом тесте предполагается знание общностей. В различной форме этот тест приведен в книгах Лоули [182; *1*], Лоули и Максвелла [183], Бартлета [15; *3*] и Рао [230; *3*]. Тест заключается в проверке гипотезы о том, что r общих факторов вполне достаточно для воспроизведения ковариационной или корреляционной матрицы. При этом вычисляется критерий значимости

$$\chi^2 = (n-1)\ln\frac{|\mathbf{R}^+|}{|\mathbf{R}|}, \tag{3.28}$$

имеющий приблизительно χ^2-распределение с $\frac{1}{2}((m-r)^2 - m - r)$ степенями свободы.

В этой формуле $|\mathbf{R}^+|$ — определитель матрицы корреляций, воспроизведенных с помощью выбранной модели; $|\mathbf{R}|$ — определитель исходной корреляционной матрицы; m — число переменных; r — число выделенных факторов и n — число индивидуумов. Если при определенном r вычисленное значение критерия превышает табличное значение χ^2, соответствующее заданному уровню значимости, это указывает на то, что необходимо выделить факторов больше, чем r, по крайней мере $r+1$. Таким образом, при статистическом подходе нижней границей числа факторов, подлежащих выделению, является наименьшее число r, при котором на заданном уровне значимости расчетное значение критерия (3.28) будет меньше табличного. Для работы с этим тестом необходимо,чтобы наблюдаемые переменные имели нормальное распределение, факторные нагрузки определялись методом максимального правдоподобия (а именно путём итерации до получения наилучших оценок) и чтобы n было достаточно велико. Это существенные ограничения, но они не умаляют принципиального значения теста. Данный тест является приложением метода статистической проверки гипотез к факторному анализу.

Для выборок среднего размера Бартлетт [15; 3] предложил следующую модификацию этого критерия:

$$\chi^2 = n' \cdot \ln \frac{|\mathbf{R}^+|}{|\mathbf{R}|}, \tag{3.29}$$

где

$$n' = n - \frac{1}{6}(2m+5) - \frac{2}{3}r.$$

Процедура, связанная с вычислением по формулам (3.28) и (3.29) чрезвычайно трудоемка, так как требует знания определителя.

Чтобы избежать вычисления определителей, Лоули и Максвелл рекомендуют пользоваться следующей модификацией, дающей хорошее приближение к (3.29):

$$\chi^2 = n' \cdot \sum_{k<l} \frac{(r_{\text{ост}_{ik}})^2}{u_i^2 \cdot u_k^2}. \tag{3.30}$$

В (3.30) через $r_{\text{ост}_{ik}}$ обозначены остаточные коэффициенты корреляции, получающиеся после выделения r факторов; через u_i^2 и u_k^2 — значения характерностей переменных; n' — то же самое, что в формуле (3.29). Формула (3.30) упрощает вычисления. Процедура сводится к возведению в квадрат элементов матрицы остатков, делению их на произведение $u_i^2 \cdot u_k^2$ и суммированию всех пронормированных таким образом элементов верхнего или нижнего угла матрицы. Если вычисленное значение критерия значимо, т. е. оно превосходит табличное значение χ^2, соответствующее выбранному доверительному уровню при $\frac{1}{2}((m-r)^2 - m - r)$ степенях свободы, то нулевая гипотеза, заключающаяся в том, что r факторов достаточно точно объясняют выборочные коэффициенты корреляции, отклоняется.

Процедура вычисления критерия (3.30) приведена в табл . 3.26 для примера иллюстрирующего метод главных факторов в гл. 3.1.3. Объем выборки $n = 100$. Верхняя половина таблицы отражает результаты вычисления остатков после выделения первого фактора, нижняя половина таблицы—после выделения второго фактора. В первом столбце обеих половин таблицы приведены значения характерностей u_i^2, полученных в результате вычитания из единицы диагональных элементов табл. 3.1. Наддиагональные элементы первой матрицы являются квадратами остатков корреляций после выделения первого фактора, заимствованных из табл. 3.8. На диагонали стоят элементы $1/u_i^2$, т.е. величины, обратные элементам первого столбца. Выражения $r^2_{\text{ост}_{ik}}/u_i^2 \cdot u_k^2$ являются поддиагональными элементами матрицы. Их получают путем умножения двух диагональных элементов с индексами i и k на соответствующий наддиагональный элемент матрицы. Например, первый элемент получим в результате такой операции: 5,5556 · 2,7972 · 0,0069=0,1072, следующий элемент первого столбца: 5,5556× × 2,7972 · 0,0019=0,0211 и т. д. Сумма поддиагональных элементов полученной нами матрицы соответствует сумме, указанной в формуле (3.30). В таблице предусмотрена строка для подсчета сумм поддиагональных элементов матрицы по столбцам. Умножив полученную сумму на $n^1=95{,}83$, определим, что $\chi^2=340{,}858$. Это значение при числе степеней свободы, равном девяти, значительно превосходит табличные значения χ^2. Поэтому принимаем решение выделить второй фактор. Описанный тест опять применяем к вычислительной матрице вторых остаточных коэффициентов корреляции (табл. 3.12). В результате получаем значение $\chi^2=2{,}156$. При числе степеней свободы, равном четырем, это значение является незначимым. Вычисления во второй половине табл. 3.26 аналогичны вычислениям первой половины. Результаты теста по формуле (3.30) подтерждают ожидаемый эффект. Двух факторов вполне достаточно для воспроизведения матрицы R_h при использовании модели факторного анализа.

Таблица 3.26

Пример вычисления критерия значимости при использовании модели факторного анализа по формуле (3.30)

	u_i^2	1	2	3	4	5	6
1	0,1800	5,5556	0,0069	0,0019	0,0305	0,0276	0,0216
2	0,3575	0,1072	2,7972	0,0033	0,0630	0,0279	0,0119
3	0,5000	0,0211	0,0185	2,0000	0,0149	0,0139	0,0055
4	0,3575	0,4740	0,4929	0,0834	2,7972	0,1878	0,1032
5	0,5000	0,3060	0,1561	0,0556	1,0506	2,0000	0,0710
6	0,7475	0,1561	0,0445	0,0147	0,3862	0,1900	1,3378
$\sum_{k<i}$		1,0644	0,7120	0,1537	1,4368	0,1900	$\sum_{k<i} \frac{r^2_{\text{ост}\,ik}}{u_i^2\, u_k^2} = 3{,}5569$

$$n' = 100 - \frac{1}{6}(12+5) - \frac{2}{3}\cdot 2 = 95{,}83(3)$$

$$\chi^2 = 95{,}83(3)\cdot 3{,}5569 = 340{,}858$$

при $\frac{1}{2}\,((6-1)^2-6-1)=9$ степенях свободы

1	0,1800	5,5556	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0007
2	0,3575	0,0000	2,7972	0,0000	0,0009	0,0002	0,0007
3	0,5000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0001	0,0000
4	0,3575	0,0062	0,0070	0,0000	2,7972	0,0000	0,0000
5	0,5000	0,0000	0,0011	0,0004	0,0000	2,0000	0,0000
6	0,7475	0,0052	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	1,3378
$\sum_{k<i}$		0,0114	0,0107	0,0004	0,0000	0,0000	$\sum_{k<i} \frac{r^2_{\text{ост}}}{u_i^2\, u_k^2} = 0{,}0225$

$$n' = 95{,}83(3)$$

$$\chi^2 = 95{,}83(3)\cdot 0{,}0225 = 2{,}156$$

$\frac{1}{2}\,((6-2)^2-6-2) = \frac{8}{2} = 4$ степенях свободы

Критерий (3.30) для проверки значимости часто используется в центроидном методе и методе главных факторов, чтобы получить хотя бы приблизительную оценку числа факторов, подлежащих выделению. Критерии (3.28) и (3.29) основаны на прочном научном фундаменте и дают хорошую оценку для факторной модели при использовании метода максимального правдоподобия, но связаны с большим объемом вычислительных работ. Указанная аппроксимация этих формул дает вполне приемлемое решение, удовлетворяющее практиков, и поэтому рекомендуется при научных исследованиях. В связи с тем, что в приведенные формулы входят объемы выборок, при той же самой корреляционной матрице с увеличением объема выборок возрастает число значимых факторов. Общее мнение о том, что и без того в исследуемых явлениях действует много общих факторов, ослабляет значение теста. В факторном анализе применяется еще ряд статистических критериев. Познакомимся с некоторыми из них в общих чертах.

Рипп [236] разработал тест значимости в анализе главных факторов и пришел к формуле, аналогичной (3.28). Процедура, связанная с этим тестом, включает определение собственных значений ковариационной матрицы, что вызывает большой объем вычислительных работ. Кайзер и Каффри [165] использовали другой подход к оценке полноты факторизации в разработанном ими α-факторном анализе, который будет обсуждаться далее. Вкратце можно сказать, что они выделяют такие факторы, которые обладают наибольшей «обобщенностью» в смысле α-коэффициента, предложенного Кронбахом, Раджаратнамом и Глезером [106]. При этом речь идет не об обычном определении значимости факторов или выводе, распространяемом на всю генеральную совокупность в статистическом смысле. Вывод распространяется на область всех переменных и выделяются факторы с положительной обобщенностью α. Было показано, что при таком подходе выделяется столько факторов, сколько корреляционная матрица имеет собственных значений, превышающих единицу. Критерий α-факторного анализа является широко известным и часто употребляемым на практике. Для самого α-факторного анализа применение этого критерия является необходимым элементом вычислительной процедуры, но критерий может быть также использован для приблизительной оценки нижней границы числа факторов, подлежащих выделению. Однако его нельзя признать годным для всех случаев.

3.3.5. Другие критерии оценки числа факторов

В связи с тем, что вычислительная процедура факторного анализа представляет собой многоступенчатый процесс, допустимо принимать решение о числе остающихся факторов на различных этапах расчета. До сих пор обсуждались критерии, которые применялись либо в процессе выделения факторов, либо после этого. Однако лишь на последних этапах получают важную информацию о числе факторов, которые следует оставить. Основная стратегия при этом состоит в том, чтобы вначале выделить на один фактор больше, а затем либо отбросить его, либо оставить на основании дальнейших результатов анализа и дополнительных критериев. Приводимые далее критерии не являются готовыми рецептами на все случаи. Подробно они будут обсуждаться в последующих главах, а здесь только упоминаются, чтобы показать связь с определением числа оставляемых факторов. При этом кое-что может быть непонятным, так как еще не усвоены разделы 5 и 6.

Важнейшим критерием числа оставляемых факторов является получение простой структуры в результате процесса *вращения*. На это неоднократно указывал, прежде всего, Каттелл [35; *10*, *20*]. Вращение изменяет доли дисперсии факторов, т. е. факторы, имевшие по окончании процесса выделения большие доли дисперсии, после поворота системы координат изменяют их на меньшие доли, и наоборот. При косоугольном факторном решении факторы, удовлетворяющие тесту Баргмана, могут быть оставлены, даже если их доли дисперсии относительно малы. В факторном анализе важно знать факторное отображение, и оно определяется путем вращения до получения простой структуры. Таким образом, решение о числе факторов может быть окончательно принято лишь после вращения, и положительное значение теста Баргмана достаточно обосновывает такое решение.

Распространена практика выделения тех факторов, которые после вращения окажутся интерпретируемыми. Такой принцип действия ошибочен. Исследователи, наделенные богатой фантазией, будут оставлять слишком много факторов, а исследователи с небольшой фантазией будут довольствоваться малым числом факторов. Часто бывает, что, не обнаружив никакой аналогии с природой изучаемого явления, исследователь отбрасывает фактор. Если избежать этого нельзя, то нужно хотя бы указывать доли дисперсии отбрасываемого фактора. Напротив, при интерпретации факторов с небольшими долями дисперсии надо особо подчеркивать это обстоятельство. Распространенным критерием числа выделенных факторов является применение метода варимакса для различного набора факторов и сохранение таких факторов, которые остаются стабильными в нескольких вращениях. При небольшом числе факторов этот путь может привести к положительным результатам. Однако, руководствуясь при данной факторной структуре только принципом сокращения числа факторов, можно прийти также к искажению результатов анализа. Поэтому такой подход не рекомендуется.

Если ставится задача получить лишь отображение факторных нагрузок, то решающим моментом в определении числа факторов становится вращение. Часто, однако, обнаруженные факторы нужно относить к отдельным индивидуумам. Вот почему требуется оценка значений факторов. Полученная *точность оценки* является важным критерием для фактора. Факторы, получающие плохую оценку, вообще не стоит выделять. Поэтому рекомендуется последовательно определять точность оценки значений каждого фактора и использовать ее в качестве критерия выделения. Нижняя граница множественного коэффициента детерминации при построении регрессии факторов по изучаемым переменным должна быть приблизительно равна 0,10, а при большом объеме выборки 0,05. Факторы, дисперсия которых обусловлена менее чем на 95% данными переменными, не нужно ни интерпретировать, ни оставлять. Качество воспроизведения матрицы исходных данных с помощью выбранной модели факторного анализа является общим критерием для всех факторов.

В литературе приводится более 20 других различных процедур вычисления, используемых в качестве критериев выделения факторов. Следует упомянуть критерии Макнимара, Тукера [291; *1*], Фи, Кумбса

[63], имеющие второстепенное значение. Большей частью они связаны с эмпирическими процедурами, научное обоснование которых желательно еще уточнить. Это является одной из причин малой распространенности этих критериев.

3.3.6. Рекомендации по определению числа факторов

Вопрос о числе факторов, подлежащих выделению, может быть поставлен по-разному. Заведомо недостаточна постановка вопроса только в статистическом смысле, а именно о проверке значимости по формуле (3.30). Также недостаточно использование только таких критериев, которые, например, связаны с долями дисперсии или числом собственных значений больше единицы. Для ответа на такой важный вопрос нужно привлекать целый ряд критериев, которые позволят сделать дифференцированное заключение.

При *приблизительной* оценке, которая прежде всего применяется при небольшом числе переменных (от 5 до 7) и при срочном проведении факторного анализа, рекомендуется следующее правило. Число факторов r должно быть меньше $m/2$. Но с другой стороны, оно должно быть больше числа собственных значений корреляционной матрицы, превышающих единицу, или равно ему. Вклад общих факторов в суммарную общность должен составлять около 90%. Остатки корреляционной матрицы должны быть приблизительно нормально распределены со средним значением, равным нулю, и стандартным отклонением, не превышающим его значения, рассчитанного по формуле (3.22). Наконец, должен быть проведен тест с применением критерия (3.30), который при r факторах не является значимым. Если по этим критериям выносятся решения, не противоречащие друг другу, то удовлетворяются этими r факторами. При небольшом числе переменных вышеназванные критерии обычно дают схожие результаты.

При *последовательной* процедуре принятия решения о числе выделяемых факторов выполняются следующие этапы. Вначале применяют критерий отсеивания и устанавливают верхнюю границу числа факторов, подлежащих выделению. После оценки общностей по установленному числу факторов выполняется вычислительная процедура с помощью метода главных факторов. Затем применяется метод вращения до получения косоугольной простой структуры. Факторы, которые соответствуют простой структуре и являются значимыми по тесту Баргмана, интерпретируются и принимается окончательное решение о числе факторов, достаточно полно объясняющих наблюдаемые корреляции. Доли дисперсии оставленных факторов изображаются графически, как это показано на рис. 3.11; определяются остатки, проверяется на нормальность их распределение и вычисляется критерий по формуле (3.30). Кроме того, определяется точность оценки для каждого фактора по формуле (6.25). Остатки должны иметь нормальное распределение со средним значением, равным нулю, и стандартным отклонением, не превышающим рассчитанного по формуле (3.22) значения. Можно также воспользоваться упомянутым выше критерием Барта и Сокала. Тест по формуле (3.30) не всегда дает хорошие результаты. Принятие решения на основании величины долей дисперсий факторов и точности оценок факторных значений является более надежным. Приведенные критерии не всегда точно согласуются между собой. Они более или менее точно указывают на необходимость выделения еще одного фактора. Затем после попытки содержательного его описания или применения более мощного критерия принимается окончательный вывод о его включении в факторное решение. В 3.3.3 и 3.3.4 указаны процедуры тестов для проверки значимости числа выделенных факторов в компонентном анализе и при применении метода максимального правдоподобия по Лоули. В настоящее время эти тесты при последовательной процедуре выделения факторов играют второстепенную роль.

3.4. МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ФАКТОРОВ, ПОЯВИВШИЕСЯ ПЕРВЫМИ, НО МАЛО УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ

Прежде чем перейти к рассмотрению новых способов решения проблемы факторов, познакомимся с некоторыми старыми способами. В истории факторного анализа значительную роль сыграл ряд методов выделения факторов, которые в настоящее время применяются лишь при особых обстоятельствах. Их простота, а также полезность ретроспективного взгляда на предмет явились основанием для написания этой главы.

Способы решения факторной проблемы выше были разбиты на три группы: многофакторный анализ (центроидный метод и метод главных факторов); методы, представляющие лишь исторический интерес и мало используемые в настоящее время; новые способы решения, основанные на статистическом подходе. Это упрощенное разделение приводит к тому, что в одной главе представлены совершенно разнородные методы выделения факторов. Поскольку внутри факторного анализа имеются различные школы, другой автор изложил бы эту тему по-иному, перенеся центр тяжести на другие методы. Например, можно было бы описать групповой метод получения факторного решения. Однако по дидактическим соображениям все решения, являвшиеся нехарактерными для факторной проблемы, коротко упоминаются в следующей сводной главе. С одной стороны, невозможно в одной небольшой главе подробно обсудить эти методы и дать схему вычислений. Но с другой стороны, необходимо знать принцип их действия, так как это будет способствовать усвоению и пониманию изложенного ранее материала. Итак, в этой главе пойдет речь об однофакторном, двухфакторном, бифакторном и групповом методах.

3.4.1. Алгебраический способ решения факторной проблемы

Для проблемы факторов имеется простое алгебраическое решение системы равенств $\mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$, выполнимое для любой корреляционной матрицы. Ограничением здесь является требование, чтобы факторное отображение $\mathbf{A}$ имело вид, изображенный на рис. 3.15. Первый фактор получает нагрузки от всех m переменных, второй фактор — начиная от второй до m-ой переменной и т. д. и последний фактор имеет нагрузку только от последней переменной. Поскольку каждую переменную можно поставить на первое место, при m переменных имеется благодаря этому m решений, которые большей частью ничего не говорят интерпретатору. Требуемое факторное отображение схематично представлено на рис. 3.15 и едва ли его можно интерпретировать. Алгебраический путь решения был предложен многими авторами и описан в литературе под разными названиями. В принципе речь идет при этом о решении m уравнений с m неизвестными по методу квадратного корня. Тэрстоун развил этот метод применительно к факторному анализу и назвал его *диагональным методом выделения факторов*. Хользингер описал этот метод под названием *метода жесткой лестницы* (*solid staircase method*). Метод квадратного корня сыграл определенную роль в развитии группового метода при определении матриц преобразования. Кроме того, его применяют для определения обратной матрицы. Вычислительная процедура метода квадратного корня, как она предложена была Холецким, представлена в гл. 1.4. В иастоящее время при выделении факторов эта процедура практически не находит применения.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
V_1	×					
V_2	×	×				
V_3	×	×	×			
V_4	×	×	×	×		
V_5	×	×	×	×	×	
V_6	×	×	×	×	×	×

Рис. 3.15. Схематическое изображение матрицы факторного отображеиия **A** для алгебраического способа решеиия факторной проблемы: V_1—V_6 — переменные; F_1—F_6 — факторы. Крестиками отмечеиы высокие факториые нагрузки

3.4.2. Однофакториый метод

Однофакторный метод может быть применен в том случае, когда корреляционная матрица и соответствующее факторное отображение имеют форму, указанную на рис. 3.16. Существуют группы переменных, связанные между собой тесной корреляционной зависимостью. И напротив, имеются группы, у которых эта связь отсутствует. При такой ситуации получается факторное отображение, аналогичное указанному справа на рис. 3.16. Каждой группе коррелированных переменных соответствует один фактор, ортогональный к другим факторам. В данном случае связь между корреляциоиной матрицей и факторным отображением очевидна. Если такая корреляционная матрица существует, то она зависит от выбора переменных. На практике данные, пригодные для однофакторного решения, встречаются редко прежде всего потому, что должно выполняться требование некоррелированности отдельных факторов. Однако это не умаляет значения метода. В качестве одного из первых методов он оказал сильное влияние на развитие факторного анализа, и постановка задачи нашла свое отражение в методе вращения. При наличии корреляции между факторами получается косоугольное однофакторное решение, достаточно хорошо аппроксимирующее исходные эмпирические данные. Такое решение в некотором смысле является целью метода вращения до получения простой структуры (см. раздел 5). При простой структуре матрицы частных коэффициентов корреляции имеют ранг, равный единице, если частные коэффициенты корреляции вычислены для переменных, относящихся к одному фактору при исключении всех других переменных. Таким образом, при данной простой структуре в принципе получают факторное

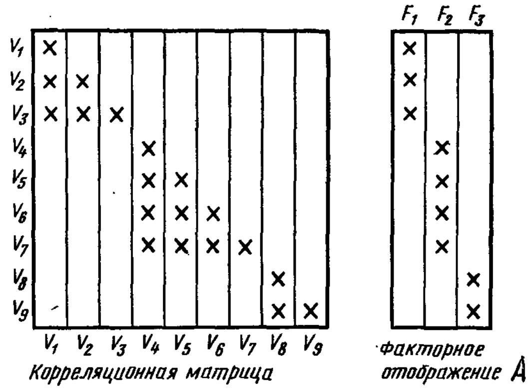


Рис. 3.16. Схематическое изображение корреляционной матрицы и матрицы факторного отображения **A** в однофакторном методе: V_1—V_9 — переменные; F_1—F_3 — общие факторы матрицы **A**. Крестиками отмечены высокие факторные нагрузки

отображение, указанное на рис. 3.16. Конечно, при проведении многофакторного анализа допускаются коррелированность факторов и перекрытие их, что исключено в однофакторном методе.

3.4.3. Двухфакторный метод Спирмэна

Создание двухфакторного метода тесно связано с разработкой Спирмэном теории интеллектуальных возможностей. На корреляционные матрицы проводимых психологических тестов Спирмэн накладывал условие: они должны воспроизводиться факторным отображением, соответствующим рис. 3.17. Этим самым постулируется один генеральный фактор, который содержится во всех переменных, и, кроме того, у каждой переменной есть свой специфический фактор. В основе теории лежит предположение, что каждый тест может быть выражен действием одного генерального фактора и фактором, специфичным для данного теста. Эта форма факторного отображения перешла в многофакторный анализ, поскольку в нем для объяснения каждой переменной требуется один характерный фактор (см. формулу (2.23)).

Такнм образом, для того чтобы можно было к корреляционной матрице применять двухфакторный метод, она должна соответствовать определенным условиям. Уже упоминалось, что ранг корреляционной матрицы равен числу общих факторов. Корреляционная матрица **R** с факторным отображением, соответствующим рис. 3.17, имеет ранг, равный единице. Три переменные можно всегда представить в таком виде, т. е. они могут быть описаны одиим общим фактором. Но для четырех переменных такая ситуация не всегда возможна. Для того чтобы четыре переменные могли быть описаны одним фактором, коэффициенты корреляции этих переменных должны удовлетворять двум независимым условиям. Это требование Спирмэн назвал условиями равенства нулю тетрад (*vanishing of tetrad differences*). Это выражение сыграло значительную роль в научной литературе. Для четырех переменных при наличии одного общего фактора Спирмэн получил следующие два равенства:

$$r_{12}r_{34} - r_{13}r_{24} = 0, \qquad (3.31)$$

$$r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23} = 0.$$

Точное указание числа независимых условий, которым при данном числе переменных и факторов должиа удовлетворять корреляционная матрица, можио найти у Хармана [117]. При увеличении числа переменных для получеиия факторного отображения с одним генеральным фактором и специфичиыми факторами, относящимися к каждой переменной, возрастает число уравнений, выражающих требование Спирмэна. При этом часть этих уравнений будет линейио зависеть друг от друга. Мы не будем описывать технику вычисления факторных нагрузок по двухфакторному методу. Однако следует упомянуть особый случай, известный под названием варианта Хейвуда. Ои возникает тогда, когда одна из общностей превышает единицу, что непосредственно связаио с требованием о равенстве тетрад иулю. Это требоваиие выполияется, когда ранг матрицы равен единице. Для того чтобы реальная редуцированная корреляционная матрица имела ранг, равный единице, необходимо, чтобы один из ее диагональных элементов был больше едииицы.

	F_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
V_1	×	×					
V_2	×		×				
V_3	×			×			
V_4	×				×		
V_5	×					×	
V_6	×						×

Рис. 3.17. Схематическое изображение матрицы факториого отображения **F** в двухфакторном методе Спирмэна: V_1—V_6 — перемениые; F_1 — генеральный фактор; S_1—S_6 — специфичные факторы. Крестиками отмечены высокие факториые нагрузки

3.4.4. Бифакторный метод

К началу 30-х годов, после того как накопился значительный опыт по анализу корреляционных матриц, выяснилось, что двухфакторный метод Спирмэна может быть применен не ко всем эмпирическим данным. Иногда те переменные, которые не подходили к факторному решению, даже просто исключались. Хользингер предложил бифакторный метод, в котором пытался преодолеть недостатки, присущие двухфакторному решению. Метод Хользингера разработан для факторного отображения, представленного на рис. 3.18. Особенность бифакторной модели состоит в том, что кроме генерального она включает неперекрываемые групповые и характерные для каждой переменной факторы.

Ограничения, присущие бифакторному методу, менее жестки по сравнению с двумя предшествующими. Но сама процедура расчетов сложнее. Этим методом можно аппроксимировать большой класс корреляционных матриц, что явилось шагом вперед по сравнению с ранее разработанными методами. Так, метод Спирмэна не может быть применен к большим и сложным наборам психологических тестов, среди которых наблюдается к тому же отрицательная корреляция. Сегодня бифакторный метод расценивается как логическое звено на пути развития от двухфакторного метода к многофакторному анализу с любыми перекрываемыми групповыми факторами.

	F_1	F_2	F_3	F_4
V_1	×	×		
V_2	×	×		
V_3	×	×		
V_4	×		×	
V_5	×		×	
V_6	×		×	
V_7	×		×	
V_8	×			×
V_9	×			×

Рис. 3.18. Схематическое изображение матрицы факторного отображения **A** в бифакторном методе: V_1—V_9 — переменные; F_1—F_4 — общие факторы; характерные факторы не указаны. Крестиками обозначены высокие факторные нагрузки

Перед применением бифакторного метода необходимо решить, какие переменные можно объединить в отдельную группу. Чтобы более или менее избежать произвольности в группировке переменных, используют так называемый B-коэффициент (коэффициент принадлежности *coefficient of belonging*), который играет большую роль в кластерном анализе. При этом исходят из того, что переменные, обусловленные действием одного фактора и, следовательно, относящиеся к одной группе, коррелируют между собой сильнее, чем с остальными переменными.

$$B = 100 \cdot \frac{\text{средний коэффициент корреляции между переменными одной группы}}{\text{средний коэффициент корреляции переменных этой группы с остальными переменными}} \qquad (3.32)$$

Сначала выделяются две переменные с наибольшим значением коэффициента корреляции между ними и вычисляется B-коэффициент. Затем к ним добавляется третья переменная, максимально связанная с предыдущими, и снова вычисляется B-коэффициент. Так постепенно к формирующейся группе добавляется по одной переменной. Процесс продолжают до тех пор, пока не произойдет резкого спада значения коэффициента. Переменная, вызвавшая уменьшение значения B, относится не к этой группе. Таким образом, делается попытка присоединить все переменные к первой группе и по величине B-коэффициента принимаются решения об их принадлежности к этой группе. Затем начинают формирование второй группы, отыскивая среди оставшихся после исключения переменных первой группы две наиболее связанные между собой. Вся процедура вычисления B-коэффициента повторяется до тех пор, пока все переменные не окажутся распределенными по группам. Распределения B-коэффициента для оценки значимости его расчетных значений не существует. Поэтому процесс формирования групп зависит от субъективных причин. Так как группировка переменных является предпосылкой бифакторного решения, то, следовательно, всему методу присуща субъективность. К тому же имеется много корреляционных матриц, по которым нельзя получить решения в виде, представленном на рис. 3.18. Поэтому с течением времени были вынуждены отклонить бифакторный метод как универсальное средство факторного решения.

Многофакторный метод Тэрстоуна позволяет анализировать любую корреляционную матрицу и предлагает процедуры, удовлетворяющие принципу простой структуры. Метод главных факторов и центроидный метод относятся к многофакторному анализу. Необходимое для многофакторного метода факторное отображение схематично представлено на рис. 3.19 с тем, чтобы его можно было сравнить с факторными отображениями других методов (рис. 3.15 — 3.18). Модель многофакторного анализа отличается прежде всего тем, что в описание переменной может войти несколько групповых факторов, т. е. допускаются перекрывающиеся групповые факторы. Разумеется, из-за этого анализ корреляционной матрицы усложняется по сравнению со всеми упомянутыми выше решениями, что выражается в необходимости введения таких процедур, как оценка общностей и вращение.

	F_1	F_2	F_3	F_4
V_1	×			×
V_2	×			
V_3	×	×		
V_4	×	×		
V_5		×	×	
V_6		×	×	
V_7			×	
V_8			×	×
V_9				×

Рис. 3.19. Схематическое изображение матрицы факторного отображения **A** в многофакторном анализе: V_1—V_9 — переменные; F_1—F_4 — общие факторы; характерные факторы не указаны. Крестиками обозначены высокие факторные нагрузки

3.4.5. Групповой метод

Групповой метод отличается от всех других методов выделения факторов тем, что одновременно на одном шаге получают сразу несколько факторов. Факторы, полученные на одном шаге, обычно, не ортогональны друг другу, но факторы, полученные на разных шагах, взаимно ортогональны. Кроме того, для каждого отдельного фактора, получаемого на данном шаге, не нужно вычислять матрицу остатков. Метод поэтому экономичен в смысле затрат на вычисления. Он был развит практически одновременно разными исследователями независимо друг от друга. Основная идея группового метода факторного анализа была высказана Хорстом [142; *1*] в 1937 г., но полное теоретическое обоснование метода дал Гуттман [112; *2*]. Хользингер [138; *2*] и Тэрстоун [286; *2*] первыми предложили простые вычислительные процедуры группового факторного анализа. К сожалению, название метода немного неудачно, так как его можно спутать с методом групповых факторов.

Основная отличительная особенность метода состоит в том, что вначале определяются группы переменных, которые тесно коррелируют между собой, и затем одновременно выделяется ряд факторов, из которых каждый соответствует такой группе. Итак, в данном методе каждый раз *перед* выделением факторов необходима группировка переменных, которую большей частью нельзя произвести однозначно. Матрицу остаточных коэффициентов корреляции определяют лишь после выделения нескольких факторов. Если ее элементы отличны от нуля, то к остаточной матрице, найденной после первого шага, вновь применяется та же процедура.

Тэрстоун рассматривал групповой метод как средство получения факторной матрицы, которая далее служит для решения задачи вращения. Гуттман предлагал результат группового метода считать окончательным решением, производя для этого группировку параметров таким образом, чтобы избежать вращения осей. И с третьим мнением выступает Хользингер, который признает групповой метод только тогда эффективным, когда корреляционная матрица разделима на отдельные подматрицы с рангом, равным единице, по которым выделяют факторы. При использовании ЭВМ метод не дает большой экономии во времени по сравнению с методом главных факторов или центроидным методом. Так как групповой метод используется редко, здесь не приводится более подробно его описание. Алгоритм решения этим методом и соответствующая вычислительная процедура изложены у Хармана [117].

3.5. НОВЫЕ МЕТОДЫ ФАКТОРНОГО РЕШЕНИЯ

После ретроспективного взгляда на историю развития факторного анализа уместно упомянуть новые методы, которые находят сейчас все более широкое применение. В вычислительных процедурах метода главных факторов и центроидного метода отсутствует статистический подход. Исходная корреляционная матрица воспринимается как заданная, и факторы выделяются без учета ошибки выборки, присущей корреляционной матрице. Чисто математический подход, лежащий в основе метода главных факторов и центроидного метода, не дает точного ответа на вопрос о том, сколько же факторов определяют взаимодействие m переменных в генеральной совокупности.

Лоули [182; *1*], применив метод максимального правдоподобия к модели факторного анализа, первым нашел выход из этой ситуации. Позднее Рао [230; *3*] создал так называемый канонический факторный анализ, в котором те же результаты получаются в итоге совершенно другой процедуры. Канонический факторный анализ можно рассматривать как частный случай максимально правдоподобного факторного решения. Сравнительно недавно Кайзер и Каффри [165] предложили так называемый α-факторный анализ, который связан с обоими вышеупомянутыми методами. Жореско [162] также предложил процедуру вычисления факторов, основанную на статистическом подходе. Для ознакомления с этими методами читателю необходима серьезная подготовка, поэтому мы, ограниченные рамками этой главы, не будем вдаваться в математические подробности. Попытаемся дать только краткую характеристику.

В ФРГ, по нашим сведениям, до настоящего времени метод максимального правдоподобия, канонический и α-факторный анализ применялись только в единичных случаях. Отчасти это связано с тем, что вычислительные процедуры этих методов сходятся медленно или вообще не сходятся, и для применяемых формул в большинстве случаев требуется знание приближенных оценок факторных нагрузок. Поэтому преимущества и достоинства этих методов не сразу бросаются в глаза. Особого внимания заслуживает статистический тест проверки значимости при оценке числа общих факторов, который, естественно, может быть применен только при нормальном распределении наблюдаемых переменных (см. 3.3.4). По-видимому, роль этих методов будет повышаться, особенно если к полученному факторному решению применить еще процедуру вращения.

3.5.1. Оценка факторных нагрузок методом максимума правдоподобия

Ограничимся кратким изложением сущности метода. Более подробное описание метода максимума правдоподобия имеется в книгах Лоули [182; *1*, *2*], Лоули и Максвелла [183], а также Хармана [117] и Рао [230; *3*]. Предполагается, что наблюдаемые переменные нормально распределены, а общие факторы ортогональны. В основе метода лежит фундаментальная теорема (2.27), т. е. ее выражение $\mathbf{R} = \mathbf{AA}' + \mathbf{U}^2$. Задача состоит в нахождении по выборочной корреляционной матрице $\mathbf{R}$ состоятельных и эффективных оценок неизвестных параметров в матрицах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}^2$ для генеральной совокупности. Следствием предположения о независимости общих и характерных факторов и распределения их по нормальному закону является многомерное нормальное распределение изучаемой совокупности. Для определения максимально правдоподобных оценок a_{il} и u_i^2 максимизируется функция правдоподобия. Это приводит к большому числу возможных результатов. Из них выбирается тот, который удовлетворяет условию, что

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}' [\mathbf{U}^2]^{-1} \mathbf{A} \tag{3.33}$$

является диагональной матрицей. Это условие соответствует требованию метода главных факторов о том, что каждый фактор должен учитывать максимум дисперсии. Благодаря этому устанавливается система координат и исключается произвол во вращении системы факторов. Равенство (3.33) приводится к виду, удобному для практического решения (вывод имеется, например, у Лоули и Максвелла):

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}' [\mathbf{U}^2]^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{U}^2). \tag{3.34}$$

Кроме того, имеет место равенство:

$$u_i^2 = 1 - \sum_{l=1}^{r} a_{il}^2. \tag{3.35}$$

Исходя из более или менее произвольно взятых первых приближений для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}^2$ в правой части (3.34), в левой части этого равенства получают новую матрицу $\mathbf{A}$, а из (3.35) — и новую матрицу $\mathbf{U}^2$, которые можно рассматривать как хорошие приближения к истинным матрицам. Эти полученные матрицы опять подставляются в (3.34) и (3.35), и итеративная процедура повторяется. Процесс сходится очень медленно и бывают случаи, когда достигают малой разности между последовательными итерациями, но все еще находятся далеко от истинных значений. Кроме того, имеются корреляционные матрицы, для которых итерационный процесс не сходится. Желательно вычисления начинать с наилучших из имеющихся оценок **A** и $\mathbf{U}^2$, так как цикл итераций в этом случае значительно сократится. Например, в качестве начальных условий могут быть использованы центроидные оценки. Итеративную процедуру решения уравнения (3.34) можно рассматривать в качестве особого способа определения собственных значений и собственных векторов матрицы $[\mathbf{U}^2]^{-1} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{U}^2)$, причем $\mathbf{A}'$ содержит собственные векторы, а диагональная матрица $\mathbf{J}^{-1}$ — собственные значения этой матрицы. Соответствующий тест проверки значимости числа факторов приведен в 3.3.4.

Вышеупомянутая вычислительная процедура может остаться неясной для неподготовленного читателя. С более подробным изложением метода и соответствующими математическими выкладками можно ознакомиться в оригинальных работах. Числовой пример, иллюстрирующий вычисления по методу максимального правдоподобия, имеется также в книге Лоули и Максвелла [183]. Следует указать на один важный момент при оценке факторных нагрузок этим методом: результирующие факторы инвариантны относительно изменений масштаба переменных.

3.5.2. Канонический факторный анализ

Описание канонического метода (*canonical factor analysis*) было опубликовано Рао [230; *3*] в 1955 г., однако вряд ли найдутся примеры его применения до настоящего времени. В определенной степени канонический факторный анализ противоположен методу главных факторов. Здесь не ставится задача подробного изложения процедуры вычисления. Читатель сможет ознакомиться только с принципом этого метода.

Пусть две группы переменных измеряются у n индивидуумов. Ставится вопрос, какому линейному преобразованию нужно подвергнуть каждую из двух групп переменных, чтобы две результирующие величины имели максимальную связь с этими переменными. Речь идет о так называемой *канонической корреляции*. Метод отчасти противоположен дискриминантному анализу. В дискриминантном анализе ищется максимальное разделение между двумя группами индивидуумов, в каноническом корреляционном анализе — максимальная связь между двумя группами переменных. Подробное описание метода имеется в работе Андерсона [5; *4*].

Приведенные соображения Рао положил в основу разработанного им метода. По наблюдаемым переменным выделяется фактор, имеющий наибольшие коэффициенты корреляции с наблюдаемыми переменными. По остаточной матрице выделяется второй фактор, обладающий тем же свойством, и т. д., пока все внедиагональные элементы матрицы **R** не станут практически равными нулю. В методе главных компонент выделенный первый фактор учитывает максимально возможную долю дисперсии. В *каноническом факторном анализе* факторы представляют собой гипотетические величины, имеющие максимальную связь с наблюдаемыми переменными. Важным вопросом является оценка и определение факторов по наблюдаемым переменным с наибольшей точностью. Так же как в методе максимального правдоподобия, выделенные с помощью канонического анализа факторы инвариантны относительно изменений масштаба переменных. Можно показать, что увеличение переменных на одну и ту же величину или умножение переменных на постоянную величину не приводит к изменению результирующих канонических факторов (см., например, Рао [230; *3*] или Кайзера и Каффри [165]). Для этого метода разработан точный тест проверки значимости выделенных факторов. Цель исследования определяет выбор метода. Если фактор должен учитывать максимум суммарной дисперсии переменных, то применяется компонентный анализ. Если выделенный фактор должен иметь максимальную связь с переменными — канонический факторный анализ.

3.5.3. Альфа-факторный анализ

Только что рассмотренные два метода факторного анализа, при которых результаты выборки распространяются на генеральную совокупность всех индивидуумов, являются статистическими. Предложенный Кайзером и Каффри [165] α-факторный анализ исходит из другой предпосылки. Это так называемый психометрический подход, когда на основании популяции индивидуумов, которая считается известной, пытаются судить о совокупности всех переменных. Таким образом, используется концепция генеральной совокупности переменных. Переменные являются качественно различными величинами, которые представляются лишь в форме индекса, например в экономической статистике. Индивидуумы также качественно различны, но, несмотря на это, они рассматриваются как элементы одной выборки или одной идеализированной генеральной совокупности. При психометрическом подходе направление вывода иное, чем при статистическом подходе; вывод относится к генеральной совокупности переменных, которая, разумеется, должна быть определена.

Кронбах, Раджаратнам и Глезер [106] предложили использовать коэффициент обобщенности α, под которым понимается квадрат коэффициента корреляции наблюдаемой переменной с действительной переменной (взятой из генеральной совокупности всех мыслимых величин). Этот коэффициент отражает общую долю дисперсии наблюдаемой переменной и ее действительной величины. Коэффициент обобщенности представляет собой расширение понятия надежности. Кайзер это понятие применил к факторному анализу. Он выделяет такие факторы в предложенном им α-факторном анализе, которые обнаруживают максимальную корреляцию с соответствующими факторами генеральной совокупности переменных. Это основная идея метода.

Более подробно с методом можно ознакомиться в оригинальной работе Кайзера и Каффри [165]. Факторы, выделенные этим методом, как и в каноническом факторном анализе, не зависят от увеличения переменных на одну и ту же величину и умножения их на постоянную величину. В то время как в каноническом факторном анализе критерий значимости при оценке числа оставляемых факторов зависит от числа исследованных индивидуумов, в α-факторном анализе он зависит от числа исследованных переменных. Выделяются все факторы, которым соответствуют собственные значения, превышающие единицу, так как таким факторам соответствуют положительные значения коэффициентов α. Оставляются только те факторы, которые являются наиболее общими среди факторов генеральной совокупности переменных. Альфа-факторы выделяются в порядке уменьшения их обобщенности. С увеличением числа наблюдаемых переменных возрастает число оставляемых факторов.

Точных критериев сходимости метода пока не имеется. Во встречающихся на практике задачах итеративный процесс большей частью сходится. К сожалению, пока еще накоплено мало опыта по применению α-факторного и других упомянутых выше новых методов. Можно надеяться, что в ближайшие годы значение этих методов в практике исследования значительно возрастет.

3.6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ВЫДЕЛЕНИЯ ФАКТОРОВ

До сих пор при рассмотрении способов решения проблемы факторов почти не затрагивался вопрос о том, насколько результаты этих решений соответствуют друг другу или сравнимы между собой. Теперь следует показать, что различные факторные решения взаимосвязаны, поскольку исходным материалом является одна и та же корреляционная матрица с теми же самыми диагональными элементами.

Имеется бесконечно много систем координат, в которых можно представить корреляционную матрицу. Взаимосвязи двух таких систем координат формально выражаются следующим равенством:

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{G}\mathbf{G}', \tag{3.36}$$

где $\mathbf{A}$ — факторное отображение первого решения, а $\mathbf{G}$ — факторное отображение второго решения, полученного другим методом. Причем оба решения могут содержать различное число выделенных факторов. Исследование взаимосвязи между двумя факторными решениями сводится к поиску матрицы преобразования, переводящей одну систему координат в другую и позволяющей представить одно факторное решение через другое. Для ортогональных факторных отображений, полученных по одной и той же корреляционной матрице (с теми же диагональными элементами), всегда можно найти матрицу преобразования $\mathbf{T}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{G}. \tag{3.37}$$

Для любой матрицы имеет место соотношение

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \mathbf{I}. \tag{3.38}$$

Умножив слева обе части (3.37) на $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$, получим формулу для матрицы преобразования:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{G}. \tag{3.39}$$

В силу того, что факторы ортогональны, матрица $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ диагональна. Ее обратная матрица поэтому всегда существует и ее легко определить. Таким образом, исходя из $\mathbf{A}$ и $\mathbf{G}$ по равенству (3.39) можно найти матрицу преобразования $\mathbf{T}$, позволяющую переводить результат одного метода в результат другого. Аналогично для двух матриц факторных значений **P** и **M** можно показать, что

$$\mathbf{AP} = \mathbf{GM}, \qquad (3.40)$$

откуда следует

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}'\mathbf{GM} = \mathbf{TM}. \qquad (3.41)$$

Итак, с помощью **T** можно переводить значения факторов одного решения в значения факторов другого решения, т. е. матрица **T** позволяет выяснить взаимосвязь между двумя факторными решениями.

Покажем на примере построение матрицы **T** по формуле (3.39). В первые две строки табл. 3.27 перенесен результат центроидного решения из табл. 3.17, обозначенный **G**′. В строки 3 и 4 перенесен результат метода главных факторов из табл. 3.6 и 3.11, обозначенный **A**′. Затем поэтапно проводится вычисление по формуле (3.39), а именно слева направо. В строках 13 и 14 производятся контрольные вычисления **AT**. Как видно, результаты этих строк практически совпадают со значениями строк 1 и 2. Разницу можно отнести к ошибкам округления.

Таблица 3.27

Построение матрицы T по формуле (3.39) с использованием результатов решений с помощью метода главных факторов (A) и центроидного метода (G), заимствованных из табл. 3.6, 3.11, 3.17 и 3.21

G′ Центроидный метод	1 2	0,7392 —0,5190	0,6232 —0,5076	0,5983 —0,3735	0,5460 0,5875	0,5393 0,4588	0,3569 0,3537
A′ Метод главиых факторов	3 4	0,8619 —0,2703	0,7448 —0,3051	0,6815 —0,1782	0,3477 0,7246	0,3785 0,5971	0,2339 0,4435
A′·**A**	5 6	2,0809 0,0000	0,0000 1,2762				
$(\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A})^{-1}$	7 8	0,4806 0,0000	0,0000 0,7836				
$(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$	9 10	0,4142 —0,2118	0,3579 —0,2391	0,3275 —0,1396	0,1671 0,5678	0,1819 0,4679	0,1124 0,3475
$\mathbf{T}=(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{G}$	11 12	0,9546 0,2976	—0,2976 0,9546				
Проверка **AT**=**G**	13 14	0,7432 —0,5145	0,6202 —0,5129	0,5975 —0,3729	0,5476 0,5882	0,5390 0,4574	0,3554 0,3538

Данная проблема заключается в том, чтобы по двум факторным отображениям найти матрицу преобразования, позволяющую от одного отображения переходить к другому. В противоположность этому проблема вращения (раздел 5) состоит в том, чтобы исходя из данного факторного отображения **A** найти такую матрицу преобразования **T**, чтобы произведение **AT** давало матрицу, удовлетворяющую определенным критериям. Эту проблему решить сложнее, чем первую. Основным затруднением при этом является точное определение критериев, которые оценивают наилучшее положение системы координат, найденное в процессе вращения.

Для того чтобы можно было бы от одного факторного решения переходить к другому, необходимо исходить в обоих методах решения из одиой и той же редуцированной корреляционной матрицы $\mathbf{R}_h$. Факторные решения методов, в вычислительных процедурах которых изменяются общиости, в общем случае не допускают перехода от одного к другому. И напротив, для перехода от одного решения к другому не имеет решающего значения тот факт, что в одном случае был выделен только 1 фактор, а в другом — 2 или 3 фактора. Факторное отображение с меньшим числом факторов является подпространством, гиперплоскостью полного факторного отображения с большим числом факторов.

Задача, поставленная в форме решения равенства (3.37), возникает редко. Задача связана с обращением r-мерной матрицы, и она значительно усложняется при коррелированных факторах. Однако ее постановка важна по дидактическим соображениям. *Факторные отображения одной и той же редуцированной корреляционной матрицы эквивалентны друг другу, если они содержат одинаковое число факторов.* Если одно факторное отображение содержит меньше факторов, то оно соответствует подпространству другого факторного отображения. Это еще раз подтверждает неопределенность решения факторной проблемы. В зависимости от накладываемых ограничений факторная проблема имеет то или иное решение. Результаты одного метода можно не только переводить в результаты другого, но и путем вращения изменять набор факторных нагрузок. Окончательное положение осей координат, полученное в результате процедуры вращения, весьма условно зависит от первоначального решения факторной проблемы. При условии, что в самих данных заложено простое факторное объяснение, наилучшим считается такое положение осей координат, которое дает наиболее явную простую структуру (см. раздел 5).

Иногда уже после проведения факторного анализа обнаруживают ряд переменных, коррелирующих с уже известными. В этом случае возникает вопрос: нужно ли повторно проводить весь анализ с учетом новых переменных? Поскольку это связано с дополнительными расходами, пытаются подключить новые переменные к результату уже проведенного анализа, который, естественно, должен претерпеть при этом некоторые изменения. В подобных случаях пользуются методом, получившим название повторного анализа. Метод позволяет определить связь новых переменных с факторами, выделенными по результатам первоначального анализа. Дуайер [79; *1*] разработал вычислительную процедуру, благодаря которой по известным факторным нагрузкам и установленной корреляции новых переменных со старыми получают оценки вкладов от известных факторов в дисперсии этих новых переменных. При этом исходят из того, что нагрузки факторов уже имеющегося факторного отображения не изменяются от введения новых переменных.

Мы здесь отказываемся от более подробного изложения метода Дуайера. Метод приведен в книге Фрюхтера [101]. Его вычислительная процедура связана с обращением матрицы и объем вычислительных работ не меньше, чем если бы это было связано с проведением нового анализа.

3.7. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ФАКТОРНОЙ ПРОБЛЕМЫ

В этом разделе рассматривались важнейшие методы решения факторной проблемы и некоторые из них были описаны достаточно подробно. Естественно, возникает вопрос: каким методом при каких обстоятельствах следует пользоваться? Как показывает практика, решающую роль в выборе метода играют как уровень образования и накопленный опыт исследователя, так и имеющаяся в его распоряжении ЭВМ и ее программное обеспечение.

Самым простым и не требующим особых вспомогательных средств, за исключением обычных клавишных вычислительных машин, является *центроидный метод*. Каждый, кто серьезно занимается факторным анализом, должен исходя из дидактических соображений выполнить вычисления по центроидному методу, чтобы хорошо прочувствовать его особенности и понять технику классического анализа. На графике легко изобразить распределение дисперсии факторов по переменным и провести проверку остатков. Проверка значимости числа выделенных факторов выполняется по формуле (3.30), для чего тоже не требуется особых вспомогательных средств.

При научных исследованиях обычно употребляют метод главных факторов, разумеется, с использованием ЭВМ. Вначале применяют вычислительную процедуру компонентного анализа для получения собственных значений корреляционной матрицы **R** с последующей проверкой по критерию отсеивания. После принятия решения о выделении определенного числа факторов соответствующим образом подбирают значения общностей (см. раздел 4) и далее приступают к анализу факторов с использованием этих общностей. По формуле (3.30) производят оценку значимости числа выделенных факторов. При принятии окончательного решения о числе оставляемых факторов пользуются рекомендациями, приведенными в 3.3.6. Вслед за этим применяется процедура вращения, которая будет описана далее в разделе 5. В заключение находят значения факторов по методам, обсуждаемым в разделе 6, и определяют точность этих оценок.

Для применения новых методов факторного анализа необходимы ЭВМ с соответствующим образом разработанными программами. Опыт использования новых методов еще незначителен. Метод главных факторов пока еще остается самым распространенным способом выделения факторов.

4. ПРОБЛЕМА ОБЩНОСТИ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

По определению, общность h_i^2 переменной i равна сумме квадратов нагрузок общих факторов (см. формулу (2.20)). Форма записи общности h_i^2 указывает на то, что речь идет о компоненте дисперсии. Так как дисперсия каждой i-й переменной приводится к единице, общность является долей единичной дисперсии, которая обусловливается общими для нескольких переменных факторами. Из равенств (2.24)—(2.28) следует, что подбор диагональных элементов матрицы **R** равносилен определению общей дисперсии каждой переменной. Общности, следовательно, являются диагональными элементами корреляционной матрицы. Оценка величин диагональных элементов должна производиться перед выделением факторов, и это составляет проблему общности.

Необходимость подбора значений общностей меньше единицы, вытекает из модели факторного анализа. Модель классического факторного анализа содержит ряд общих факторов и по одному характерному на каждую переменную. Таким образом, каждая переменная обладает общностью, которая должна быть меньше единицы. В предельном случае, когда общая дисперсия приближается к единице, общность также равна единице. Из формулы (2.19) следует, что если сумма членов в скобках, т. е. h_i^2, приближается к единице, то значения специфичности b_i^2 и дисперсии, обусловленной ошибкой, должны быть около нуля, так как полная дисперсия s_i^2 согласно введенному определению не должна превышать единицы. Такой крайний случай, когда дисперсия ошибки и специфичность равны нулю, на практике не встречается, так как погрешности измерения всегда присутствуют в экспериментах в той или иной мере, а b_i^2 только тогда равна нулю, когда одна и та же переменная два раза включается в анализ. В этом случае специфичные факторы обеих одинаковых переменных становятся одним общим фактором. В модели факторного анализа проводится различие между общими и характерными факторами. К модели компонентного анализа это требование не предъявляется (см. с. 103).

Итак, общности могут принимать значения от нуля до единицы. При известной корреляционной матрице эту область принятия значений можно ограничить еще больше. Дуайер [79; *2*] доказал, что всегда имеет место неравенство

$$R_{i\cdot 12\ldots)i(\ldots m}^2 \leqslant h_i^2 \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

где $R_{i\cdot 12\ldots)i(\ldots m}$ — коэффициент множественной корреляции i-й переменной с остальными (m — 1) переменными. Квадрат этого коэффициента является нижней границей оценки общности. Кроме того, Гуттман [112; *1*] показал, что при неограниченном возрастании числа переменных при постоянном числе факторов значение общности каждой i-й переменной приближается к квадрату коэффициента множественной корреляции, т. е. в (4.1) обеспечивается равенство. Верхняя граница значения общности определяется формулой (2.22). К сожалению, коэффициент надежности r_{ii} вычисляется в редких случаях, так как повторные измерения производятся не часто. Таким образом, можно сделать вывод, что общность переменной не меньше квадрата коэффициента множественной корреляции и не превосходит квадрата коэффициента надежности[1].

$$R^2_{i\cdot 12\ldots)i(\ldots m} \leqslant h_i^2 \leqslant r_{ii}^2, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.2}$$

Определение общности переменной как суммы квадратов нагрузок общих факторов формально и не дает однозначного ответа при оценке общности. Уже из определения общности видно, что она тесно связана с числом общих факторов. Проблема общности является уязвимым местом многофакторного анализа. Мнения отдельных авторов о способах оценки общностей сильно расходятся. В научной литературе ведется обширная дискуссия на разных теоретических уровнях, результатом которой являются различные предложения от простых вычислительных процедур до сложных математических выкладок. При разработке методов оценки общностей исходят из различных концепций. В итоге в настоящее время разработано довольно много вычислительных процедур; некоторые из них мы коротко разберем. Но это не означает, что мы претендуем на право подвести итоги дискуссии по данной проблеме и тем самым завершить ее.

Тэрстоун предлагал при оценке общности исходить из выборочных коэффициентов корреляции, стремясь при подборе h_i^2 к уменьшению ранга исходной матрицы $\mathbf{R}$. Основная идея состоит в том, что выборочные коэффициенты корреляции должны определять значения общностей или что по меньшей мере выбранные значения общностей должны удовлетворять заданному рангу корреляционной матрицы. Тэрстоун указал только эмпирические методы и разработал практические вычислительные процедуры без достаточного теоретического обоснования. Для проверки проведенных выкладок коэффициенты корреляции, вычисленные по найденным значениям общностей, сравниваются с выборочными характеристиками. Оценка общностей считается удовлетворительной при наименьшем из возможных различий.

Другие авторы много занимались поиском аналитических решений проблемы (например, Альберт [4]). Проблема общности и факторная проблема тесно переплетены между собой. Если значения общностей

[1] Обоснование дальнейшего сужения области возможных значений общности приведено в работах Дарроха [72] и Маданского [198; *2*].

установлены, то все элементы матрицы $\mathbf{R}_h$ определены и тем самым установлен ранг этой матрицы, т. е. минимально необходимое число факторов, вызывающих корреляцию переменных. Могут иметь место два альтернативных случая. В первом случае вначале определяют общности, а затем число выделяемых факторов (прямая оценка общностей). Во втором случае сначала устанавливают число r факторов, подлежащих выделению, а затем подбирают значения общностей таким образом, чтобы ранг матрицы $\mathbf{R}_h$ приближался к этому числу r. Продолжительное время проблема общности формулировалась следующим образом: при известных недиагональных элементах матрицы $\mathbf{R}$ нужно подобрать такие значения диагональных элементов, чтобы ранг полученной редуцированной матрицы $\mathbf{R}_h$ был по возможности минимальным. Но эта формулировка и нахождение оценок общностей при минимальном ранге используются только при аналитическом подходе к решению проблемы. Имеются другие методы, дающие более правдоподобные оценки общностей.

Определение общностей в статистических терминах дано Лоули [182; *1*] и Рао [230; *3*]. Это такие величины, которые при статистически значимых факторах делают возможным наилучшее воспроизведение корреляционной матрицы. Значимые факторы и общности получаются в результате итеративных процедур.

На практике при определении общностей в конкретном случае выбор теоретического подхода имеет второстепенное значение. Как будет еще показано, при большом числе переменных вполне достаточно грубых оценок. Читатель, интересующийся теоретическими вопросами, может обратиться к обзору, приведенному у Хармана [117], а также к публикациям Альберта [4; *2*], Гуттмана [112] и Райгли [323]. В большинстве случаев решение проблемы общности состоит в нахождении соответствующих значений h_j^2, которые определяют общую дисперсию каждой переменной и удовлетворяют двойному неравенству (4.2).

4.2. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК ОБЩНОСТЕЙ

Разработано много способов предварительных оценок общностей. Один Тэрстоун [286; *6*] предложил 12 различных способов. Но никто пока не дал исчерпывающего теоретического их обоснования. На практике выбор происходит в зависимости от имеющейся в распоряжении машинной программы и от личных склонностей исследователя. При такой неблагоприятной ситуации счастливым обстоятельством является тот факт, что при большом числе переменных неточные оценки общностей большей частью не оказывают сильного влияния на финальное факторное решение. Далее указываются три важных способа и обсуждаются их свойства, так что читатель сможет при конкретных исследованиях выбрать наиболее подходящий из них. Для полноты представления проблемы коротко упоминаются несколько других способов оценок. К сожалению, имеется пока мало работ, посвященных сравнению точности полученных оценок различными способами, хотя такие исследования относительно легко провести путем моделирования на ЭВМ.

4.2.1. Способ наибольшей корреляции

Хорошо зарекомендовал себя способ предварительной оценки общности, заключающийся в выборе наибольшего коэффициента корреляции данной переменной с остальными переменными. На главной диагонали записывается с положительным знаком наибольший коэффициент корреляции данного столбца матрицы **R**, независимо от его исходного алгебраического знака. Никаких дополнительных вычислений при этом не требуется. Тэрстоун и его последователи часто пользовались этим простым способом, особенно в соединении с центроидным методом. Этот способ оценки общностей уверенно можно рекомендовать при большом числе переменных. Благодаря своей простоте он наиболее распространен. Теоретически этот способ не обоснован. Наибольший коэффициент корреляции в столбце матрицы **R** не имеет непосредственной связи с общностью. Коэффициент корреляции является случайной величиной и каждое его возможное значение зависит от случайных обстоятельств. Использование его наибольшего значения в качестве общности дает лишь предварительную довольно грубую оценку, которая может оказаться как меньше, так и больше истинного значения общности. Этот способ рекомендуется использовать в случае отсутствия ЭВМ и при большом числе переменных порядка 10—20. Тогда способ дает результаты, незначительно отличающиеся от полученных более точными методами.

4.2.2. Использование квадрата коэффициента множественной корреляции

В формуле (4.1) $R^2_{i \cdot 12 \ldots) i (\ldots m}$ указывался как нижняя граница общности. Благодаря Гуттману [112; *1*] известно, что с увеличением числа переменных при постоянном числе факторов эта нижняя граница сходится к истинному значению общности. Выбор квадрата множественной корреляции (КМК) в качестве оценки общности, кроме этого свойства сходимости, привлекателен также по другим причинам. Коэффициент $R^2_{i \cdot 12 \ldots) i (\ldots m}$ известен из регрессионного анализа. Значение КМК является мерой дисперсии данной переменной, общей с другими переменными исследуемого множества, в то время как общность является мерой дисперсии i-й переменной, обусловленной общими для нескольких переменных факторами. Разность между ними является общей дисперсией, которая может быть приписана только i-й переменной. Райгли по праву высказывает сомнение о пользе вычисления этой разности для оценки общей дисперсии и тем самым общности. По его мнению выбор значений КМК в качестве оценки общности позволяет избежать ряд затруднений, возникающих при других подходах. Райгли аргументирует это тем, что значения КМК не превышают истинных значений общности, являются объективной мерой общей дисперсии рассматриваемого набора переменных. Значения КМК однозначно вычисляются по каждой корреляционной матрице. Райгли называет их «наблюденными общностями». В пользу их выбора в качестве оценок общностей говорит также тот факт, что число факторов, подлежащих выделению, не непосредственно связано с определением точных значений общностей.

Значения КМК для каждой переменной удобно вычислять с помощью обратной корреляционной матрицы по формуле

$$R^2_{i.12\ldots)i(\ldots m} = 1 - \frac{1}{r^{ii}}, \tag{4.3}$$

где r^{ii} — диагональный элемент матрицы $\mathbf{R}^{-1}$.

Обращение малых матриц можно производить с помощью клавишных вычислительных машин по методу, описанному в гл.1.4. При большом числе переменных, конечно, необходима ЭВМ.

Выбор КМК в качестве оценки общности в настоящее время наиболее теоретически обоснован и чаще всего рекомендуется. Значения КМК получают как побочный результат вычислений на ЭВМ при использовании метода главных компонент. Такая процедура дает лучший результат по сравнению с факторным анализом по центроидному методу с выбором в качестве оценок общностей наибольших коэффициентов корреляции.

4.2.3. Итеративная процедура

Следует упомянуть еще один распространенный способ определения общностей, который оправдал себя во многих случаях на практике, но связан с большим объемом вычислений. Поэтому процедуру, соответствующую этому способу, следует выполнять на ЭВМ. Вначале принимается решение о выделении определенного числа факторов с помощью методов, описанных в гл. 3.3. Например, вычисляются собственные значения матрицы **R**. Затем выбирают предварительные оценки общностей, в качестве которых могут быть использованы КМК. По этим значениям диагональных элементов матрицы **R** с помощью метода главных факторов выделяется r факторов. По факторному отображению вычисляют новые оценки общностей. Опять выполняется процедура выделения r факторов с помощью метода главных факторов по матрице **R** с новыми диагональными элементами. Процесс повторяется до тех пор, пока вычисленные диагональные элементы не перестанут меняться от итерации к итерации. На практике процедура данного способа часто сходится, хотя формального обоснования сходимости итеративного процесса не существует. Теоретически пока не доказано, при каких условиях такая сходимость осуществляется и совпадают ли достигнутые предельные значения с истинными величинами общностей. Вполне возможно также, что данная процедура приведет к значениям общностей, сильно отклоняющихся от истинных. Поэтому нет теоретических оснований рекомендовать данный способ. В любом случае при выборе начальных значений общностей следует соблюдать границы, указанные формулой (4.2).

Сравнивая между собой различные способы приближенных оценок общностей на скорость сходимости, Райгли эмпирическим путем показал, что в качестве первоначальных оценок при подобных итеративных процедурах особенно пригодны КМК. В принципе в качестве исходных значений общностей можно взять любые числа в пределах от нуля до единицы. Можно исходить также из наибольших значений коэффициентов корреляции каждого столбца матрицы **R**. Однако во многих исследованиях с приложением метода главных факторов отдается предпочтение значениям КМК. Итеративную процедуру определения общностей при малых матрицах можно выполнить на клавишных вычислительных машинах, применив при этом центроидный метод выделения факторов и ограничиваясь небольшим циклом итераций. При ручном счете затраты времени не являются принципиальным вопросом, особенно при достижении определенных успехов в анализе. Однако даже при наличии необходимых программ расчеты на ЭВМ требуют значительных затрат машинного времени, что может представить в ряде случаев некоторую проблему. Если при этом в качестве первоначальных оценок общностей выбираются КМК, то в результате факторного решения получают новые значения общностей, которые сравниваются с исходными. В общем случае должна быть достигнута незначительная разница между ними. Кайзером [164; *3*] и Гуттманом [112; *12*] были предложены другие итеративные процедуры оценок общностей, где на каждом цикле итераций нужно производить обращение матрицы $\mathbf{R}_{\hat{h}}$, что, естественно, связано с большим объемом вычислений. К тому же не обеспечивается сходимость данных процедур.

4.2.4. Обзор других способов вычисления оценок общностей

Большинство авторов предпочитают один из трех упомянутых выше способов оценок общностей. Однако кроме этих способов существует много других, и хотя их практическая ценность значительно меньше, с некоторыми из них все же следует познакомиться. С одной стороны, обилие этих способов может вызвать у читателя чувство растерянности, но, с другой стороны, широкое знакомство с ними будет способствовать лучшему пониманию проблемы и значительно обогатит его кругозор. Чтобы завершить рассмотрение проблемы общности, коротко обсудим эти способы и сформулируем некоторые рекомендации по их применению.

Барт одним из первых использовал в качестве диагональных элементов матрицы **R** числа, отличные от единицы. Он исходил из *коэффициентов надежности*, которые он дополнительно занижал. Концепция надежности в литературе по психометрии претерпевала постепенно изменения, и понятие надежности имело различные определения. В самом простом случае под надежностью понимается корреляция результатов повторных или параллельных тестов, т. е. коэффициент надежности является коэффициентом корреляции между двумя реализациями одного и того же же теста или между его близкими вариантами. Более точное определение приведено Гилфордом [108; *2*] и Линертом [189, *2*]. Таким образом, коэффициент корреляции измеряет надежность переменной. Так как по формуле (4.2) квадрат коэффициента надежности является верхней границей общности, для каждой переменной можно определить надежность и тем самым верхнюю границу общности. Если надежность непосредственно использовать в качестве оценки, то исключается возможность учета специфической дисперсии. Разница между надежностью и найденной общностью, принятой за истинную, является мерой специфической дисперсии, присущей только одной определенной переменной (см. формулу (2.21)). Целью дальнейших исследований можно считать уменьшение специфической дисперсии каждой переменной путем включения в анализ новых переменных, Перед проведением факторного анализа всегда рекомендуется определять коэффициенты надежности, даже если это связано с увеличением расходов на эксперименты. Переменные, характеризующиеся малой надежностью, в факторный анализ не должны включаться.

Разработаны три следующих способа оценки общности, которые дают большей частью заниженные результаты по сравнению с истинными значениями. Верхней границей общности является значение надежности. Так, можно в качестве оценки общности принимать *средние коэффициенты корреляции* столбца или строки.

$$\hat{h}_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} r_{ik}, \quad i \neq k. \tag{4.4}$$

Ясно, что это значение должно быть меньше наибольшего коэффициента корреляции каждого столбца и в общем является небольшой величиной. Промежуточное положение в использовании наибольшего и среднего коэффициентов корреляции занимает метод *триад*. В столбце матрицы **R** отыскиваются два наибольших коэффициента корреляции r_{hk} и r_{ek}. Их значения вместе с коэффициентом корреляции между обеими переменными h и e подставляются в следующую формулу:

$$\hat{h}_i^2 = r_{hk} \cdot r_{ek}/r_{he}. \tag{4.5}$$

В оценке общностей, полученных по этой формуле, усиливается влияние наибольших коэффициентов корреляции. Другой способ, связанный с несколько большим объемом вычислений, *основан на определении первого центроидного фактора*. Для этого вначале на главную диагональ матрицы **R** помещают наибольшие коэффициенты корреляции каждого столбца. Затем по полученной матрице вычисляют отношение квадрата суммы элементов i-го столбца к сумме всех коэффициентов корреляции.

$$\hat{h}_i^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} r_{ki} \right)^2 \Big/ \sum_{i,\,k=1}^{m} r_{ik}. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) всегда дает оценку общности снизу, так как в ней учитывается только первый центроидный фактор. Еще одна оценка общности, которая уже несколько раз упоминалась, основана на *методе максимального правдоподобия*, использованном Лоули в факторном анализе. Так как накоплено мало опыта получения оценок этим методом, он здесь не разбирается подробно. Вполне возможно, что в будущем этот метод и выдвинется на передний план, но пока практикой это не подтверждается, что объясняется медленной сходимостью процесса. Бывали случаи, когда сходимость вообще не наступала. Окончательного вывода о применимости метода еще не сделано.

4.3. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ОЦЕНКИ ОБЩНОСТИ НА ОДНОМ ПРИМЕРЕ

Если способ дает завышенные значения общностей, то часть характерной дисперсии переходит в общую дисперсию, что вызывает изменение факторного отображения. Если способ дает заниженные значения общностей, то происходит потеря части общей дисперсии для процесса выделения факторов. Неточность оценок общностей почти не сказывается на факторном решении, полученном центроидным методом или методом главных факторов, если располагают более чем 10—20 переменными. С увеличением числа переменных удельный вес диагонального элемента среди всех элементов данного столбца матрицы **R** уменьшается, благодаря чему он оказывает все меньшее влияние на определение центра тяжести и главных осей. Последующее вращение сглаживает допущенные ошибки в оценках, и качество оценок в итоге не оказывает влияния на интерпретацию факторов. Поэтому с точки зрения практики при большом числе переменных не так уж важно иметь точные оценки общностей. При малом числе переменных качество оценок оказывает влияние на факторное решение. Поэтому исследователю рекомендуется включать в анализ побольше переменных. При двадцати и более переменных не приходится опасаться ошибок в оценках общностей.

Для того чтобы проиллюстрировать описанные способы оценки общностей, рассмотрим пример с набором из двенадцати переменных. Соответствующая корреляционная матрица была приведена в табл. 3.14. Значения элементов матрицы для краткости были указаны только до второго знака. Эксперимент состоял в повторных измерениях систолического и диастолического кровяного давления у 90 студентов мужского пола (см. также с. 265). В первых двух столбцах табл. 4.1 приведены значения наибольшего коэффициента корреляции r_{max} соответствующего столбца и квадраты коэффициентов множественной корреляции одной переменной со всеми остальными (КМК), вычисленные с точностью до четвертого знака после запятой. Видно, что элементы этих столбцов мало отличаются друг от друга. Значительное расхождение наблюдается только у девятой переменной.

По этим предварительным оценкам общностей был проведен анализ главных факторов. Кроме того, была проведена итеративная процедура в десять циклов по нахождению общностей исходя из начальных их значений, равных КМК. Результаты этих трех методов приведены в правой части табл. 4.1. Сравнение полученных в результате факторного решения значений общностей показывает, что практически их величины не различаются. Вычисленные факторные отображения также мало отличаются друг от друга.

Незначительность отклонений частично объясняется относительно высокой корреляцией между переменными. При небольших коэффициентах корреляции результаты методов не так хорошо согласуются между собой. При графической иллюстрации факторного отображения эта разница едва была бы заметна. После выполнения процедуры вращения до получения простой структуры эта разница никак не сказалась бы на интерпретации факторов. Сравнение различных методов оценок общностей на числовых примерах приведено в работах Хармана [117], а также Медланда [202].

Из всего сказанного ясно, что для решения проблемы общностей разработано удовлетворительное с точки зрения практики количество методов. Но с точки зрения теории достаточно приемлемого метода не имеется.

Таблица 4.1

Факторные отображения при различных оценках общностей, произведенных по корреляционной матрице в табл. 3.14

	r_{max}	КМК	Наибольший коэффициент корреляции $r_{max}=\hat{h}_i^2$			КМК$=\hat{h}_i^2$			Оценка $\hat{h}_i^2$ путем итерации		
			F_1	F_2	h_i^2	F_1	$-F_2$	h_i^2	F_1	F_2	h_i^2
1	0,9211	0,9014	0,8427	—0,4449	0,9082	0,8418	—0,4460	0,9077	0,8433	—0,4498	0,9135
2	0,9197	0,8897	0,7852	0,4714	0,8388	0,7840	0,4675	0,8332	0,7864	0,4699	0,8393
3	0,9294	0,9070	0,8239	—0,4615	0,8918	0,8228	—0,4623	0,8908	0,8259	—0,4692	0,9023
4	0,9438	0,9044	0,6530	0,5620	0,7422	0,6511	0,5539	0,7308	0,6543	0,5609	0,7427
5	0,9293	0,8959	0,8467	—0,4158	0,8897	0,8443	—0,4148	0,8849	0,8458	—0,4186	0,8907
6	0,9438	0,9031	0,6585	0,5319	0,7165	0,6564	0,5238	0,7052	0,6602	0,5316	0,7185
7	0,9425	0,9194	0,8676	—0,4033	0,9154	0,8664	—0,4040	0,9138	0,8695	—0,4100	0,9242
8	0,9196	0,8965	0,7960	0,4512	0,8373	0,7955	0,4490	0,8344	0,7991	0,4532	0,8439
9	0,8199	0,7011	0,7461	—0,4015	0,7179	0,7357	—0,3860	0,6902	0,7364	—0,3886	0,6933
10	0,9283	0,9458	0,8378	0,4202	0,8784	0,8412	0,4242	0,8875	0,8446	0,4275	0,8961
11	0,9423	0,9260	0,8561	—0,4445	0,9306	0,8556	—0,4461	0,9310	0,8578	—0,4511	0,9394
12	0,9283	0,9044	0,8137	0,4164	0,8354	0,8130	0,4142	0,8326	0,8158	0,4167	0,8392
Процент от суммарной общности Σh_i^2			75,45%	24,54%		75,61%	24,38%		75,35%	25,64%	

● 5. ПРОБЛЕМА ВРАЩЕНИЯ

Возможность и необходимость вращения были наглядно продемонстрированы в параграфе (2.3.3). Вращение системы координат и изменение факторных нагрузок необходимы, так как процедура выделения факторов имеет не однозначное решение, а бесконечно много эквивалентных решений, которые все одинаково хорошо удовлетворяют равенству $\mathbf{R}_h = \mathbf{AA}'$. Лишь благодаря введению ограничений, которые однозначно устанавливают положение системы координат, проблема факторов становится численно разрешима. Например, при проведении анализа главных факторов система координат приводится в фиксированное положение, обусловленное дополнительными условиями. Оси, соответствующие факторам, ортогональны, и их направления устанавливаются последовательно, по максимуму оставшейся дисперсии. Но полученные таким образом координатные оси большей частью содержательно не интерпретируются. Поэтому в пространстве общих факторов отыскивают другое, предпочтительное положение системы координат путем вращения системы вокруг ее начала, представляющего собой в то же время нулевую точку конфигурации векторов. Конфигурация векторов представляет собой неизменный элемент.

Целью вращения в принципе является нахождение нами в пространстве общих факторов одной из возможных систем координат, которая должна быть наложена на конфигурацию векторов для получения факторной структуры. Конфигурация — это система векторов, соотношения между которыми остаются постоянными. Чтобы вообще можно было изобразить конфигурацию векторов, при выделении факторов должна быть выбрана определенная система координат. В проблеме вращения речь идет о выборе одной из многих возможных систем координат в пространстве общих факторов. В этом случае решающая роль принадлежит критериям вращения, которые позволяют оставить одно, с определенной точки зрения оптимальное, положение системы координат для изображения конфигурации.

В алгебраических терминах проблему вращения можно сформулировать следующим образом. Пусть задано ортогональное факторное решение $\mathbf{R}_h = \mathbf{AA}'$. Тогда существует бесконечно много $\mathbf{A}^{\cdot}$, которые можно соответствующим путем преобразовать друг в друга и в $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^{\cdot} = \mathbf{AT}, \text{ причем } \mathbf{R}_h = \mathbf{AA}' = \mathbf{A}^{\cdot}\mathbf{A}^{\cdot\prime}. \tag{5.1}$$

При осуществлении вращения необходимо найти матрицу преобразования $\mathbf{T}$, которая переводит матрицу $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}^{\cdot}$, причем для $\mathbf{A}^{\cdot}$ должны выполняться определенные условия, и она должна удовлетворять определенным критериям. Если четко сформулировать эти условия и критерии, то можно получить однозначное аналитическое решение. В гл. 3.6 при обсуждении вопроса эквивалентности различных методов выделения факторов проблема заключалась в нахождении матрицы преобразования, удовлетворяющей равенству 3.37, причем **A** и **A**˙ задавались. Найти такую матрицу не составляет большого труда. Значительно сложнее определить матрицу преобразования **T** при решении проблемы вращения, так как при этом известна лишь матрица **A**, а сведения об **A**˙ заменяются некоторыми требованиями о наилучшем положении системы координат.

Проблему вращения можно сформулировать в геометрических и алгебраических терминах, в соответствии с чем образовались два подхода к ее решению. Первый из них связан с графическим изображением осей, которые проводятся через облака (скопления) точек. Второй подход, не имеющий наглядного представления, связан с аналитическими методами. Аналитические методы вращения требуют большого объема вычислительных работ, поэтому для них разработаны программы на ЭВМ. Следует заметить, что не всегда выполнение вычислительных процедур на быстродействующих ЭВМ приводит к лучшему результату, чем так называемое субъективное решение задачи вращения вручную с использованием геометрических представлений. В связи с этим оба подхода полезно комбинировать.

Далее вначале формально показываются возможности выполнения вращения. В гл. 5.1 обсуждаются общие вопросы проблемы вращения в пространстве общих факторов при получении ортогонального и косоугольного решений. Основная трудность состоит в выборе критериев, которыми надо руководствоваться при выполнении вращения. Особую роль при этом играет концепция простой структуры, которая обсуждается в гл. 5.2. Как практически осуществляется вращение системы координат при поиске простой структуры, показано в гл. 5.3. Описание матриц, появляющихся при решении проблемы вращения, и их взаимосвязь приведена в гл. 5.4. Так как вычислительная процедура вращения состоит из нескольких циклов с переменным числом повторений, то ее осуществление вручную связано с многочисленными графическими изображениями и перемножением матриц. Выполнять соответствующие вычисления, приводящие к определению нового положения системы и новых проекций, довольно затруднительно. Поэтому вынуждены были разрабатывать аналитические критерии вращения, которые делали бы возможным решение проблемы на ЭВМ за один прогон соответствующей программы. Эти критерии представлены в гл. 5.5. В примере, приведенном в гл. 5.6, еще раз описывается процедура, рекомендуемая для выполнения вращения. Кроме концепции простой структуры в литературе приводятся другие критерии вращения, но они не нашли широкого применения. Эти критерии рассматриваются в гл. 5.7. Благодаря введению косоугольных факторов оказалось возможным определение факторов второго и более высокого порядка. Этому вопросу посвящена гл. 5.8. Обсуждение проблемы вращения заканчивается в гл. 5.9 обобщающими замечаниями.

5.1. ПОЛУЧЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО И КОСОУГОЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ВРАЩЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБЩИХ ФАКТОРОВ

Самым простым случаем является *вращение двух ортогональных факторов на плоскости*. В табл. 5.1 приведены два фактора, полученные в результате применения центроидного метода к анализу шести переменных. Рис. 5.1 иллюстрирует процедуру вращения. Обе оси координат F_1 и F_2 занимают определенное положение относительно переменных. В соответствии с принятыми ранее обозначениями точки на графике соответствуют концам векторов, представляющих переменные. Систему координат можно повернуть, например, против часовой стрелки от положения F_1F_2 до $F_1^{\cdot}F_2^{\cdot}$. Такое вращение, когда прямой угол между координатными осями остается неизменным, как в этом случае, называется *ортогональным*.

Таблица 5.1

Исходная факторная матрица шести переменных

	F_1	F_2
1	0,60	0,60
2	0,40	0,40
3	—0,20	0,70
4	—0,20	0,60
5	—0,30	0,80
6	—0,10	0,50

На рис. 5.1 показан поворот исходной системы координат на угол θ. Используя рисунок, можно выразить новые координаты точки P $(a_1^{\cdot}, a_2^{\cdot})$ через старые координаты (a_1, a_2) следующим образом:

$$a_1^{\cdot} = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta,$$
$$a_2^{\cdot} = -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta. \tag{5.2}$$

В справедливости равенств (5.2) легко убедиться. Действительно,

$$\frac{a_2^{\cdot}}{f} = \cos\theta, \text{ или } a_2^{\cdot} = f\cdot\cos\theta.$$

Из рисунка видно, что $f = a_2 - e$ и $e = a_1 \operatorname{tg}\theta$. Подставляя эти выражения в $a_2^{\cdot} = f\cos\theta$, получим

$$a_2^{\cdot} = (a_2 - a_1 \operatorname{tg}\theta)\cos\theta = a_2\cos\theta - a_1\sin\theta.$$

С другой стороны, $a_1^{\cdot}$ можно представить как сумму отрезков:

$$a_1^{\cdot} = l + d.$$

Имеют место следующие соотношения: $l = a_1/\cos\theta$ и

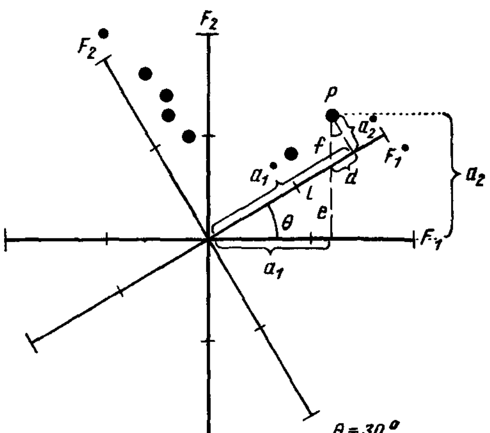


Рис. 5.1. Ортогональное вращение против направления движения часовой стрелки

$d/f = \sin\theta$ или $d = f \cdot \sin\theta = (a_2 - a_1 \operatorname{tg}\theta)\sin\theta$. В результате получаем, что

$$a_1^{\cdot} = a_1/\cos\theta + \sin\theta\,(a_2 - a_1 \operatorname{tg}\theta),$$

$$a_1^{\cdot} = a_1/\cos\theta + a_2 \cdot \sin\theta - a_1 \sin\theta \operatorname{tg}\theta,$$

$$a_1^{\cdot} = a_2 \sin\theta + a_1\left(\frac{1}{\cos\theta} - \sin\theta \operatorname{tg}\theta\right),$$

$$a_1^{\cdot} = a_2 \sin\theta + a_1 \cos\theta.$$

Итак, мы получили равенство (5.2). Набору из n точек будет соответствовать n пар уравнений (5.2). Это преобразование координат точек можно записать в матричной форме, как это сделано в (5.3) и в (5.4).

Если координаты точки в исходной системе известны и установлен угол вращения, то легко вычислить координаты точки при новом положении осей. Положение новых координатных осей относительно старых однозначно определяется косинусами углов между ними. Эти косинусы в аналитической геометрии называются направляющими. Если исходное факторное отображение включает только два фактора, то после осуществления ортогонального вращения считывают значение угла поворота осей θ, определяют по таблице его косинус и синус и подставляют найденные значения в уравнения (5.2).

Предположим, что в примере, который графически изображен на рис. 5.1, угол θ составляет 30°. Угол θ можно определить, измерив отрезки a_1 и e, и вычислить по ним тангенс искомого угла, а затем по тригонометрической таблице найти сам угол. По таблицам же находятся значения: $\sin 30° = 0{,}5000$, $\cos 30° = 0{,}8660$. Новые координаты точек получаются при перемножении матриц:

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}40 \\ -0{,}30 & 0{,}80 \\ -0{,}20 & 0{,}70 \\ -0{,}20 & 0{,}60 \\ -0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{T}}{\begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{A}^{\cdot}}{\begin{pmatrix} 0{,}8196 & 0{,}2196 \\ 0{,}5464 & 0{,}1464 \\ 0{,}1402 & 0{,}8428 \\ 0{,}1768 & 0{,}7062 \\ 0{,}1268 & 0{,}6196 \\ 0{,}1634 & 0{,}4830 \end{pmatrix}}, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{T}$ определяется по формуле (5.5). Координаты первой точки получаются следующим образом: $0{,}60 \cdot 0{,}866 + 0{,}60 \cdot 0{,}50 = 0{,}8196$ и $0{,}60 \cdot -0{,}50 + 0{,}60 \cdot 0{,}866 = 0{,}2196$. Приведенные вычисления полностью соответствуют равенству (5.1). Таким образом, перевод одной системы координат в другую, т. е. преобразование одного ортогонального факторного решения в другое в общем виде может быть записано в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}^{\cdot}, \tag{5.4}$$

где $\mathbf{A}^{\cdot}$ — факторная матрица в новой системе координат, повернутой на некоторый угол относительно старой системы; $\mathbf{A}$ — ортогональная исходная матрица факторных нагрузок, полученных по окончании процесса выделения факторов каким-либо методом, в данном примере — центроидным, а **T** является матрицей преобразования. В случае двух выделенных факторов размер матрицы **T** равен 2×2. При вращении против часовой стрелки матрица преобразования в плоскости F_1 и F_2 имеет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (5.5)$$

Результат вращения против часовой стрелки на угол 30° для конкретного примера приведен в (5.3). При вращении по часовой стрелке матрица **T** несколько изменяется:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (5.6)$$

В (5.6) по сравнению с (5.5) изменились знаки перед синусом на противоположные. Если два исходных фактора, приведенных в табл. 5.1, повернуть по часовой стрелке на угол 30°, то получим следующее равенство:

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}40 \\ -0{,}30 & 0{,}80 \\ -0{,}20 & 0{,}70 \\ -0{,}20 & 0{,}60 \\ -0{,}10 & 0{,}50 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{T}}{\begin{pmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 \\ -0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{A}^{\cdot}}{\begin{pmatrix} 0{,}2196 & 0{,}8196 \\ 0{,}1464 & 0{,}5464 \\ -0{,}6598 & 0{,}5428 \\ -0{,}5232 & 0{,}5062 \\ -0{,}4732 & 0{,}4196 \\ -0{,}3366 & 0{,}3830 \end{pmatrix}}.$$

Вращение координатных осей по часовой стрелке изображено на рис. 5.2. После того как факторное отображение представлено на графике и по чертежу считано значение угла поворота, формулы (5.4) и (5.5) или (5.6) позволяют относительно быстро выполнить ортогональное вращение на плоскости.

Для приобретения навыков читателю рекомендуется самостоятельно выполнить обе указанные процедуры вращения и сравнить с рис. 5.1 и 5.2. Читатель может ознакомиться со схемой вычислений процесса вращения без применения матричного исчисления, например у Хофстеттера [131; *3*] и Линерта [189; *1*].

Мы еще не затрагивали вопроса: каким же критерием пользоваться при определении истинного положения системы координат? В приведенном нами упрощенном примере угол поворота осей был принят равным +30 и —30°. При вращении против часовой стрелки было достигнуто такое положение системы, при котором все факторные нагрузки стали положительными, а сами переменные оказались в 1-м квадранте. Но подобный результат не может быть достигнут с любыми исходными данными. Вопрос о критериях будет нами рассмотрен особо. Приведенные выше формулы дают возможность осуществить вращение с ортогональными факторами. В принципе эти формулы могут быть использованы для получения многофакторного ортогонального решения при групповом методе, на что указывалось уже в 3.4.5. Следует иметь в виду, что если координатные оси проводятся через центры тяжести облаков точек, то при этом редко достигается ортогональность осей.

Так как факторное отображение преимущественно содержит более двух факторов, то возникает вопрос: осуществимо ли *ортогональное вращение с несколькими факторами?* В принципе при этом употребляется та же самая формула (5.4), но изменяется размер матриц. Можно показать, что в результате двух ортогональных вращений получается опять ортогональное решение. В случае исходного многофакторного решения операцию вращения можно выполнить на плоскости, учитывая каждый раз одновременно только две оси. Полная матрица преобразования состоит из произведения отдельных матриц преобразования для всех комбинаций пар факторов:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \ldots \mathbf{T}_i \ldots \mathbf{T}_k, \quad (5.7)$$

где $\mathbf{T}_i$ — означает матрицу преобразования порядка r в том случае, если r является также числом общих факторов. Диагональные элементы матриц преобразования, за исключением элементов, индексы которых соответствуют номерам вращаемых осей, равны единице, а недиагональные, за тем же исключением, равны нулю. Так, в случае трех выделенных факторов полная матрица преобразования состоит из трех компонент, соответствующих трем последовательным вращениям:

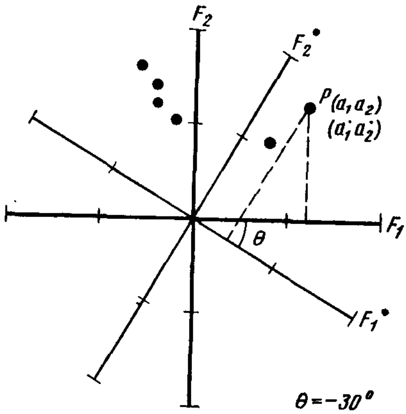


Рис. 5.2. Ортогональное вращение по направлению движения часовой стрелки

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{23},$$

где

$$\mathbf{T}_{12}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1{,}00\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{13}=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}.$$

Формулы приведены для случая осуществления вращения в направлении, обратном движению часовой стрелки. При вращении по часовой стрелке знаки у соответствующих элементов изменяются на противоположные (см. формулу (5.6)). Полная матрица преобразования $\mathbf{T}$, отображающая вращение всех комбинаций пар факторов, ортогональна. При наличии r факторов можно образовать $r(r-1)/2$ различных их пар. Следовательно, нужно выполнить такое же количество поворотов. Установив для каждой пары угол поворота, вычисляют по (5.7) полную матрицу преобразования. В общем случае нельзя предугадать, как будет выглядеть матрица **T** после одновременного осуществления нескольких вращений в различных плоскостях. Также трудно предвидеть, какой вид приобретет в результате ряда преобразований новая матрица **A**·. Итак, выполнение процедуры ортогонального вращения в r-мерном пространстве общих факторов графическим методом сводится к осуществлению ряда вращений на отдельных плоскостях и является весьма трудоемким процессом. Если полученная матрица **A**· не удовлетворяет исследователя, приходится начинать новый цикл поворотов. Несмотря на значительные затраты времени, этот способ доказал свою эффективность и до недавних пор широко применялся специалистами, работающими в факторном анализе.

При осуществлении ортогонального преобразования для матрицы **T** выполняется условие (см. также с. 47):

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}. \tag{5.8}$$

И обратно, если **T** ортогональна, т. е. она удовлетворяет условию (5.8), означающему, что при умножении ее на транспонированную матрицу получается тождественная*, то с ее помощью можно осуществить ортогональное преобразование. Расстояние между двумя точками не изменяется при ортогональном преобразовании.

При ортогональном преобразовании сохраняется прямой угол между координатными осями. Но концепция некоррелированности факторов не всегда выполняется. Уже во вводном разделе данной книги подчеркивалось, что требование ортогональности, хотя и удобно с математической точки зрения, но является прокрустовым ложем, к которому приходится приспосабливать экспериментальный материал. На этот счет в литературе имеются различные мнения. Приверженцы школы Тэрстоуна, которая процветает в США, придерживаются идеи косоугольной системы осей. Действительно, не всегда интерпретацию факторов можно совместить с требованием их некоррелированности. Большинство факторов, оказывающих влияние на измеряемые переменные, взаимосвязано между собой. По-видимому, предполагать каждый раз при любых исследованиях некоррелированность факторов так же неразумно, как требовать некоррелированности между ростом и весом испытуемых. Очевидно, предположение ортогональности факторов следует рассматривать как ограничение, накладываемое в некоторых случаях на факторы. Имеется много примеров, в частности у Каттелла и Дикмана [39] (см. 7.1.2), которые показывают, что косоугольные факторы лучше отражают структуру связи между переменными. Английская школа факторного анализа, представителем которой является Хофстеттер, придерживается принципа нахождения ортогонального решения. Поскольку этот принцип имеет много сторонников, ему также уделяется место в нашей книге. Однако мы считаем, что косоугольному вращению надо отдавать предпочтение. Особенно эффективен он в том случае, когда ортогональное решение оказывается недостаточно адекватным исходному материалу. Вообще косоугольность

---

* Тождественная матрица называется также единичной. Это диагональная квадратная матрица порядка n с единичными диагональными элементами. — *Примеч. пер.*

или ортогональность факторов в финальном решении должна вытекать из природы самого явления, а не заранее предопределяться процедурой расчетов. В описанной далее процедуре вращения показано, как можно достичь ортогонального или почти ортогонального расположения осей (см. гл. 5.3 и 5.6).

Теперь обсудим формальные предпосылки *косоугольного вращения* в пространстве общих факторов. В случае косоугольных факторов нагрузки переменных отличаются от коэффициентов корреляций между этими переменными и факторами. При объяснении формулы (2.29) было введено понятие *факторной структуры*: $\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{AC}$. Так же как

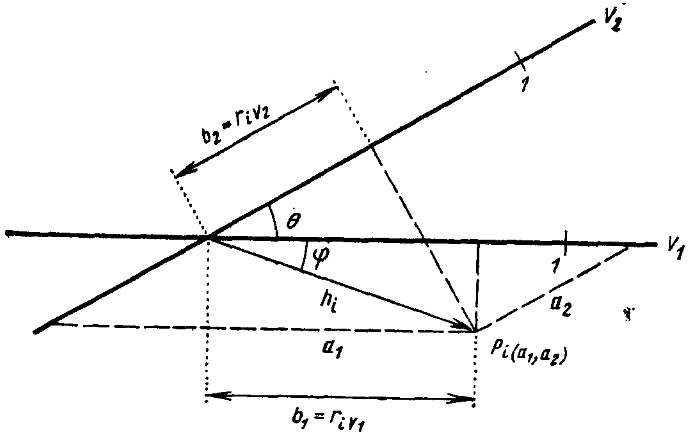


Рис. 5.3. Косоугольная система координат. Объяснение дано в тексте

факторное отображение $\mathbf{A}$, матрица $\mathbf{V}_{fs}$ имеет размер $m \times r$ и ее элементами являются коэффициенты корреляции между переменными и факторами. В случае ортогональных факторов $\mathbf{C}$ является тождественной матрицей, а факторные нагрузки — коэффициентами корреляции между переменными и факторами. Первая трудность, с которой сталкиваются при введении косоугольных факторов, — это отличие факторного отображения $\mathbf{A}$ от факторной структуры $\mathbf{V}_{fs}$. Наглядно это различие поясняется на рис. 5.3.

Пусть на координатных осях V_1 и V_2 отложены единичные векторы, представляющие факторы. Угол между ними обозначен через θ, он отличен от прямого, следовательно, оси неортогональны. Таким образом, мы ввели косоугольную систему координат. Точка P_i представляет в этом двумерном пространстве вектор-переменную. Ее координаты в косоугольной системе определяются отрезками a_1 и a_2, которые соответствуют факторным нагрузкам. Из рисунка видно, что отрезок a_1 больше единицы, т. е. при неортогональной системе координат, несмотря на нормирование факторов, нагрузки могут превышать единицу. На это следует обратить внимание. Напротив, при ортогональном факторном отображении факторные нагрузки не могут быть больше единицы. Длина вектор-переменной в пространстве общих факторов по формуле (2.33) равна h_i, а именно квадратному корню из значения общности. Обозначим угол между вектором, представляющим переменную, и осью координат V_1 через φ. Тогда, воспользовавшись введенными обозначениями и геометрической интерпретацией, можем записать следующее соотношение:

$$\cos\varphi = \frac{b_1}{h_i}, \text{ или } b_1 = \cos\varphi \cdot h_i. \tag{5.9}$$

С другой стороны, если переменные представлены в виде векторов, то существующая между ними корреляция равна скалярному произведению этих векторов. В соответствии с этим коэффициент корреляции между переменной i и фактором V_1 равен:

$$r_{iV_1} = h_i h_{V_1} \cos\varphi. \tag{5.10}$$

Так как длина, или «общность», любого фактора равна единице, т. е. $h_{V_1} = 1$, имеем

$$r_{iV_1} = h_i \cdot \cos\varphi = b_1. \tag{5.11}$$

Итак, коэффициент корреляции между переменной и фактором в косоугольной системе координат соответствует отрезку b_1 (рис. 5.3). Аналогично можно показать, что $b_2 = r_{iV_2}$. Рис. 5.3 иллюстрирует разницу между факторными нагрузками и коэффициентами корреляции между переменными и факторами. Обе величины являются проекциями вектора-переменной P_i на оси V_1 и V_2. Только факторные нагрузки получаются при проецировании вектора параллельно другой оси. При косоугольной системе координат они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения и превышать единицу. При проецировании вектора перпендикулярно к соответствующим осям на них получаются проекции, которые равны значениям коэффициентов корреляции между переменной и факторами. Значения коэффициентов корреляций, а следовательно, и величины проекций могут быть как положительными, так и отрицательными числами, но никогда не могут превышать единицу. Если угол между осями V_1 и V_2 приближается к прямому, то оба вида проекций все больше совпадают. Таким образом, прибегая к геометрической интерпретации, мы наглядно показали разницу между факторным отображением и факторной структурой. В случае ортогональной системы координат отображение и структура совпадают.

Первая трудность, с которой приходится сталкиваться при вращении косоугольной системы координат, это необходимость различать факторное отображение и факторную структуру. Вторая трудность заключается в понимании различия между двумя возможными решениями, так называемыми первичным и вторичным косоугольными решениями. В соответствии с этими решениями вводятся термины — *первичные факторы* (*primary factors*) и *вторичные оси* (*reference vec-*

tors). Для геометрической интерпретации этих понятий воспользуемся двумерной системой координат на рис. 5.4, 5.6—5.8.

На рис. 5.4 в ортогональной системе координат F_1F_2 изображены две группы переменных, каждая из которых представлена четырьмя точками. Через центры тяжести облаков точек-переменных можно провести новые координатные оси, на рисунке это оси L_1 и L_2. Изображение точек-переменных в системе координат L_1L_2 называют первичным факторным решением, а оси L_1 и L_2 — *первичными факторами*. Происхождение этих терминов связано с поиском Тэрстоуном первичных элементов умственных способностей (*primary mental abilities*). В дальнейшем, при развитии своей психологической теории, он, однако, ввел дополнительную систему координат V_1V_2, оси которой называются *вторичными осями*. Они являются перпендикулярами, восстановленными из нулевой точки к осям, проходящим через облака точек. Из рис. 5.4 видно, что проекции четырех точек, близких к L_1, на ось V_1 почти равны нулю, то же самое можно сказать о проекциях точек, близких к L_2, на ось V_2. Разумеется, между обоими типами решений существует определенная связь, позволяющая переходить от одного к другому. На практике часто прибегают к вторичному косоугольному решению, так как вторичные оси являются благоприятной отправной точкой для установления системы координат во время вращения.

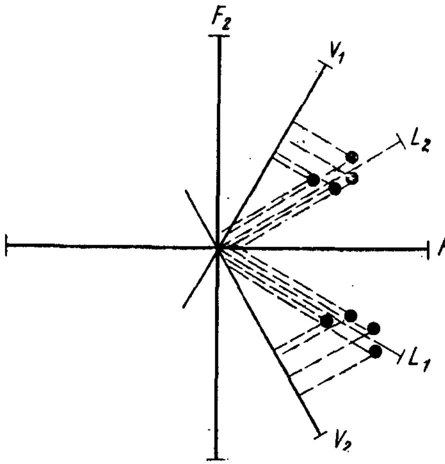


Рис. 5.4. Первичное и вторичное решение. Оси F_1, F_2 соответствуют исходному факторному решению; L_1, L_2 являются первичными факторами, а V_1 и V_2 — вторичными осями. Пунктирными линиями показано проецирование точек на вторичные оси для определения корреляции переменных с этими осями

5.2. ПОНЯТИЕ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Процедура выделения факторов часто дает ортогональное факторное отображение. Распределение долей дисперсии переменных по факторам обусловлено методом выделения. Как уже упоминалось, такая факторная структура в общем случае неинтерпретируема. Она изменяется от выборки к выборке и на нее оказывает сильное влияние введение новых переменных. Нами была выявлена пресловутая неопределенность факторной проблемы. Система координат может быть повернута вокруг ее начала в пространстве общих факторов бесконечным числом способов и может занимать бесконечно много положений. В этом кроется причина бесконечного числа факторных решений, которые одинаковым образом могут воспроизвести исходную корреляционную матрицу. На втором этапе факторного анализа — вращении — возникает вопрос: какое же положение системы координат считать истинным, наиболее соответствующим реальным факторам? Перед тем как отвечать на этот вопрос, приведем *доводы* о необходимости *процедуры вращения.*

Цель факторного анализа состоит в выявлении среди большого числа наблюдаемых переменных гипотетических величин, содержательно интерпретируемых и по возможности наиболее просто объясняющих совокупность изучаемых переменных. Факторы должны соответствовать исходным данным, определять значения наблюдаемых переменных и служить кратким описанием существующих связей между ними. Факторные нагрузки должны оставаться постоянными от выборки к выборке и как можно слабее реагировать на введение новой переменной. Каждая переменная должна иметь наиболее простое факторное объяснение. Центроидное решение и решение методом главных факторов не удовлетворяют этим требованиям. Факторы, выделенные с помощью этих методов, ортогональны, а распределение долей дисперсий переменных по факторам весьма произвольно и определяется не исходными данными, а используемым методом. Такие факторы редко содержательно интерпретируются, а их нагрузки изменяются от выборки к выборке. Особенно чувствительны факторные решения, полученные центроидным методом и методом главных факторов, к введению новых переменных, так как новые переменные часто значительно сдвигают центр тяжести облака точек и этим изменяют положение осей. При вращении стремятся найти такое положение осей, чтобы появление новых переменных не оказало сильного влияния на характер финального решения. При этом новые скопления точек могут образовывать отдельные группы. Кроме того, в результате решения факторной проблемы обычно фактор определяется только несколькими переменными. При вращении же достигается такая ситуация, когда большинство переменных нагружает, например, первый выделенный фактор.

Исходя из этих соображений в общем случае решение, полученное методом главных факторов или центроидным методом, не является благоприятным для содержательной интерпретации. Поэтому занялись поиском объективных оснований для перехода от произвольного положения системы координат к такому, которое бы удовлетворяло перечисленным требованиям и давало бы в каком-то смысле предпочтительное факторное решение. Критерии нахождения наилучшего положения системы координат, отвечающего определенным принципам, могут быть непосредственно или косвенно связаны с корреляционной матрицей в зависимости от привлекаемой информации. Из всех известных критериев, которые еще будут обсуждаться в гл. 5.7, самым важным является концепция простой структуры.

Основная идея осуществления вращения до получения простой структуры связана с расположеием векторов-переменных в пространстве общих факторов. Конфигурация векторов не связана ни с какой определенной системой координат. Наложение системы координат на конфигурацию должно определить факторную структуру. Взаимное расположение векторов дает информацию для построения такой системы координат. *Оси координат должны быть так наложены на конфигурацию векторов, чтобы было возможно наиболее простое (экономное) описание переменных.* Решая факторную проблему, стремятся ограничиться как можно меньшим числом факторов, достаточным, однако, для линейного описания переменных. При решении проблемы вращения речь идет о том, чтобы в уже установленном нами пространстве общих факторов дать каждой переменной наиболее простое факторное объяснение. Уменьшение сложности описания переменных в терминах факторов является следствием упрощенной трактовки переменных, перехода от хаотического набора экспериментальных данных к стройной структуре, связывающей переменные с выделенными факторами. Эта структура должна быть наиболее простой. Таким образом мы объяснили происхождение термина — *простая структура* (*simple structure*). Понятие простой структуры было впервые предложено Тэрстоуном. Им же были сформулированы условия, которым должна удовлетворять простая структура. Поясним это понятие с помощью геометрических представлений.

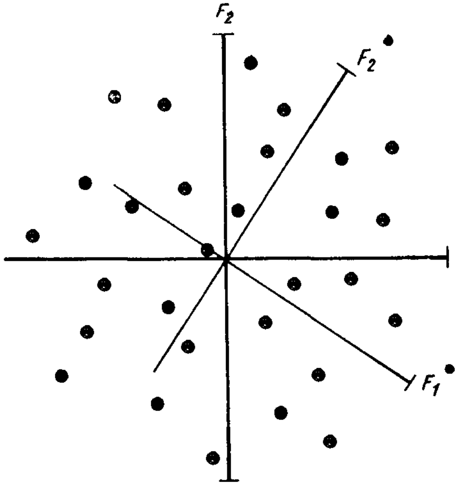


Рис. 5.5. Случайная конфигурация векторов

На рис. 5.5 представлена двумерная факторная структура для случая, когда взаимосвязь между переменными не является значимой. Такое расположение точек по праву называется *случайной конфигурацией*. В этом случае изображение точек, представляющих переменные, в двумерном факторном пространстве не дает нам никаких указаний на то, как должна быть наложена система координат на эту конфигурацию. Одно из возможных многочисленных положений координат на рис. 5.5 обозначено через $F_1' F_2'$.

В противоположность этому на рис. 5.6 представлена *ортогональная простая структура*. Точки, взаимное расположение которых на графике обусловлено корреляционной матрицей, отчетливо разделяются на две группы. Процедура выделения факторов привела к системе координат F_1F_2. Укажем на одно из бесчисленных других возможных положений системы координат, которое не изменяет конфигурации векторов, но с определенной точки зрения является примечательным. Эта система координат отличается от других тем, что ее оси, обозначенные F_1' и F_2', проходят через центры тяжести скоплений, или облаков, точек. Если такая предпочтительная система координат существует, то она зависит лишь от структуры данных, т. е. от расположения точек и тем самым от корреляционной матрицы*. Однако если в определенных областях пространства существуют некоторые скопления точек — связки векторов**, то это является хорошим обоснованием к определению предпочтительного расположения системы координат. На рис. 5.6 система координат $F_1^{\cdot}F_2^{\cdot}$ лучше подходит для простого описания переменных, чем первоначальная система F_1F_2, являющаяся результатом некоторого факторного решения. При случайной конфигурации векторов такая ситуация невозможна. При проецировании скоплений точек на новые оси можно заметить следующую особеиность. Часть проекций значительна по величине, а часть близка к нулю. Та переменная, которая расположена ближе к фактору, больше его и нагружает. Взаимное расположение новых факторных осей и переменных на рис. 5.6 позволяет интерпретировать переменные в факторных терминах, так как переменные близко расположены к осям и в значительной степени нагружают соответствующие факторы. Факторам можно дать содержательное объяснение. Фактор $F_2^{\cdot}$ определяется переменными, изображенными в виде темных кружков, а фактор $F_1^{\cdot}$ — переменными, изображенными в виде светлых кружков.

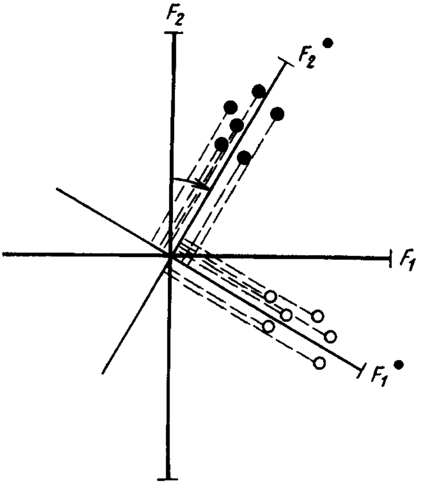


Рис. 5.6. Ортогональная простая структура. Точки, представляющие на графике переменные, расположены так, что оси ортогональной системы координат $F_1^{\cdot}F_2^{\cdot}$ могут быть проведены через центры тяжести их скоплений

К сожалению, на практике вряд ли встретится такая четкая структура. Наблюдаемые переменные в факторном пространстве большей частью занимают промежуточное положение между двумя описанными экстремальными случаями — случайной конфигурацией и ортогональной простой структурой. При этом особо следует отметить случай, когда скопления точек, если они вообще существуют, не лежат на осях, ортогональных друг другу. Этот случай соответствует так называемой *косоугольной простой структуре*, схематично изображенной на рис. 5.7. Если на данную конфигурацию векторов наложить систему координат $F_1^{\cdot}F_2^{\cdot}$, то светлые кружочки, соответствующие одной группе перемен-

* Напоминаем читателю определение конфигурации векторов. Это есть система векторов, представляющих переменные в пространстве общих факторов. Длина векторов соответствует элементам главной диагонали, а углы — остальным элементам корреляционной матрицы. — *Примеч. пер.*

** Если несколько переменных сильно коррелируют друг с другом, то соответствующие им векторы образуют в пространстве пучок, который также называют связкой векторов. Связке векторов соответствует связка корреляций. — *Примеч. пер.*

ных, будут находиться вблизи оси $F_1^{\cdot}$, а темные кружочки, соответствующие другой группе переменных, будут значительно удалены от оси $F_2^{\cdot}$. Если же выбрать другое положение системы координат, обозначенное на рисунке пунктирными линиями, то картина изменится на противоположную, т. е. темные кружочки будут расположены вблизи оси $F_2^{\cdot\cdot}$, а светлые — на некотором расстоянии от оси $F_1^{\cdot\cdot}$. Описанный случай не соответствует ортогональной системе координат, оси которой проходят через центры скоплений точек. Оси $F_1^{\cdot}$ и $F_2^{\cdot\cdot}$, хотя и проходят через центры тяжести, но не ортогональны друг другу.

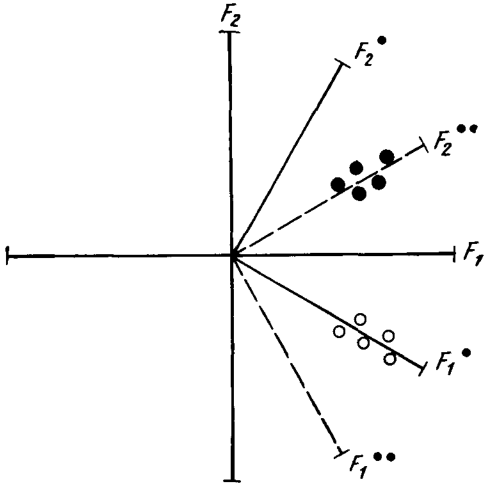


Рис. 5.7. Косоугольная простая структура. Оси ортогональной системы координат не могут быть одновременно проведены через центры тяжести обоих скоплений точек

Аналогичная ситуация, но с изменением обозначений приведена еще раз на рис. 5.8. Выше уже обсуждалась разница между первичными факторами и вторичными осями. В случае ортогональной простой структуры, изображенной на рис. 5.6, этой разницы не существует. Иначе обстоит дело при косоугольной структуре. Координатные оси L_1 и L_2 представляют собой первичные факторы. При проецировании точек на эти оси на рис. 5.8, несмотря на косоугольную систему координат, использовались перпендикуляры. Как было показано на рис. 5.3, получаемые при этом проекции равны значениям коэффициентов корреляций между переменной и фактором, представляющим соответствующую ось. При проецировании точек с помощью линий, параллельных осям, получаем отрезки, равные факторным нагрузкам, величины которых могут превышать единицу. Оси L_1 и L_2 проходят через центры тяжести скоплений точек. При проецировании точек на эти оси (на рисунке это обозначено точками) величины проекций вдоль одной оси мало отличаются друг от друга, даже если берутся точки из разных скоплений. Проекция точки P_1 на ось L_2 по величине практически равна проекции точки P_2 на ту же ось L_2. Следовательно, обе группы переменных в системе координат L_1L_2 плохо различаются по своим нагрузкам в противоположность тому, что было при ортогональной простой структуре. Вторичные оси V_{rs_1}, V_{rs_2} позволяют провести разграничение переменных по нагрузкам. Проекции векторов, обозначенных на рисунке темными кружками, на ось V_{rs_1} относительно велики, в то же время проекции этих векторов на ось V_{rs_2} близки к нулю. Проецирование на оси V_{rs_1} и V_{rs_2} показано пунктирными линиями. Изменения величин проекций, т. е. увеличения различий между нагрузками, мы добились благодаря тому, что оси V_{rs_1} и V_{rs_2} являются перпендикулярами, восстановленными из нулевой точки к осям L_1 и L_2. С нагрузками, или проекциями переменных в системе координат V_{rs_1}, V_{rs_2}, можно далее так же легко оперировать, как и в случае ортогональной простой структуры, изображенной на рис. 5.6. На оси V_{rs_1} имеется ряд нулевых нагрузок, а именно от переменных, обозначенных светлыми кружками, и ряд довольно высоких нагрузок, а именно от переменных, обозначенных темными кружками. На основе этих нагрузок мы делаем заключение, что переменные, обозначенные темными кружками, имеют тенденцию приближения к оси V_{rs_1}, а переменные, обозначенные светлыми кружками, — к оси V_{rs_2}. Такого обоснованного вывода в системе координат L_1L_2 сделать было нельзя. Предложение Тэрстоуна использовать для интерпретации вторичные оси нашло большую поддержку у его сторонников. Для двумерной задачи получение вторичного факторного решения графическим методом сводится к проведению прямых (например, L_2) через начало координат как можно ближе к точкам, представляющим переменные. Перпендикуляры к этим «гиперплоскостям координат» принимаются за новые оси координат. Гиперплоскость является подпространством r-мерного пространства. В двумерных задачах гиперплоскость имеет вид прямой. Гиперплоскости, перпендикулярные к оси V_{rs_1} или V_{rs_2}, называются *гиперплоскостями координат*. Итак, на рис. 5.8 L_1 является одномерной гиперплоскостью координат относительно оси V_{rs_1}. Ось V_{rs_1} определяется в результате вращения. Ее положение обусловливается тем, что как можно больше точек должно лежать на соответствующей ей гиперплоскости координат L_1 или вблизи нее. Если такая гиперплоскость координат может быть найдена, то она определит соответствующий фактор.

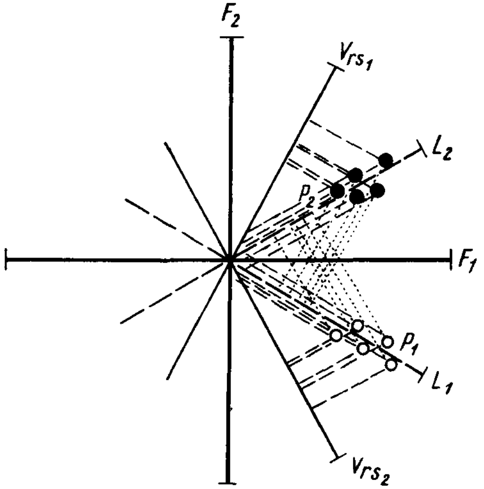


Рис. 5.8. Первичные факторы и вторичные оси. F_1 и F_2 соответствуют исходному ортогональному факторному решению; V_{rs_1} и V_{rs_2} являются вторичными осями, а L_1 и L_2 — гиперплоскостями, которые соответствуют первичным факторам. Проецирование на оси L_1 и L_2 изображено точечными линиями, а на оси V_{rs1} и V_{rs2} — пунктирными

Описанная концепция для двумерной задачи может быть перенесена на трехмерный случай. На рис. 5.9 изображено *трехмерное фак-*

торное пространство со случайной конфигурацией векторов. Шар, радиусом, равным единице, натянут на оси F_1, F_2, и F_3. Этот шар можно представить себе в виде глобуса с ортогональной системой координат и центром, совпадающим с нулевой точкой. Отдельные векторы-переменные представлены на рисунке точками, лежащими на поверхности шара. Из всей конфигурации только три вектора проведены пунктирными линиями, соединяющими нулевую точку с тремя точками на поверхности шара. При конкретных исследованиях длина векторов не всегда будет равна единице, как это представлено на рис. 5.9. Длина вектора равна квадратному корню из общности соответствующей переменной. Для упрощения изображения на рис. 5.9 длина векторов была доведена до единицы. Данная конфигурация не может быть взята в качестве отправной точки для определения положения системы координат. Двумерная задача, представленная на рис. 5.5, является частным случаем трехмерного факторного пространства. Плоскость, пересекающая шар и проходящая через его центр, является поверхностью, натянутой на оси F_1 и F_2. Эта поверхность с проецированными на нее всеми точками и была изображена на рис. 5.5.

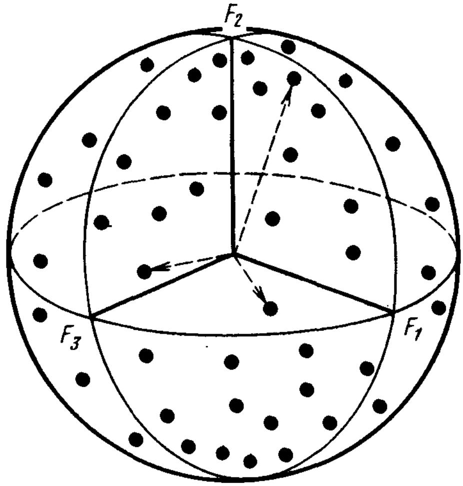


Рис. 5.9. Трехмерное факторное пространство со случайной конфигурацией векторов

На рис. 5.10 представлена *трехмерная ортогональная простая структура,* аналог которой в двумерном случае был изображен на рис. 5.6. Переменные на рис. 5.10 изображены по-разному. Переменные лежащие вблизи осей F_1, F_2 и F_3, представлены соответственно светлыми кружками, темными и треугольниками. Векторы остальных переменных изображены пунктирными стрелками. Естественно, все векторы имеют одинаковую длину, а различие в их обозначениях вызвано стремлением к графической наглядности.

Векторы-переменные не имеют такого же характера случайного рассеяния, как на рис. 5.9. У них обнаруживается определенная структура. Направления осей F_1, F_2 и F_3 совпадают с тремя группировками переменных. Остальные точки-переменные лежат на окружностях, которые находятся на гиперплоскостях, проходящих через начало координат и содержащих соответствующие оси. Проекции точек, лежащих у конца вектора F_1, на ось F_1 по величине значительны, а на оси F_2 и F_3 — почти равны нулю. Проекции на ось F_3 точек, лежащих вблизи гиперплоскости, натянутой на F_1 и F_2, почти равны нулю. То же самое можно сказать о проекциях точек, находящихся вблизи других гиперплоскостей, на соответствующие оси. Такая конфигурация векторов встречается редко. В рассматриваемом случае однозначное положение трех осей определяется не только группировкой точек-переменных, но и их ортогональностью. Представим себе, что на рис. 5.10 отсутствует система координат, но точки на поверхности шара нанесены. Если теперь вводить систему координат, то это можно сделать бесконечным числом способов. Однако по сравнению со всеми другими возможными ее положениями, изображенная на рисунке система координат предпочтительна в том смысле, что она подчеркивает простоту конфигурации векторов. Если теперь систему координат повернуть в любой из трех плоскостей на какой-то угол, то удовлетворяющая определенным требованиям связь между системой координат и конфигурацией векторов нарушается, так как положение осей координат не будет больше определяться скоплением точек. Итак, расположение точек на поверхности шара используется для ориентации в пространстве осей координат.

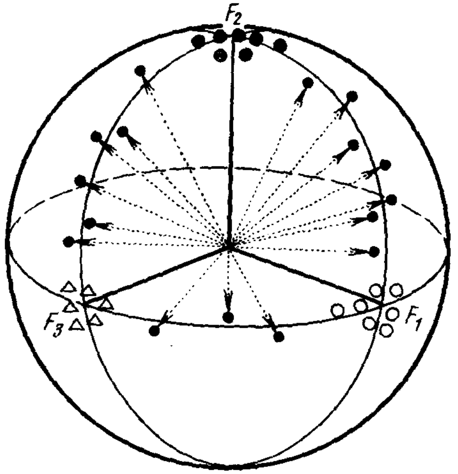


Рис. 5.10. Ортогональная простая структура в трехмерном пространстве

Как уже отмечалось выше, большей частью скопления точек не располагаются ортогонально друг к другу. Такая ситуация в трехмерной задаче представлена на рис. 5.11 для экспериментальных данных, отличных от результатов, изображенных на рис. 5.9 и 5.10. Речь пойдет о *косоугольной трехмерной простой структуре*. Скопления точек на поверхности шара сосредоточены около F_1, F_2 и F_3, но при этом они не образуют между собой прямого угла. Скопление точек вокруг F_2 по сравнению с рис. 5.10 сдвинуто вниз по поверхности шара, а скопления точек вокруг F_1 и F_3 более выдвинуты на передний план. Если провести оси через центры тяжести этих трех скоплений точек, то они не будут ортогональны. Как видно из рис. 5.11, углы между осями F_1, F_2 и F_3 будут острыми. Эти оси соответствуют первичным факторам. Как и в разобранной нами двумерной задаче, здесь все переменные имеют относительно высокие нагрузки. Рис. 5.8 можно рассматривать как результат пересечения шара плоскостью, проходящей через начало координат, причем F_1 и F_2 соответствуют осям L_1 и L_2. Оси V_1, V_2 и V_3 вторичные. Ось V_3 перпендикулярна к плоскости F_1F_2; ось V_2 перпендикулярна к плоскости F_1F_3, а ось V_1 — к плоскости F_2F_3. Следовательно, плоскость F_1F_2 является гиперплоскостью координат относительно V_3. Все переменные, обозначенные точками, темными и светлыми кружками, которые лежат вблизи этой гиперплоскости или непосредственно на ней, имеют проекции на ось V_3, практически равные нулю. То же самое относится к осям V_1 и V_2. В то время как система координат $F_1F_2F_3$ не позволяет разделить переменные по величине их проекций на оси, с помощью найденной нами системы $V_1V_2V_3$ эта задача легко решается.

Перейдем теперь от геометрических иллюстраций к более точной формулировке концепции простой структуры. *Термин «простая структура» служит для характеристики взаимосвязи между конфигурацией векторов и осей координат внутри пространства общих факторов. Если конфигурация векторов, строго соответствующая определенной корреляционной матрице, позволяет путем вращения достигнуть такого состояния, что почти все или значительное большинство векторов-переменных окажутся на гиперплоскостях координат или вблизи них, то в этом случае говорят о простой структуре, предполагая, что этим вращением определено положение системы координат.* При случайной конфигурации векторов однозначно определить положение системы координат невозможно. При реальных экспериментальных данных для нескольких факторов почти всегда могут быть найдены соответствующие гиперплоскости координат.

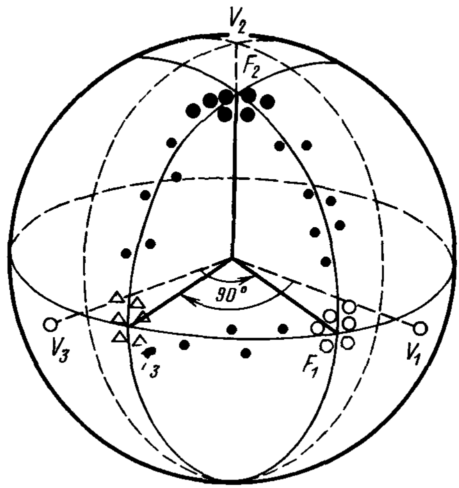


Рис. 5.11. Косоугольная простая структура, полученная в результате первичного и вторичного решений. Объяснение дано в тексте

Простая структура не есть что-то мистическое, как это часто утверждают. Она либо присуща экспериментальным данным, являясь их органическим свойством, либо отсутствует. Корреляционная матрица однозначно определяет конфигурацию векторов в пространстве общих факторов. Если векторы плотнее прилегают к какой-нибудь одной гиперплоскости (см., например, рис. 5.11), то этот факт может быть использован для определения положения системы координат. Вращение с целью получения простой структуры не является произвольным процессом, благодаря которому можно самовольно объединять переменные в определенные группы. Вращение производится вслепую, т. е. исполнитель не знает, какая точка какой переменной соответствует. Он стремится найти такое расположение осей, чтобы наибольшее число переменных лежало в возможно более узкой зоне вокруг гиперплоскостей координат. Хотя, осуществляя вращение, добиваются наибольшей интерпретируемости факторов, но при этом не руководствуются предвзято никакой определенной гипотезой. Конфигурация, присущая данной корреляционной матрице, устанавливает предельные возможности достижения простой структуры. Цель вращения — перераспределить переменные на расположенные как можно дальше друг от друга группы, лежащие на гиперплоскостях координат, т. е. ортогональные к соответствующим факторам, и группы, характеризующиеся большими нагрузками факторов. На практике оправдала себя зона вокруг гиперплоскостей координат в $\pm$ 10%. Если факторная нагрузка переменной меньше $\pm$ 0,10, то эта переменная считается лежащей на гиперплоскости координат соответствующего фактора. Разумеется, можно изменить допустимую величину зоны, но чаще всего при исследованиях используют указанное значение. Чтобы определить факторное отображение, а именно установить, какие переменные в гиперплоскостях координат какого фактора лежат, следует лишь просмотреть матрицу, отмечая в ней элементы, меньшие $|0{,}10|$. Как осуществляется процедура вращения до достижения простой структуры показывается в гл. 5.3. Выполнение процедуры весьма трудоемкая работа, требующая значительных затрат времени, а также определенного опыта. Несмотря на кажущуюся произвольность в осуществлении вращения, разные исследователи приходят к одним и тем же финальным результатам.

Определение простой структуры, которое было приведено выше, несколько отличается от первоначальной трактовки этого понятия Тэрстоуном. Тэрстоун [286, *6*] выдвинул следующие требования, которым должна удовлетворять простая структура:

1. Каждая строка матрицы факторной структуры должна содержать хотя бы один нулевой элемент (т. е. каждая переменная должна лежать по крайней мере на одной гиперплоскости координат).

2. Каждый столбец матрицы факторной структуры должен содержать не менее r нулей (т. е. каждый фактор в своей гиперплоскости координат должен определяться не менее чем r переменными).

3. Для каждой пары столбцов матрицы факторной структуры найдется по крайней мере несколько переменных, которые от одного фактора имеют нулевую нагрузку, а от других факторов значительные нагрузки.

4. При числе факторов более четырех в каждой паре столбцов должно быть как можно больше переменных с нулевыми нагрузками в обоих столбцах.

5. Для каждой пары столбцов матрицы факторного отображения должно быть как можно меньше переменных со значительными нагрузками в обоих столбцах.

Приведенное выше определение соответствует этим требованиям, но оно компактнее и пригодно для графического способа осуществления вращения при поиске простой структуры, а также может облегчить понимание процедуры, описанной в гл. 5.3. Формулировка понятия простой структуры, аналогичная указанной нами, имеется у Баргмана [12; *2*]. В работе Баргмана речь идет о процедуре поиска простой структуры, состоящей из отдельных этапов, по матрице, которая рассматривается с позиции понятий частной корреляции. Матрица разбивается на отдельные подматрицы с рангом, равным единице.

На каждом этапе определяется группа переменных, сосредоточенных вокруг одного фактора, при исключении влияния всех других переменных, по каждой подматрице с рангом, равным единице. Определение таких групп переменных сводится к нахождению гиперплоскостей размерностью $(r - 1)$, т. е. гиперплоскостей координат, определение которых было дано выше. Подход к поиску простой структуры, предложенной Баргманом, геометрически трудно интерпретировать, поэтому мы не будем на нем останавливаться подробно.

При многомерном факторном решении в каждом столбце матрицы факторного отображения всегда найдется несколько нагрузок, практически равных нулю. Отсюда возникает вопрос: как много нужно иметь нулевых нагрузок, чтобы считать найденную гиперплоскость

$$P = \frac{4h \arcsin \frac{a}{2h}}{2h\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{2h}.$$

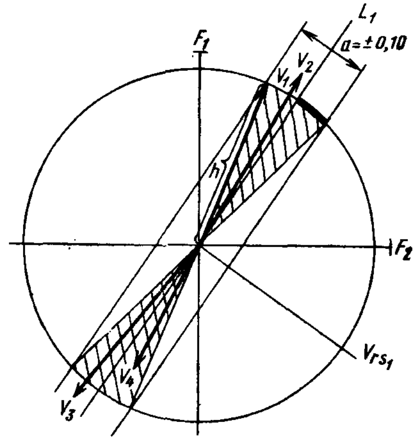


Рис. 5.12. Иллюстрация к тесту Баргмана. Предполагается равномерное распределение переменных по всей площади круга. В этом случае вероятность того, что вектор V_1 длиной h попадет в зону $\pm a$ вокруг гиперплоскости L_1, численно равна отношению площади заштрихованных сегментов ко всей площади круга. Длина дуги, отмеченной жирной линией, равна $h \cdot \arcsin \frac{a}{2h}$

значимой? Вопрос о значимости гиперплоскостей был впервые поднят Баргманом [12, *1*, *2*], который в связи с этим предложил *критерий значимости простой структуры*. Кратко изложим принцип построения этого теста для двумерной задачи с иллюстрацией на рис. 5.12.

На рис. 5.12 в системе координат F_1F_2 изображены несколько переменных. Принцип простой структуры требует, чтобы была найдена такая система координат, в которой как можно больше переменных давало на новые оси очень маленькие проекции. Относительно оси V_{rs_1} это утверждение является справедливым, так как проекции на эту ось векторов V_1—V_4 практически равны нулю. В зоне a вокруг L_1, являющейся гиперплоскостью относительно V_{rs_1}, группируются четыре переменные. Величина зоны не превышает $\pm$ 0,10. Эта величина зоны уже молчаливо признана исследователями допустимой. Гиперплоскость L_1 определяет положение оси V_{rs_1}.

Нулевая гипотеза заключается в равномерном распределении векторов по всей площади круга. Вначале рассмотрим только вектор V_1 длиной h. Определим вероятность того, что этот вектор будет лежать внутри указанной зоны вокруг гиперплоскости. Как упоминалось, ограничимся двумерной задачей. С помощью геометрического представления, эту вероятность можно вычислить как отношение двух заштрихованных секторов к площади всего круга или как отношение соответствующих дуг окружностей. Так как вектор может отражаться, нужно учитывать обе дуги, которые соответствуют заштрихованным секторам. Длина дуги, проведенной на рис. 5.12 жирной чертой, равна $h \arcsin \frac{a}{2h}$. Тогда искомая вероятность равна:

$$P = \frac{4h \arcsin \frac{a}{2h}}{2h\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{2h}. \qquad (5.12)$$

Вероятность того, что вектор будет лежать в определенной зоне, зависит от его длины h и ширины этой зоны a. Для трехмерного и n-мерного пространства формула приобретает более сложный вид, и поэтому мы ее здесь не рассматриваем. Баргман для различного числа факторов (до 16 факторов) рассчитал вероятности того, что вектор, длина которого равна единице, попадет в зону шириной 0,20, и указал общую формулу для расчета. Но при проверке достижения простой структуры установление критических значений только для одного вектора явно недостаточно. Вероятность того, что k векторов при r факторах будут лежать внутри указанной критической зоны, можно вычислить с помощью биномиальной формулы. При этом следует учитывать, что гиперплоскость размерностью $r-1$ не может быть полностью определена лишь в том случае, если она проходит через $r-1$ точек. Итак, после согласования вопроса о величине критической зоны переходят к рассмотрению конфигурации векторов.

На практике при оценке достижения простой структуры пользуются таблицами, составленными Баргманом (три из них приведены в приложении Г). При этом исходят из того, что для каждого фактора l подсчитывают число переменных, для которых выполняется условие $\left|\frac{a_{i_l}}{h_i}\right| < 0{,}10$. Это число, называемое числом нулевых нагрузок (*hyperplane count*), сравнивают с табличным, соответствующим определенному числу факторов. При данном числе переменных непосредственно из таблицы можно узнать, сколько нулевых нагрузок следует ожидать на уровнях значимости 0,25; 0,05 и 0,01. Если полученное в результате вращения число нулевых нагрузок больше указанного в таблице, например на уровне значимости 0,01, то можно считать, что этот фактор достаточно определен переменными и его можно интерпретировать. Таблица в приложении включает до двенадцати факторов, что вполне достаточно для задач, решаемых на практике. Если же число выделенных факторов превышает 12, то соответствующие расчеты можно провести по специальной формуле, предложенной Баргманом. Примеры с использованием критерия приведены на с. 202, 207 и 221.

Критерий Баргмана не совсем точный. Он дает лишь приблизительную оценку и имеет, скорее, эмпирический, чем строго математический характер. Это связано с тем, что при вычислении вероятности учитывается общность. Но здесь хотелось бы еще раз подчеркнуть, что простая структура не является чисто субъективным понятием, как это часто утверждают. Она отражает свойство, органически присущее экспериментальным данным. Поиск простой структуры часто является длительным процессом, осуществляемым методом проб и ошибок. Но это вовсе не означает, что простая структура не является объективным понятием. Недостаточно обосновано также утверждение, что принятие решения об угле поворота системы координат является субъективным даже в случае удачного финального решения. В качестве возражения можно указать на аналогию между процедурой вращения при поиске простой структуры с использованием критерия Баргмана и определением главных компонент с применением теста проверки их значимости. Обе процедуры близки по смыслу. Конечно, результат определения простой структуры не отличается такой однозначностью, как результат определения главных осей. Критерий Баргмана может также показать, что процедура вращения не доведена до конца или выполнена недобросовестно. Но если достигнутая в результате вращения простая структура удовлетворила критерию значимости, то это не следует рассматривать как случайный и сомнительный результат, полученный в итоге каких-то преднамеренных усилий. С помощью теста Баргмана контролируется также взаимное расположение переменных, а именно проверяется гипотеза о такой конфигурации векторов, что они лежат друг к другу плотнее, чем это было бы возможно при случайном их расположении в пространстве. Далее можно переходить к предварительной интерпретации факторов, весьма отдаленной пока от причинного характера связей.

5.3. ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПОИСКЕ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

За время развития факторного анализа были разработаны различные графические приемы процедуры вращения для достижения простой структуры. Рабочая группа Каттелла, продолжая традиции школы Тэрстоуна, применяла метод, которому следует по многим причинам отдать предпочтение перед остальными, хотя и было показано, что исследователи исходя из одних и тех же данных, но пользуясь различными методами, приходят к схожим результатам (Каттелл и Дикман [39], Каттелл и Салливэн [50], Каттелл и Горсач [42]). В большинстве случаев результаты, полученные с помощью геометрических представлений, лучше удовлетворяют принципу простой структуры, чем результаты, полученные с помощью аналитических методов. Значимость полученного решения может быть проверена с помощью критерия Баргмана. На примерах с известной структурой можно показать, что с помощью визуальной итеративной процедуры при поиске простой структуры в определенной плоскости достигается наилучшее положение координат осей, которые соответствуют влияющим факторам (см. раздел 7). Кроме того, применяя графические методы, исследователь непосредственно контактирует с исходным материалом, что помогает ему в дальнейшем при интерпретации полученных результатов. К сожалению, все графические приемы очень трудоемки. Но при проведении серьезных исследований уже не приходится считаться с объемом работы, тем более что время на осуществление процедуры вращения можно сократить, используя так называемую Rotoplot-программу (см. с. 339). Но даже при проведении расчетов на ЭВМ с помощью этой программы приходится выполнять от 10 до 20 циклов вычислений. Далее покажем процедуру поиска решения с простой структурой на двумерной задаче. Потом перейдем к трехмерной задаче (задаче о ящиках), известной под названием бокс-проблемы (*box-problem*) Тэрстоуна.

В табл. 3.14 представлен результат выделения двух факторов, полученный методом главных факторов по 12 переменным. Будем продолжать работу с этим примером, приняв указанные в таблице факторные нагрузки за исходные. Обозначим через $\mathbf{V}_0$ факторное отобра-

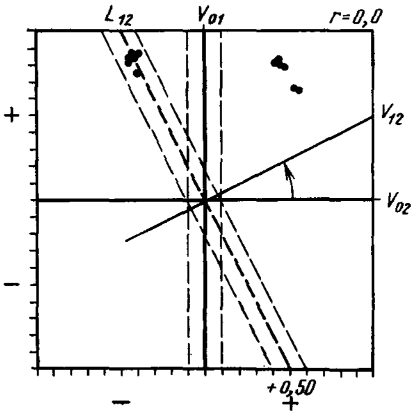


Рис. 5.13. Исходная система 12 векторов первоначальной факторной матрицы $\mathbf{V}_0$ и вращение оси V_{02}; V_{01} и V_{02} — первоначальная ортогональная система координат. Ось V_{02} вращается в направлении, противоположном движению часовой стрелки, до тех пор пока группа точек не попадет в критическую зону гиперплоскости L_{12}. Первая цифра индекса буквы, обозначающей ось, соответствует номеру цикла вращения

жение, полученное по окончании процесса выделения факторов, а соответствующие факторы — через V_{01} и V_{02}. На рис. 5.13 обычным образом изображены оба фактора.

Рассмотрим вначале систему координат $V_{01}V_{02}$. Первая цифра индекса у букв, обозначающих факторы, соответствует порядковому номеру цикла вращения. Вторая цифра соответствует номерам осей. Проекции точек, представляющих на графике переменные, на обе оси значительны по величине. Так как оба фактора ортогональны, коэффициент корреляции между ними равен нулю. Об этом свидетельствует запись, сделанная в верхней части графика. На графиках, приводимых далее, коэффициент корреляции уже не будет равен нулю. Повернем теперь ось V_{02} так, чтобы соответствующая ей гиперплоскость подходила как можно ближе к наибольшему числу точек. В качестве величины допустимой зоны опять примем значение $\pm$ 0,10. Если повернуть ось V_{02} в направлении, обратном движению часовой стрелки, до положения, обозначенного буквой V_{12}, то гиперплоскость, соответствующая этому новому положению оси, пройдет через второй квадрант. Все точки, находящиеся во втором квадранте, будут лежать в допустимой зоне вокруг гиперплоскости L_{12}. По нижней шкале графика считываем значение тангенса угла поворота. В данном случае оно равно $+$ 0,50. Если бы мы повернули ось V_{02} в направлении движения часовой стрелки, то получили бы отрицательное значение тангенса угла поворота, приблизительно — 0,40. При вращении горизонтальной оси V_{02} значения тангенса углов поворота считываются в нижней шкале графика с учетом указанных на рисунке знаков. Следует заметить, что угол поворота не должен превышать $\pm$ 45°, так как в противном случае мы не сможем пользоваться нижней шкалой графика для считывания показаний.

Как теперь вычислить по тангенсу угла поворота коэффициент корреляции между осями V_{01} и V_{12} и определить величины проекций точек в новой системе координат? Вначале считанные по графику значения тангенсов углов поворота записываем в так называемую матрицу поворота системы координат. Эта матрица отражает все изменения, которые происходят с осями координат при выполнении цикла вращения. Количество строк и столбцов матрицы совпадает с числом факторов. В нашем примере размер матрицы поворота равен двум. Мы вращали только ось V_{02}. Поэтому элементы главной диагонали равны + 1,00. Строки показывают, какие факторы оставались неизменными, столбцы — какие факторы вращались. Для нашего примера матрица поворота имеет вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}00 & +0{,}50 \\ 0{,}0 & 1{,}00 \end{pmatrix}.$$

Первый элемент во второй строке имел бы другое значение, если бы фактор 2 оставался неизменным, а фактор 1 вращался. Для простоты мы ограничимся здесь поворотом только одной оси. Нормализуя матрицу поворота, мы получаем возможность перейти от нее к желаемой матрице преобразования $\mathbf{\Lambda}_1$. Нормализация матрицы необходима по следующей причине. Если бы мы перемножали ненормализованную матрицу поворота с матрицей $\mathbf{V}_0$, то длина результирующих векторов-факторов могла бы получиться отличным от единицы. При нормализации матрицы поворота достигается то, что факторы остаются нормированными. Отсюда происходит и название этой процедуры — нормализация матрицы поворота. Нормализация заключается в нахождении обратных чисел величин, получаемых при извлечении квадратного корня из элементов матрицы, возведенных в квадрат и просуммированных по столбцам. Эти обратные величины являются элементами диагональной матрицы $\mathbf{\Delta}_1$. В результате умножения $\mathbf{S}_1\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{\Lambda}_1$ получаем искомую матрицу преобразования $\mathbf{\Lambda}_1$. Это и есть нормализованная матрица поворота. Процедура вычисления приведена в верхней части табл. 5.2. Ее можно разбить на последовательные этапы: сначала находят матрицу поворота $\mathbf{S}_1$, затем по ней вычисляют $\mathbf{\Delta}_1$ и конечный этап — нахождение по $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{\Delta}_1$ матрицы $\mathbf{\Lambda}_1$. Во второй части таблицы вычисляется произведение $\mathbf{\Lambda}_1'\mathbf{\Lambda}_1$. В результате получаем корреляционную матрицу $\mathbf{C}_{r1}$ между новыми осями. Так как в нашем распоряжении имелись два фактора, мы получили только одно значение внедиагональных элементов, а именно + 0,447. Это величина коэффициента корреляции между новыми осями. Значение диагональных элементов можно применить для проверки правильности вычислений. С точностью до ошибок округления они должны быть равны единице. В третьей части табл. 5.2 производится вычисление проекций векторов, представляющих переменные, на новые, повернутые оси V_{11} и V_{12}. Так как ось V_{01} не вращалась, $V_{01} = V_{11}$. Поэтому по сравнению с исходной факторной матрицей $\mathbf{V}_0$ в результате вращения изменились значения элементов только во втором столбце.

Отдельные этапы вычислений, представленные в табл. 5.2, в принципе повторяются при последующих циклах вращения. При самостоятельном выполнении вся процедура вычислений очень быстро запоминается. Через $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ и так далее будем обозначать факторные матрицы вторичного решения, получаемого после каждого цикла вращения. Ранее употребляемый индекс при букве $\mathbf{V}_{rs}$, означающий результат вторичного решения, здесь ради упрощения опускается. Отдельные факторы будем обозначать буквами с двойным индексом, причем первая цифра индекса будет указывать номер цикла вращения, а вторая — номер фактора. Итак, V_{12} является вторым фактором, полученным в результате осуществления первого цикла вращения. Индекс в обозначениях матриц $\mathbf{S}$, $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{\Lambda}$, а также у вводимой далее матрицы $\mathbf{Q}$ соответствует порядковому номеру цикла вращения. Факторное решение

Таблица 5.2

Первый цикл вращения

$$\underset{\mathbf{S}_1}{\begin{pmatrix}1{,}00 & +0{,}50\\ - & 1{,}00\end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{\Delta}_1}{\begin{pmatrix}1{,}000 & -\\ - & 0{,}894\end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{\Lambda}_1}{\begin{pmatrix}1{,}000 & 0{,}447\\ - & 0{,}894\end{pmatrix}}$$

Σs^2	1,000	1,250
$\sqrt{\Sigma s^2}$	1,000	1,118
$\mathbf{\Delta}_1 = 1/\sqrt{\Sigma s^2}$	1,000	0,894

$$\underset{\mathbf{\Lambda}_1'}{\begin{pmatrix}1{,}000 & -\\ 0{,}447 & 0{,}894\end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{\Lambda}_1}{\begin{pmatrix}1{,}000 & 0{,}447\\ - & 0{,}894\end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{C}_{r1}}{\begin{pmatrix}1{,}000 & +0{,}447\\ +0{,}447 & 0{,}999\end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{V}_1$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} V_{01} & V_{02} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}84 & -0{,}45\\ 0{,}79 & 0{,}47\\ 0{,}82 & -0{,}46\\ 0{,}65 & 0{,}56\\ 0{,}85 & -0{,}42\\ 0{,}66 & 0{,}53\\ 0{,}87 & -0{,}40\\ 0{,}80 & 0{,}45\\ 0{,}75 & -0{,}40\\ 0{,}84 & 0{,}42\\ 0{,}86 & -0{,}44\\ 0{,}81 & 0{,}42 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix}1{,}000 & 0{,}447\\ - & 0{,}894\end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V_{11} & V_{12} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}840 & -0{,}027\\ 0{,}790 & 0{,}773\\ 0{,}820 & -0{,}045\\ 0{,}650 & 0{,}791\\ 0{,}850 & 0{,}005\\ 0{,}660 & 0{,}769\\ 0{,}870 & 0{,}031\\ 0{,}800 & 0{,}760\\ 0{,}750 & -0{,}022\\ 0{,}840 & 0{,}751\\ 0{,}860 & -0{,}009\\ 0{,}810 & 0{,}738 \end{pmatrix} \end{array}$$

в виде матрицы $\mathbf{V}_1$, полученное в результате первого цикла вращения, представлено на рис. 5.14.

Левая часть факторной матрицы обозначена через V_{11}, правая — через V_{12}. Одна группа точек, как мы и желали, сосредоточена вокруг гиперплоскости L_{12}. На графике эта гиперплоскость совпадает с осью V_{11}.

Хотя обе оси V_{11} и V_{12} больше не ортогональны, а, напротив, коррелируют между собой, на графике они изображены так, как будто они ортогональны. Значение корреляции между ними, вычисленное нами, указано в верхней части графика. Для удобства на рисунок можно нанести и косоугольные оси. Ошибка, которую могут допустить при

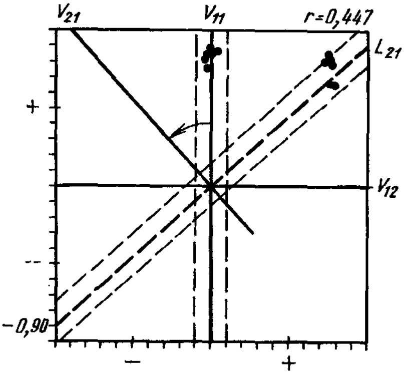


Рис. 5.14. Система векторов после первого цикла вращения, соответствующая факторному решению $\mathbf{V}_1$, и вращение оси V_{11}. Матрица $\mathbf{V}_1$ табл. 5.2 представлена в ортогональной системе координат. В верхней части графика указан коэффициент корреляции между V_{11} и V_{12}, т.е. эти оси коррелируют между собой, но, несмотря на это, они изображены ортогональными

установлении нового угла поворота, не очень велика, если коэффициент корреляции не превышает 0,50. Она не связана с вычислениями, а может быть вызвана неточным вычерчиванием графика или неточным измерением угла поворота. Самое большое, к чему может привести подобная ошибка, это увеличение циклов вращения. Но с этим приходится мириться ради простоты ортогонального изображения. На рис. 5.14 ось V_{12} четко определяется точками, которые лежат в соответствующей ей гиперплоскости. Ось V_{11} также должна быть так проведена, чтобы возможно больше точек лежало вблизи гиперплоскости L_{21}. Как показано на рисунке, вращение выполняем против часовой стрелки. Значение тангенса угла поворота — 0,90 считываем в левой части графика. Итак, при вращении вертикальной оси тангенс угла поворота определяем по левой шкале графика, при вращении горизонтальной оси — по нижней шкале графика (см. рис. 5.13) по отрезкам, отсекаемым соответствующими гиперплоскостями, а не осями. Если бы мы увеличили еще немного угол поворота, то все точки данной группы попали бы в зону вокруг гиперплоскости L_{21}. Мы здесь сознательно провели гиперплоскость не точно через центр тяжести скопления точек, благодаря чему получили возможность выполнить еще один цикл вращения. Это никак не скажется на окончательном результате. Матрица поворота $\mathbf{S}_2$ имеет вид:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,0 \\ -0,90 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

Мы могли бы опять нормализовать эту матрицу поворота и применить к $\mathbf{V}_1$. Но тогда возможные ошибки, допущенные при вычислении факторной матрицы $\mathbf{V}_1$, вошли бы в последующий цикл вращения и накапливались бы в ходе выполнения последующих операций. Чтобы избежать этого, каждый раз при выполнении очередного цикла вращения возвращаются к исходной факторной матрице $\mathbf{V}_0$. Итак, второй цикл вращения начинаем с вычисления произведения $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{Q}_2$ и нормализации полученной матрицы $\mathbf{Q}_2$. Нормализованная матрица, обозначенная через $\mathbf{\Lambda}_2$, умножается на $\mathbf{V}_0$ для получения $\mathbf{V}_2$. Произведение $\mathbf{\Lambda}_2'\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{C}_{r2}$ мы опять можем использовать для проверки правильности вычислений. Ошибки, которые могли возникнуть при вычислении $\mathbf{V}_1$, не окажут никакого влияния на точность получения новой факторной матрицы $\mathbf{V}_2$. Вычислительная процедура второго цикла вращения представлена поэтапно в четырех частях табл. 5.3. Вначале умножают матрицу поворота на матрицу преобразования предшествующего цикла вращения и получают матрицу $\mathbf{Q}_2$. Эта матрица нормализуется уже известным способом. Во второй части таблицы получаем $\mathbf{\Lambda}_2$. Дальнейшая процедура аналогична вычислениям в табл. 5.2, а именно определяется корреляционная матрица $\mathbf{C}_{r2}$ для вторичных осей. И наконец, в последней части таблицы вычисляется новая факторная матрица $\mathbf{V}_2$ на основе исходной матрицы $\mathbf{V}_0$.

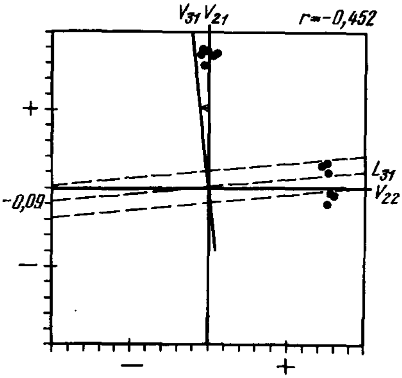


Рис. 5.15. Система векторов после второго цикла вращения, соответствующая факторному решению $\mathbf{V}_2$. Вращение оси V_{21} до положения V_{31}

Результат вращения обеих осей представлен на рис. 5.15. Вторичные оси отрицательно коррелируют между собой. Обе группы точек уже относительно плотно прилегают к гиперплоскостям. Лишь положение гиперплоскости, соответствующей оси V_{21}, может быть несколько улучшено путем поворота этой оси на небольшой угол против движения часовой стрелки. В левой части графика считываем опять значение тангенса угла поворота — 0,09. Дальнейшая процедура полностью аналогична ходу вычислений второго цикла вращения (см. табл. 5.3). Табл. 5.4 содержит отдельные этапы этой процедуры. По сравнению с табл. 5.3 в ней изменены лишь индексы обозначений матриц. В результате соответствующих вычислений получаем окончательную матрицу преобразования $\mathbf{\Lambda}_3$, матрицу корреляций между вторичными осями и матрицу повернутых факторов с набором проекций 12 векторов (факторных нагрузок) на новые оси $\mathbf{V}_3$.

На рис. 5.16 изображена простая структура, которая вряд ли может быть улучшена путем дальнейшего вращения. Если все-таки оси повернуть еще на небольшой угол, то отдельные точки выйдут за границы зоны вокруг гиперплоскостей. Поэтому такое положение осей

Таблица 5.3

Второй цикл вращения

$$
\Lambda_1 \cdot S_2 = Q_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}447 \\ - & 0{,}894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}00 & - \\ -0{,}90 & 1{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}447 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix}
$$

Σq^2	1,0056	0,999
$\sqrt{\Sigma q^2}$	1,00	1,00
$\Delta_2 = 1/\sqrt{\Sigma q^2}$	1,00	1,00

$$
Q_2 \cdot \Delta_2 = \Lambda_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}447 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}00 & - \\ - & 1{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}477 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix}
$$

$$
\Lambda_2' \cdot \Lambda_2 = C_{r2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0{,}598 & -0{,}805 \\ 0{,}447 & 0{,}894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}447 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}005 & -0{,}452 \\ -0{,}452 & 0{,}999 \end{pmatrix}
$$

$$
V_0 \cdot \Lambda_2 = V_2
$$

$$
\begin{array}{cc} V_{01} & V_{02} \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{cc} V_{21} & V_{22} \end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0{,}84 & -0{,}45 \\ 0{,}79 & 0{,}47 \\ 0{,}82 & -0{,}46 \\ 0{,}65 & 0{,}56 \\ 0{,}85 & -0{,}42 \\ 0{,}66 & 0{,}53 \\ 0{,}87 & -0{,}40 \\ 0{,}80 & 0{,}45 \\ 0{,}75 & -0{,}40 \\ 0{,}84 & 0{,}42 \\ 0{,}86 & -0{,}44 \\ 0{,}81 & 0{,}42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}447 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}865 & -0{,}027 \\ 0{,}094 & 0{,}773 \\ 0{,}861 & -0{,}045 \\ -0{,}062 & 0{,}791 \\ 0{,}846 & 0{,}004 \\ -0{,}032 & 0{,}769 \\ 0{,}842 & 0{,}031 \\ -0{,}116 & 0{,}760 \\ 0{,}771 & -0{,}022 \\ 0{,}164 & 0{,}751 \\ 0{,}868 & -0{,}009 \\ 0{,}146 & 0{,}738 \end{pmatrix}
$$

будем считать окончательным. Данный пример дает однозначные и простые результаты. При осуществлении каждого цикла вращению подвергалась только одна ось. Разумеется, можно одновременно вращать обе оси. Процедура при этом не изменится, но объем вычислений уменьшится. В примере мы имели дело лишь с двумя осями. При большем числе осей на графиках изображаются все возможные комбинации систем отсчета, учитывая каждый раз одновременно только две оси. Отдельно для каждой комбинации осуществляется процедура вращения. Для одного цикла вращения, выполненного на всех графиках, составляется одна матрица поворота. В принципе схема вычислений остается такой же, как вышеприведенная.

Таблица 5.4

Третий цикл вращения

$$
\begin{array}{ccccc}
\Lambda_2 & \cdot & \mathbf{S}_3 & = & \mathbf{Q}_3 \\
\begin{pmatrix} 0{,}598 & 0{,}447 \\ -0{,}805 & 0{,}894 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 1{,}00 & - \\ -0{,}09 & 1{,}00 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0{,}535 & 0{,}449 \\ -0{,}885 & 0{,}894 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Σq^2	1,094	0,999
$\sqrt{\Sigma q^2}$	1,044	0,999
$\Delta_3 = 1\sqrt{\Sigma q^2}$	0,958	1,005

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Q}_3 & \cdot & \Delta_3 & = & \Lambda_3 \\
\begin{pmatrix} 0{,}558 & 0{,}447 \\ -0{,}885 & 0{,}894 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 0{,}958 & - \\ - & 1{,}005 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0{,}535 & 0{,}449 \\ -0{,}848 & 0{,}898 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\Lambda' & \cdot & \Lambda_3 & = & \mathbf{C}_{r3} \\
\begin{pmatrix} 0{,}535 & -0{,}848 \\ 0{,}449 & 0{,}898 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 0{,}535 & 0{,}449 \\ -0{,}848 & 0{,}898 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1{,}005 & -0{,}521 \\ -0{,}521 & 0{,}999 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{V}_0 & \cdot & \Lambda_3 & = & \mathbf{V}_3 \\
\begin{array}{cc} V_{01} & V_{02} \end{array} & & & & \begin{array}{cc} V_{31} & V_{32} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0{,}84 & -0{,}45 \\
0{,}79 & 0{,}47 \\
0{,}82 & -0{,}46 \\
0{,}65 & 0{,}56 \\
0{,}85 & -0{,}42 \\
0{,}66 & 0{,}53 \\
0{,}87 & -0{,}40 \\
0{,}80 & 0{,}45 \\
0{,}75 & -0{,}40 \\
0{,}85 & 0{,}42 \\
0{,}86 & -0{,}44 \\
0{,}81 & 0{,}42
\end{pmatrix}
& \cdot & \begin{pmatrix} 0{,}535 & 0{,}449 \\ -0{,}848 & 0{,}898 \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix}
0{,}831 & -0{,}027 \\
0{,}024 & 0{,}773 \\
0{,}829 & -0{,}045 \\
-0{,}127 & 0{,}791 \\
0{,}811 & 0{,}004 \\
-0{,}096 & 0{,}769 \\
0{,}805 & 0{,}031 \\
0{,}046 & 0{,}760 \\
0{,}740 & -0{,}022 \\
0{,}093 & 0{,}751 \\
0{,}833 & -0{,}009 \\
0{,}077 & 0{,}738
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Следует обратить внимание читателя на следующие обстоятельства. Мы нашли новое положение осей координат, не зная, какая точка какой переменной соответствует. При этом мы исходили из всей системы переменных, рассматривая ее в целом как неизменную, и осуществляя вращение так, чтобы возможно больше точек оказалось вблизи координатных гиперплоскостей без изменения взаимного расположения векторов (рис. 5.16). Это положение гиперплоскостей было достигнуто вслепую в том смысле, что не учитывалось смысловое содержание переменных. Если теперь для проверки значимости полученной простой структуры использовать критерий Баргмана, то следует по матрице $\mathbf{V}_3$ подсчитать для каждого фактора количество переменных с нагрузкой меньше 0,10. Из табл. 5.4 видно, что на первый фактор приходится пять переменных, а на второй фактор — шесть. Эти переменные лежат в зоне $\pm$ 10% вокруг гиперплоскостей. Сравнивая с данными таблицы приложения, делаем вывод, что полученную структуру можно считать значимой на уровне 1%. Теперь мы можем приступить к интерпретации обоих факторов. (При более точных расчетах на первый фактор будут приходиться только три переменные, для которых выполняется условие $a_{il}/h_i < |0{,}10|$. Для второго фактора результат остается неизменным. Собственно говоря, в эксперименте рассматривали 24 переменные, для которых в ходе анализа было установлено однофакторное решение. Для простоты здесь ограничились первыми 12 переменными.) Оказалось, что экспериментальным данным присуща простая структура. Перед началом содержательной интерпретации факторов по переменным со значительными нагрузками заметим, что все результаты измерений систолического кровяного давления лежат вблизи вторичной оси 1, а результаты измерений диастолического — вблизи вторичной оси 2. Обе оси, представляющие факторы, коррелируют

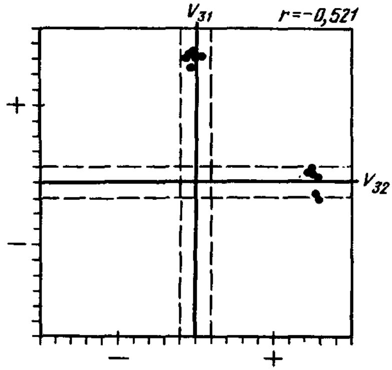


Рис. 5.16. Финальное факторное решение V_3. Все точки лежат в зонах координатных гиперплоскостей. Путем дальнейшего вращения осей достигнутое распределение переменных по факторам вряд ли сможет быть улучшено в смысле четкости и простоты структуры

между собой. При интерпретации связи знак корреляции может быть здесь изменен на обратный. Величина полученного коэффициента корреляции 0,52 соответствует известной по другим экспериментам связи между систолическим и диастолическим кровяным давлением. Результатом вторичного решения является матрица V_{rs}, связь которой с другими матрицами будет рассматриваться в гл. 5.4.

Попытаемся далее формально описать операции, соответствующие отдельным этапам итеративной процедуры вращения при поиске простой структуры графическим методом. Для иллюстрации используем пример с тремя факторами.

1. Чертят $\frac{m(m-1)}{2}$ графиков, число которых соответствует всем возможным комбинациям m факторов по два. Факторные нагрузки из каждой строки исходной ортогональной факторной матрицы принимаются в качестве координат векторов, представляющих переменные. Обычно сами векторы не вычерчиваются, а на графике точками обозначаются их концы. Исполнитель не должен знать смыслового содержания переменных.

2. Угол поворота осей определяется по графикам. При этом при вращении горизонтальной оси тангенс угла поворота считывается по отрезку, отсекаемому гиперплоскостью, соответствующей этой оси, от нижней части графика. При вращении вертикальной оси тангенс угла поворота считывается в левой части графика. Угол поворота осей не

должен превышать 45°. При считывании тангенса угла поворота следует по графику учитывать знаки (см. рис.5.13 и 5.14). Можно вращать одновременно две оси на одном графике. Так, можно было бы одновременно выполнять процедуру вращения с любым числом переменных на различных графиках. Углы поворота осей фиксируются в матрице поворота **S**. Эта матрица имеет размер m, а ее диагональные элементы равны единице. (Если фактор должен отражаться, т. е. если все его знаки изменяются на противоположные, то на этом месте ставят — 1.) Недиагональные элементы адекватны углам поворота осей в соответствующих плоскостях. Номер столбца обозначает всегда фактор, подвергаемый вращению. По каждому графику мы определяем значения двух элементов матрицы поворота, расположенных выше и ниже главной диагонали. Элементам, показывающим отсутствие вращения, приписывается нулевое значение или соответствующее место в матрице остается пустым.

3. Матрица поворота перемножается с матрицей преобразования предыдущего цикла вращения, в результате чего получают матрицу **Q**. В первом цикле вращения матрица преобразования приравнивается к тождественной матрице. Тогда имеем, что $\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_1$.

4. Матрица **Q** нормализуется путем умножения ее на диагональную матрицу $\mathbf{\Delta}$. Элементами диагональной матрицы $\mathbf{\Delta}$ являются обратные величины из квадратных корней квадратов элементов матрицы **Q**, просуммированных по столбцам. Нормализованная матрица **Q** является искомой матрицей преобразования $\mathbf{\Lambda}$.

5. В результате перемножения $\mathbf{\Lambda}'$ и $\mathbf{\Lambda}$ получаем $\mathbf{C}_r$ — матрицу коэффициентов корреляции между вторичными факторами, диагональные элементы которой с точностью до ошибок округления должны быть равны единице.

6. Умножая матрицу исходных факторов на матрицу преобразования, получаем факторную структуру вторичного решения после i-го цикла вращения: $\mathbf{V}_0\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{V}_i$. По величине факторных нагрузок, возникших в результате очередного цикла вращения осей координат, решают вопрос: нужна ли дальнейшая корректировка, может ли она привести к получению лучшего отражения простой структуры? Для этого применяется так же, как и в п. 1, графическое изображение факторной матрицы после поворота. Все матрицы получают индекс номера цикла вращения.

7. При осуществлении каждого цикла поворота подсчитывается число переменных, для которых выполняется неравенство $|a_{il}/h_i| < 0{,}10$. В этом случае говорят, что эти переменные лежат в зоне $\pm 0{,}10$ вокруг координатных гиперплоскостей. Получают так называемую таблицу подсчета нулевых нагрузок, в которой указывается, для какого количества переменных данное условие выполняется и какой процент переменных это составляет (см. следующий пример). Выраженная в процентах доля переменных, лежащих в гиперплоскости фактора, в процессе вращения должна постепенно достигать уровня, который не может быть превзойден при данном наборе исходных данных. Это предельное значение используется в качестве оптимальности достижения простой структуры. Исследованием дан-

ного критерия занимался Каттелл. Процедура вращения прекращается, когда число переменных, находящихся в зоне гиперплоскостей координат, при поворотах осей больше не увеличивается, а остается на одном и том же уровне или даже начинает уменьшаться. Отдельные этапы процедуры вращения можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{\Lambda}_{i-1} \cdot \mathbf{S}_i = \mathbf{Q}_i. \tag{5.13}$$

Индекс i означает номер цикла вращения. Умножая матрицу преобразования предыдущего цикла вращения $\mathbf{\Lambda}$ на матрицу поворота $\mathbf{S}$, получают $\mathbf{Q}$. Для первого цикла $i = 1$, а $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{\Delta}_i = \mathbf{\Lambda}_i. \tag{5.14}$$

Равенство (5.14) отражает нормализацию матрицы $\mathbf{Q}_i$. Элементами диагональной матрицы Δ_i являются величины $1/\sqrt{\sum\limits_i q_{ij}^2}$. В результате получаем искомую матрицу преобразования $\mathbf{\Lambda}_i$.

$$\mathbf{\Lambda}_i' \cdot \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{C}_{ri}. \tag{5.15}$$

По формуле (5.15) определяется корреляционная матрица $\mathbf{C}_{ri}$, отражающая связь между вторичными осями. Недиагональные ее элементы являются коэффициентами корреляции между повернутыми факторами. По (5.16) определяется новая матрица факторной структуры $\mathbf{V}_i$:

$$\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{V}_i. \tag{5.16}$$

Далее изображают переменные в новой системе координат, т. е. представляют на графике факторную матрицу $\mathbf{V}_i$, устанавливают новую матрицу поворота $\mathbf{S}_{i+1}$ и приступают к следующему циклу вращения по формуле (5.13).

Описанный метод вращения связан с большим объемом вычислений и вычерчиванием значительного количества графиков. При числе факторов более трех один цикл вращения продолжается несколько часов. Осуществление процедуры вращения сильно упрощается при использовании так называемой Rotoplot-программы, предложенной Каттеллом и Фостером [41]. Эта программа обеспечивает выполнение всех действий над матрицами на вычислительной машине, а на специальном экране могут высвечиваться все графики.

Просматривая проекции точек на все возможные плоскости координат, принимают решение, следует ли подвергать вращению данную пару осей. Машина устанавливает новую матрицу поворота, после чего автоматически вычисляются значения элементов матрицы преобразования и выдается новое положение осей с проекциями векторов на них. Более подробное описание Rotoplot-программы приводится дальше (см. с. 339). Обсуждаемый здесь пример рассчитан по этой программе.

Ортогональная исходная матрица с тремя факторами для 20 переменных представлена в табл. 5.5, графическое ее изображение в различных плоскостях приведено на рис. 5.17—5.19. Вначале подвергаются вращению оси V_{01} и V_{02} на рис. 5.17. Угол поворота у них одинаковый, но направление разное. Благодаря этому оси остаются орто-

Таблица 5.5

Первый цикл вращения

Матрица исходных факторов V_0			
	V_{01}	V_{02}	V_{03}
1	0,659	—0,736	0,138
2	0,725	0,180	—0,656
3	0,665	0,537	0,500
4	0,869	—0,209	—0,443
5	0,834	0,182	0,508
6	0,836	0,519	0,152
7	0,856	—0,452	—0,269
8	0,848	—0,426	0,320
9	0,861	0,416	—0,299
10	0,880	—0,341	—0,354
11	0,889	—0,147	0,436
12	0,875	0,485	—0,093
13	0,667	—0,725	0,109
14	0,717	0,246	—0,619
15	0,634	0,501	0,522
16	0,936	0,257	0,165
17	0,966	—0,239	—0,083
18	0,625	—0,720	0,166
19	0,702	0,112	—0,650
20	0,664	0,536	0,488

Подсчет числа нулевых нагрузок				
Фактор	V_{01}	V_{02}	V_{03}	Всего
Число	0	0	2	2
Процент	0	0	10	3

$$\mathbf{S}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,80 & - \\ 0,80 & 1,00 & - \\ - & - & 1,00 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0,7809 & -0,6247 & - \\ 0,6247 & 0,7809 & - \\ - & - & 1,000 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{r1}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & - & - \\ - & 1,00 & - \\ - & - & 1,00 \end{pmatrix}$$

гональными, а все точки попадают в один квадрант (рис. 5.20). Матрица поворота $\mathbf{S}_1$ этого *первого цикла вращения*, матрица преобразования $\mathbf{\Lambda}_1$ и матрица коэффициентов корреляций между вторичными осями $\mathbf{C}_{r1}$ построены по указанным выше формулам (5.13)—(5.16), а результаты приведены в той же самой табл. 5.5. При подсчете переменных, для которых выполняется условие $|a_{il}/h_i| < 0,10$, оказалось, что только в одной гиперплоскости, соответствующей фактору V_{03}, лежат две переменные, не выходя за зону $\pm 0,10$. Итак, о достижении простой структуры пока еще рано говорить. Результат первого цикла вращения $\mathbf{V}_1$ с некоторыми промежуточными вычислениями для *второго цикла вращения* приведен в табл. 5.6. Графическое изображение новой факторной матрицы $\mathbf{V}_1$ с двумя повернутыми факторами дано на рис. 5.20—5.22. На рис. 5.21 производится поворот оси V_{13} до положения V_{23} (тангенс угла поворота, а следовательно, и соответствующий элемент матрицы поворота равен — 0,60), а также поворот оси V_{11} до положения V_{21} (тангенс угла поворота равен +0,90). Матрицы $\mathbf{\Lambda}_2$ и $\mathbf{C}_{r2}$ вычисляются по указанным выше формулам. После поворота вторичные оси V_{21} и V_{23} коррелируют между собой, что находит отражение в матрице $\mathbf{C}_{r2}$ и на графике.

Результат второго цикла вращения в виде факторной матрицы $\mathbf{V}_2$ и промежуточные расчеты для *третьего цикла вращения* приведены в табл. 5.7. На рис. 5.23 и 5.24 производится поворот оси V_{21} до положения V_{31}, благодаря чему ряд точек попадает на саму координатную гиперплоскость L_{31} или находится в непосредственной близости от нее. Соответствующие тангенсы углов поворота, записываемые в

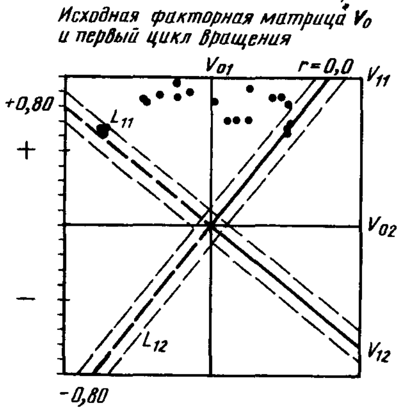


Рис. 5.17

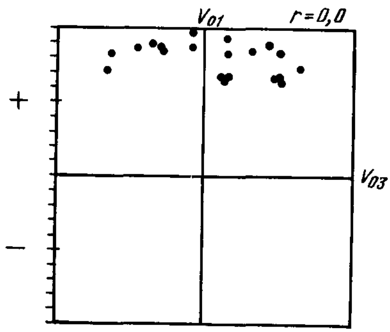


Рис. 5.18

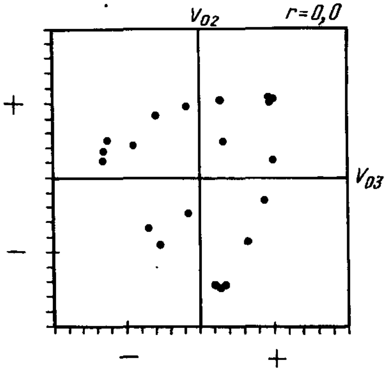


Рис. 5.19

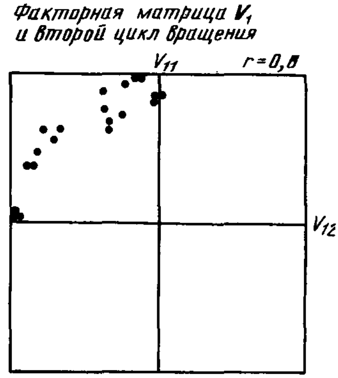


Рис. 5.20

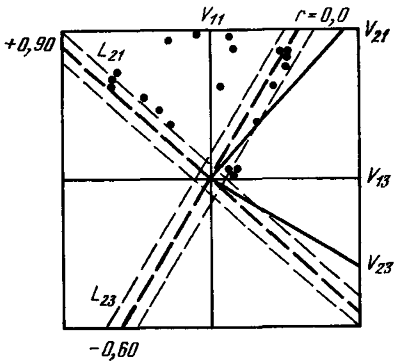


Рис. 5.21

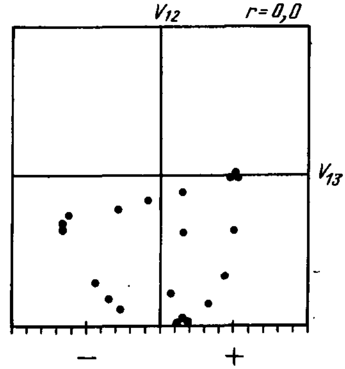


Рис. 5.22

Таблица 5.6

Второй цикл вращения

Матрица V_1			
	V_{11}	V_{12}	V_{13}
1	0,055	—0,986	0,138
2	0,679	—0,312	—0,656
3	0,855	0,004	0,500
4	0,548	—0,706	—0,443
5	0,765	—0,379	0,508
6	0,977	—0,117	0,152
7	0,386	—0,888	—0,269
8	0,396	—0,862	0,320
9	0,932	—0,213	—0,299
10	0,474	—0,816	—0,354
11	0,602	—0,670	0,436
12	0,986	—0,168	—0,093
13	0,068	—0,982	0,109
14	0,714	—0,256	—0,619
15	0,808	—0,005	0,522
16	0,891	—0,384	0,165
17	0,605	—0,790	—0,083
18	0,038	—0,953	0,166
19	0,618	—0,351	—0,650
20	0,853	0,004	0,488

Подсчет числа нулевых нагрузок				
Фактор	V_{11}	V_{12}	V_{13}	Всего
Число	3	3	2	8
Процент	15	15	10	13

$$\mathbf{S}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & — & -0,60 \\ — & -1,00 & — \\ 0,90 & — & 1,00 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2$$

$$\begin{pmatrix} 0,5804 & 0,6247 & -0,4018 \\ 0,4643 & -0,7809 & -0,3214 \\ 0,6690 & — & 0,8575 \end{pmatrix}$$

$$C_{T2}$$

$$\begin{pmatrix} 1,000 & — & — \\ — & 1,000 & — \\ 0,191 & — & 1,000 \end{pmatrix}$$

Таблица 5.7

Третий цикл вращения

Матрица V_2			
	V_{21}	V_{22}	V_{23}
1	0,133	0,986	0,090
2	0,066	0,312	—0,912
3	0,970	—0,004	—0,011
4	0,111	0,706	—0,662
5	0,908	0,379	0,042
6	0,828	0,117	—0,372
7	0,107	0,888	—0,429
8	0,508	0,862	0,071
9	0,493	0,213	—0,736
10	0,116	0,816	—0,548
11	0,739	0,670	0,064
12	0,671	0,168	—0,587
13	0,123	0,983	0,059
14	0,116	0,256	—0,898
15	0,950	0,005	0,032
16	0,773	0,384	—0,317
17	0,394	0,790	—0,382
18	0,140	0,953	0,123
19	0,025	0,351	—0,875
20	0,961	—0,004	—0,021

Подсчет числа нулевых нагрузок				
Фактор	V_{21}	V_{22}	V_{23}	Всего
Число	2	3	8	13
Процент	10	15	40	21

$$\mathbf{S}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & — & — \\ -0,10 & 1,00 & -0,10 \\ 0,08 & 0,30 & -1,00 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3$$

$$\begin{pmatrix} 0,4748 & 0,4829 & -0,4620 \\ 0,5050 & -0,8403 & -0,2421 \\ 0,7209 & 0,2464 & -0,8532 \end{pmatrix}$$

$$C_{T3}$$

$$\begin{pmatrix} 1,000 & — & — \\ -0,017 & 1,000 & — \\ -0,274 & -0,191 & 1,000 \end{pmatrix}$$

матрицу поворота, равны —0,10 и 0,08. Конечный результат вращения в виде финальной факторной матрицы V_3 представлен в табл. 5.8, а соответствующие ее изображения в различных плоскостях даны на рис. 5.26—5.28. Каждый фактор, как видно из той же табл. 5.8, определяется девятью переменными. Дальнейшее вращение осей не улучшит полученную структуру, а приведет только к выпадению точек из критических зон вокруг гиперплоскостей координат. Поэтому принимаем решение прекратить вращение, считая, что достигнутое положение осей обеспечивает простую структуру. В результате вращения доля всех переменных, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, увеличилась от 3 (табл. 5.5) до 45% (табл. 5.8). После третьего цикла вращения был достигнут уровень распределения переменных по факторам, который не может быть улучшен. Все три фактора являются значимыми по тесту Баргмана.

Таблица 5.8

Финальное факторное решение V_3 после трех вращений

Матрица V_3			
	V_{31}	V_{32}	V_{33}
1	0,041	0,971	0,009
2	—0,038	0,037	0,938
3	0,947	—0,007	0,011
4	—0,012	0,486	0,729
5	0,854	0,375	—0,004
6	0,769	0,005	0,382
7	—0,016	0,727	0,516
8	0,418	0,846	0,016
9	0,403	—0,007	0,753
10	—0,010	0,624	0,626
11	0,662	0,660	0,003
12	0,593	—0,008	0,601
13	0,029	0,958	0,040
14	0,018	—0,013	0,919
15	0,930	0,014	—0,031
16	0,693	0,277	0,354
17	0,278	0,647	0,459
18	0,053	0,948	—0,027
19	—0,079	0,085	0,906
20	0,938	—0,010	0,020

Подсчет числа нулевых нагрузок				
Фактор	V_{31}	V_{32}	V_{33}	Всего
Число	9	9	9	27
Процент	45	45	45	45

По таблице Г приложения находим, что при трех факторах и 20 переменных на 1%-ном уровне значимости следует ожидать не менее 8 переменных, для которых выполняется условие $|a_{il}/h_i| < 0{,}10$. Для каждого фактора матрицы V_3 этому условию удовлетворяют 9 переменных. Следовательно, считаем, что полученное факторное решение удовлетворяет принципу простой структуры

Описанный выше пример вращения известен под названием *бокс-проблемы* Тэрстоуна и приведен в его книге как учебный пример, но при вращении выбирались другие углы поворота. В данном примере процедура вращения осуществлялась независимо от решения, предлагаемого Тэрстоуном, но в итоге получили сходные результаты. При желании читатель самостоятельно может провести сравнение между методом, описываемым Тэрстоуном [286; *6*] и приведенным здесь. Если экспериментальным данным действительно присуща четкая простая структура, то к ней можно прийти различными способами. Различные способы требуют и различных затрат времени. Доказательством объек-

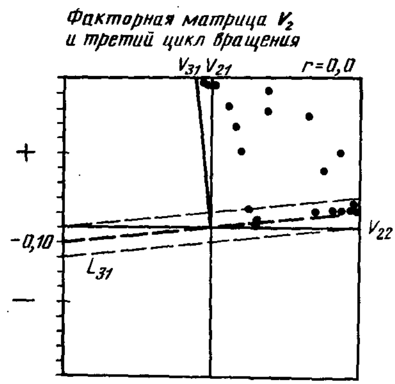


Рис. 5.23

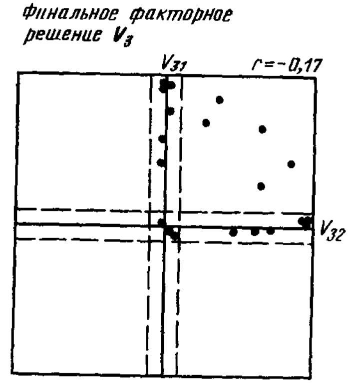


Рис. 5.26

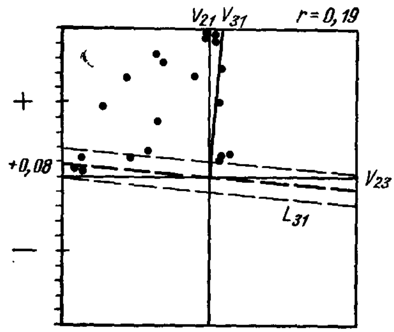


Рис. 5.24

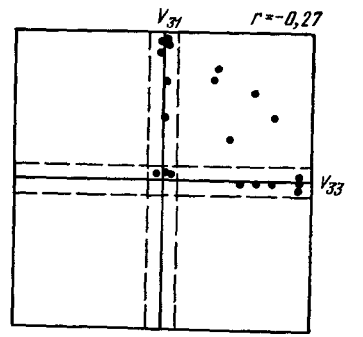


Рис. 5.27

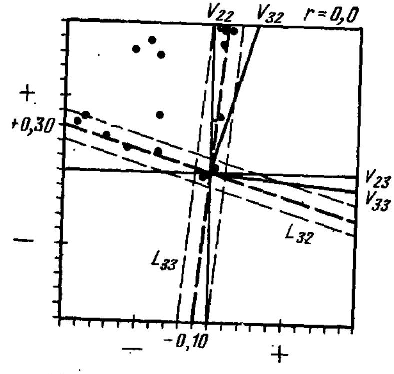


Рис. 5.25

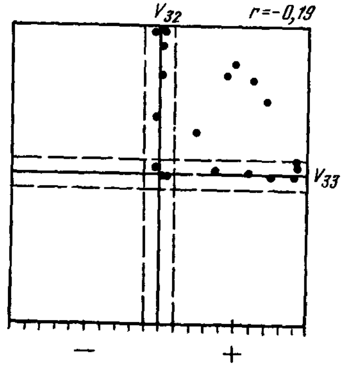


Рис. 5.28

тивности процедуры вращения является тот факт, что исследователи независимо друг от друга на основе одних и тех же данных, но используя различные методы вращения, приходят к одинаковым результатам. Если в приведенном примере из 20 переменных выбрать 9 и в качестве упражнения дать задание нескольким студентам одного курса выполнить процедуру вращения для отобранного числа переменных и трех факторов, то можно убедиться, что независимо друг от друга они придут к одинаковым результатам, вполне согласующимся с финальным факторным решением по всем 20 переменным. К обсуждению бокс-проблемы мы еще раз вернемся в 7.1.1 совсем по другому поводу.

5.4. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ МАТРИЦАМИ, ПРИМЕНЯЕМЫМИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ВРАЩЕНИЯ

В предыдущей главе речь шла о получении некоторого вторичного факторного решения и в рамках найденной новой системы координат осуществлялся поиск простой структуры. Выше мы пояснили различие между первичными факторами и вторичными осями (см. с. 186). Обе системы координат в отношении выполнения принципа простой структуры являются альтернативными решениями. В обеих системах координат следует отличать факторную структуру от факторного отображения. Если наряду с матрицами преобразования учитывать корреляцию между факторами, то мы будем иметь восемь матриц. Следует помнить об их различии и знать соотношения между ними. В некоторых публикациях по факторному анализу часто не указывается, о каких матрицах идет речь. Это усложняет восприятие материала. Приводимые далее в табл. 5.9 обозначения важнейших матриц частично заимствованы у Каттелла, так как они отличаются наглядностью.

Таблица 5.9

Обозначения матриц, используемых в косоугольных решениях

	Ортогональная исходная матрица	Матрица преобразования	Факторное отображение	Факторная структура	Матрица факторных корреляций
Первичные факторы	$\mathbf{A}=\mathbf{V}_0$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{V}_{fp}$	$\mathbf{V}_{fs}$	$\mathbf{C}_f$
Вторичные оси	$\mathbf{A}=\mathbf{V}_0$	$\mathbf{\Lambda}$	$\mathbf{V}_{rp}$	$\mathbf{V}_{rs}$	$\mathbf{C}_r$

Ортогональная исходная матрица обозначается либо **A**, либо $\mathbf{V}_0$. Матрица преобразования, переводящая исходное ортогональное отображение в соответствующую факторную структуру, для первичного факторного решения обозначается через **T**, для вторичного факторного решения — через $\mathbf{\Lambda}$. Все неортогональные матрицы, которые отражают связь между факторами и переменными, обозначаются буквой **V**. Индексы при этой букве указывают вид факторного решения и принадлежность матрицы к факторному отображению либо к факторной структуре. Так, $\mathbf{V}_{fp}$ является матрицей факторного отображения в первичном факторном решении. Первая буква индекса, f, связана с английским термином *primary factor solution* (первичное факторное решение), вторая буква, p, происходит от английского термина *pattern* (факторное отображение). Через $\mathbf{V}_{fs}$ обозначается матрица факторной структуры для первичного факторного решения. На это указывает первая буква индекса f. Вторая буква индекса происходит от термина *structure*. Для вторичных осей (*reference vectors*) применяется индекс r. Так, $\mathbf{V}_{rp}$ означает матрицу факторного отображения, а $\mathbf{V}_{rs}$ — матрицу факторной структуры вторичного факторного решения (*reference vector structure*). Матрица коэффициентов корреляции между факторами обозначается символом $\mathbf{C}$. Индекс при этом символе указывает, к первичным факторам (f) или ко вторичным осям (r) относится данная матрица.

Простая структура устанавливается либо по матрице $\mathbf{V}_{rs}$, либо по матрице $\mathbf{V}_{fp}$. Ни $\mathbf{V}_{fs}$, ни $\mathbf{V}_{rp}$ не пригодны для нахождения простой структуры. Большей частью финальным результатом процедуры вращения является матрица $\mathbf{V}_{rs}$, метод получения которой описан в гл.5.3. В большинстве публикаций по факторному анализу речь идет именно о ней, хотя для установления простой структуры также пригодна матрица $\mathbf{V}_{fp}$. Но недостаточно в качестве финального результата при косоугольном вращении указывать только одну матрицу. Чтобы ясно представить себе картину вращения, необходимо по крайней мере указать $\mathbf{V}_0$, матрицу преобразования Λ и $\mathbf{V}_{rs}$. Вместо матрицы преобразования, а еще лучше — в дополнение к ней нужно привести матрицу коэффициентов корреляции между факторами, а именно $\mathbf{C}_r$ или $\mathbf{C}_f$ в зависимости от того, о первичном или вторичном факторном решении идет речь.

Для вторичного факторного решения имеют силу следующие соотношения между матрицами:

$$\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_0\Lambda = \mathbf{V}_{rp}\mathbf{C}_r. \tag{5.17}$$

Вторая часть этого равенства была использована для определения факторной структуры (см. (2.29)), а первая часть — в итеративной процедуре вращения при поиске простой структуры в соответствующей плоскости. При этом матрица Λ определяется путем нормализации произведения матрицы поворота и матрицы преобразования предыдущего цикла вращения (см. гл. 5.3). Матрица коэффициентов корреляции между факторами вычисляется по следующей формуле (повторяем еще раз формулу (5.15)):

$$\mathbf{C}_r = \Lambda' \cdot \Lambda. \tag{5.18}$$

Используя (5.17) и (5.18), получим

$$\mathbf{V}_{rp} = \mathbf{V}_{rs}\mathbf{C}_r^{-1} = \mathbf{V}_0\,(\Lambda')^{-1}. \tag{5.19}$$

Аналогичную систему равенств имеем для первичного факторного решения:

$$\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{V}_0\mathbf{T} = \mathbf{V}_{fp}\mathbf{C}_f, \tag{5.20}$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{T}'\mathbf{T}, \tag{5.21}$$

$$\mathbf{V}_{fp} = \mathbf{V}_{fs}\mathbf{C}_f^{-1} = \mathbf{V}_0\,(\mathbf{T}')^{-1}. \tag{5.22}$$

Все эти равенства в принципе уже упоминались и здесь собраны вместе для наглядности. Они отражают взаимосвязь между матрицами различных систем координат при косоугольном вращении. Связь между двумя системами координат можно записать в виде приводимых далее равенств. При переходе от первичных факторов ко вторичным осям особую роль играет диагональная матрица $\mathbf{D}$. Элементы диагональной матрицы являются обратными величинами из квадратных корней диагональных элементов матрицы $\mathbf{C}_r^{-1}$. Эти величины являются коэффициентами корреляции между соответствующими первичными факторами и вторичными осями.

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{C}_r^{-1})^{-1/2} = \mathbf{T}'\mathbf{\Lambda}. \tag{5.23}$$

Обычно матрицу $\mathbf{D}$ составляют по первой части этого равенства, так как редко случается, что известны одновременно и $\mathbf{T}$, и $\mathbf{\Lambda}$.

Итак, с помощью матрицы $\mathbf{D}$ устанавливаются точные соотношения между двумя типами косоугольных решений.

$$\mathbf{V}_{fp} = \mathbf{V}_{rs}\mathbf{D}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_{fp}\mathbf{D}, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{V}_{rp} = \mathbf{V}_{fs}\mathbf{D}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathbf{V}_{fs} = \mathbf{V}_{rs}\mathbf{D}, \tag{5.25}$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{D}\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{D}. \tag{5.26}$$

Первое равенство из (5.24) используется для определения матрицы первичного отображения по матрице факторной структуры, соответствующей вторичным осям (факторам). Формула (5.26) служит для определения корреляции между первичными факторами по корреляции между вторичными факторами.

Формулы (5.17)—(5.26) выявляют связи, существующие между матрицами косоугольного вращения. На практике применяются не все эти формулы. Если в результате вращения получают матрицу вторичной факторной структуры $\mathbf{V}_{rs}$, то одновременно получают матрицу преобразования $\mathbf{\Lambda}$ и матрицу коэффициентов корреляции между вторичными факторами $\mathbf{C}_r$. Тогда, вычислив диагональную матрицу $\mathbf{D}$ по 5.23, имеем возможность по 5.24 определить $\mathbf{V}_{fp}$, а по 5.26 — матрицу $\mathbf{C}_f$. При косоугольном факторном решении все эти матрицы должны указываться.

5.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПОИСКЕ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Выше уже упоминалось, что вращение можно осуществить двумя методами: с помощью геометрической интерпретации и так называемым аналитическим методом — путем соответствующих вычислений, приводящих к определению нового положения системы координат. Мы познакомились с одним из самых распространенных методов — графическим. Теперь приступаем к характеристике аналитических методов с применением различных критериев, которые должны в процессе итерации принимать либо максимальные, либо минимальные значения в зависимости от степени связи метода с концепцией простой структуры.

Примечательным является тот факт, что Тэрстоун [286; *6*] с самого начала ограничивал употребление аналитических методов, считая, что они дают удовлетворительные результаты только применительно к тем данным, которые действительно обладают четкой и характерной структурой. В таких случаях эффективнее использовать чисто аналитические методы. Но исследователю редко приходится встречаться на практике с такими данными. Преимущество аналитических методов состоит в том, что их легко запрограммировать и соответствующие расчеты производить на ЭВМ, тем самым резко сократив время на обработку данных. Но получение решения на ЭВМ по готовым программам не дает возможности исполнителю прочувствовать всю специфику данных и затрудняет поэтому интерпретацию результатов. Кроме того, исследователь не всегда знает, по какому критерию псстроена программа. Поэтому аналитические методы не всегда приводят к наилучшим результатам. Для них всех характерно то, что критерий максимизации не полностью согласуется с концепцией простой структуры, в связи с чем окончательный результат вращения по сравнению с результатом, полученным эвристическим графическим методом, имеет некоторый сдвиг. Несмотря на этот недостаток, аналитические методы на практике находят широкое применение прежде всего из-за возможности переложить больший объем вычислений на ЭВМ. Переход от ручного способа расчета к машинному, для которого наиболее подходящими оказались как раз аналитические методы, способствовал распространению факторного анализа как научного метода исследований. Особенно полезно применять аналитические методы на первых этапах вращения. Наибольшего успеха в достижении простой структуры добиваются тогда, когда бóльшая часть вычислительной работы выполняется на ЭВМ, а меньшая часть остается для итеративной процедуры поиска простой структуры графическим способом в соответствующей плоскости.

Вопросами объективизации проблемы вращения в факторном анализе занимались многие исследователи. Первым из них был Хорст [142; *2*], который в 1941 г. высказал некоторые идеи, пытаясь найти аналитический подход к принципу простой структуры. Тэрстоун [286; *5*] в 1954 г. также предложил аналитический метод решения задачи вращения, однако наиболее удачным был алгоритм, разработанный Тукером [291; *4*] в 1955 г. Началом же применения аналитических методов следует все-таки считать появление критерия оптимизации, над которым независимо друг от друга и почти одновременно (1952—1953 гг.) работали четыре исследователя. В конце 60-х и начале 70-х годов были разработаны аналитические методы получения косоугольного решения. Далее аналитические методы косоугольного и ортогонального вращения обсуждаются раздельно. При этом основное внимание уделяется принципу решения задачи и в каждом случае описываются наиболее известные методы. Практическое применение методов возможно только при наличии быстродействующих ЭВМ. Мы не имеем возможности здесь подробно останавливаться на описании программ, разработанных для различных типов ЭВМ и реализующих многочисленные алгоритмы аналитических методов. Читатель, интересующийся этими вопросами, может обратиться к библиографии, приведенной в конце данной книги, или посмотреть соответствующие разделы в книге Хармана [117]. Данная глава может служить лишь введением в аналитические методы вращения. В ней мы собрались проследить прежде всего ход развития самих идей этих методов.

5.5.1. Ортогональный метод

В своих исследованиях Кэрролл, Саундерс [249; *1*], Нейгауз и Райгли, а также Фергюсон почти одновременно и совершенно независимо друг от друга предложили критерии вращения, которые в принципе соответствуют друг другу. В то время как первые три автора базировались на постулатах Тэрстоуна, определявших принцип простой структуры, Фергюсон подошел к проблеме с позиции наибольшей простоты или экономии при описании переменных в пространстве общих факторов. Он исходил из того, что самое экономное описание точки в двумерной системе координат соответствует такому ее положению, когда одна из осей проходит через нее. Следовательно, для наиболее экономного описания точки нужно при вращении осей стремиться к этому идеальному случаю. Совершенно очевидно, что если одна из осей приближается к точке, то произведение двух ее координат начинает уменьшаться. Рассуждая таким образом, Фергюсон пришел к выводу, что в качестве меры экономии может служить сумма произведений координат множества точек. А так как точки могут иметь как положительные, так и отрицательные координаты (факторные нагрузки), он предложил вместо простой суммы брать сумму квадратов произведений координат. Таким образом получился следующий критерий экономного описания переменных, который должен принимать минимальное значение при таком положении системы координат, когда наибольшее число точек лежит вблизи осей:

$$\sum_{k<l=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}\, a_{il})^2 = \min. \tag{5.27}$$

Идея экономии в факторном анализе тесно примыкает к принципу простой структуры Тэрстоуна. Примем следующие обозначения:

A $= (a_{il})$ — исходная ортогональная факторная матрица;

B $= (b_{il})$ — финальная факторная матрица, полученная в результате ортогонального вращения;

T — ортогональная матрица преобразования.

Следовательно, **B** = **AT**.

Если при ортогональном преобразовании **T** матрица **A** переходит в матрицу **B**, то значение общности любой из переменных остается неизменным, т. е.

$$\sum_{l=1}^{r} b_{il}^2 = \sum_{l=1}^{r} a_{il}^2 = h_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.28}$$

Очевидно, квадрат общности также остается постоянным:

$$\left(\sum_{l=1}^{r} b_{il}^{2}\right)^{2}=\sum_{l=1}^{r} b_{il}^{4}+2 \sum_{k<l=1}^{r} b_{ik}^{2} \cdot b_{il}^{2}=\text{const}. \tag{5.29}$$

Просуммировав это выражение по всем n переменным, опять получим постоянную величину

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} b_{il}^{4}+2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{k<l=1}^{r} b_{ik}^{2} \cdot b_{il}^{2}=\text{const}. \tag{5.30}$$

То, что сумма двух членов в (5.30) всегда остается постоянной, означает, что с увеличением одного из них другой должен уменьшаться. В качестве меры экономии можно принять любой из членов. В частности, минимальное значение второго члена было указано как критерий экономии в (5.27). Фергюсон предложил также другой критерий, связанный с максимизацией выражения

$$Q=\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} b_{il}^{4}. \tag{5.31}$$

Другие три автора различными путями пришли к функциям, которые должны иметь такой же максимум. Нейгауз, Райгли и Саундерс предложили максимизировать выражение (5.31), правда, в модифицированном виде. Формула, предложенная Кэрроллом, сводится к минимизации второго слагаемого в (5.30). Оба критерия применяются не только в ортогональном случае. Методы получения аналитического решения с помощью перечисленных критериев объединены под названием «квартимакс» (*quartimax*). Первым этот термин использовал Барт для критерия, предложенного Нейгаузом и Райгли. Харман распространил термин «метод квартимакс» на несколько независимых вариантов аналитических процедур, связанных со всеми четырьмя критериями. Метод квартимакс не находит сегодня широкого применения из-за одного своего существенного недостатка — сильной тенденции к выделению генерального фактора. В настоящее время наиболее распространена его модификация, известная под названием «метод варимакс», лучше приближающий решение с простой структурой. Метод варимакс был предложен Кайзером [164; *1*, *2*].

Кайзер исходил из того, что с помощью квартимакс-метода добиваются лишь упрощения описания каждой переменной и не учитывают столбцы факторной матрицы. В отличие от этого он решил сделать упор на упрощение каждого фактора, т. е. рассматривал столбцы. Согласно Кайзеру, простота фактора определяется дисперсией квадратов его нагрузок. Если эта дисперсия максимальна, то отдельные его нагрузки близки к нулю или единице, т. е. он описывается наиболее просто и поэтому его можно наилучшим образом проинтерпретировать. Дисперсия квадратов нагрузок фактора l равна:

$$s_l^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (b_{il}^2)^2 - \frac{1}{m^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} b_{il}^2 \right]^2. \quad (5.32)$$

Просуммируем эту дисперсию по всем факторам. Полученная в результате этого величина будет максимальная в случае, когда дисперсия квадратов нагрузок каждого фактора примет наибольшее значение:

$$\sum_{l=1}^{r} s_l^2 = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} b_{il}^4 - \frac{1}{m^2} \sum_{l=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{m} b_{il}^2 \right]^2 = \max. \quad (5.33)$$

Данный критерий имеет тот недостаток, что переменная с большей общностью сильнее влияет на значение угла поворота, чем переменная с меньшей общностью, т. е. она обладает большим весом при определении финального решения. Кайзер усовершенствовал критерий (5.33) таким образом, чтобы все переменные при решении задачи вращения имели равные веса. Он предложил делить факторные нагрузки на соответствующие общности, благодаря чему все векторы-переменные приводятся к длине, равной единице. Таким образом, при определении положения осей координат имеют дело с нормированными переменными с равными весами. В отличие от (5.33) модифицированный Кайзером *варимакс-критерий* умножается еще на m^2:

$$m \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} (b_{il}/h_i)^4 - \sum_{l=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{m} b_{il}^2/h_i^2 \right]^2 = \max. \quad (5.34)$$

Нахождение максимума функции (5.34) приводит к определению положения системы координат, которое удовлетворяет требованиям ортогональной простой структуры. С техникой вычисления критерия можно познакомиться в [164; 2]. По сравнению с другими аналитическими аппроксимациями при поиске ортогонального решения с простой структурой метод варимакс обладает определенными преимуществами. Особенно полезно его применять в первом цикле вращения. К результату варимакс-решения применяют затем Rotoplot-программу и выполняют итеративную процедуру вращения в соответствующих плоскостях.

Следующий пример иллюстрирует решение, полученное с помощью метода варимакс. В качестве исходного решения использована система главных факторов табл. 3.14, к которым был применен графический метод вращения (гл. 5.3). Результат варимакс-вращения представлен в табл. 5.10 и на рис. 5.29.

Если сравнить рис. 5.29 с результатом косоугольного вращения на рис. 5.16, то бросается в глаза большая разница между ними. Ортогональное вращение может аппроксимировать данные до получения простой структуры достаточно хорошо только тогда, когда векторы действительно ортогональны. Лишь дальнейшее вращение осей до получения косоугольной простой структуры, как это показано на рис. 5.29, привело бы к удовлетворительному результату, вполне со-

Таблица 5.10

Варимакс-решение для двенадцати переменных
(исходное факторное отображение приведено в табл. 3.14)

	F_1	F_2
1	0,92	0,23
2	0,27	0,88
3	0,92	0,21
4	0,11	0,85
5	0,91	0,26
6	0,13	0,84
7	0,91	0,28
8	0,29	0,87
9	0,82	0,20
10	0,34	0,87
11	0,93	0,24
12	0,32	0,85

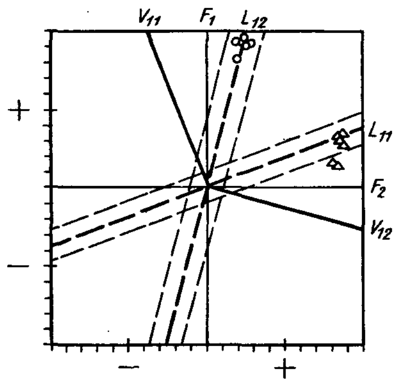


Рис. 5.29. Варимакс-вращение. Использованы данные табл. 5.10. Точки не попадают в зоны $\pm 0{,}10$ вокруг гиперплоскостей F_1 и F_2. Вращая оси, мы приходим к такому положению системы координат, что большинство точек укладываются в допустимую величину зон вокруг гиперплоскостей L_{11} и L_{12}. Сравните с рис. 5.16

гласующемуся с рис. 5.16. Применение варимакс-метода позволило бы сократить процедуру вращения, уменьшив ее на два цикла по сравнению с примененным графическим методом.

5.5.2. Косоугольный метод

В случае ортогональных факторов при применении аналитических методов вращения отдают предпочтение варимакс-критерию, как наиболее эффективному. При косоугольных факторах мы не можем однозначно указать аналогичный критерий. Разработано несколько аналитических методов получения косоугольного решения, но ни один из них не дает основания утверждать, что он приводит к наилучшим результатам. Кроме критериев, которые в принципе являются обобщением критериев, приведенных в предыдущей главе, имеется так называемый метод максплейн (*maxplane-programm*) Каттелла и Мюрля, реализованный на ЭВМ Эбером. Он близок к итеративным процедурам вращения, осуществляемым с помощью графиков. Часто пользуются так называемым методом *облимакс* (*Oblimax-rotation*) Саундерса [249; *2*].

С помощью облимакс-критерия исходя из матрицы $\mathbf{V}_0$ приходят в результате вращения к матрице $\mathbf{V}_{rs}$ (см. табл. 5.9).

Матрица $\mathbf{V}_{rs}$ содержит коэффициенты корреляции между переменными и вторичными осями. Вращение производится так, чтобы значение критерия достигало максимума:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{r} v_{il}^4}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{r} v_{il}^2\right)^2} = \max. \qquad (5.35)$$

Критерий (5.35) указан в том первоначальном виде, в каком он был получен Саундерсом [249; *2*]. В ортогональном случае критерий K эквивалентен формулам (5.30) или (5.31), так как знаменатель инвариантен относительно ортогонального преобразования. В случае косоугольного решения для K выписывается полное выражение и оговорка насчет знаменателя недействительна. При работе с этим критерием программа построена так, что вращение производится последовательно в каждой плоскости до достижения наибольшего значения K для любой пары осей, и постепенно все значение функции (5.35) достигает максимума. Пинцка и Саундерс указали алгоритм решения, а позже К. У. Дикман составил программу алгоритма и реализовал ее на ЭВМ. Опыт показывает, что метод облимакс имеет тенденцию к завышению коэффициентов корреляции между факторами по сравнению с действительными их значениями, характерными для данной структуры, т. е. величина угла между осями занижается и решение характеризуется наибольшей косоугольностью. Облимакс-критерий дает удовлетворительное факторное решение, если экспериментальным данным действительно присуща четкая простая структура. Приводимый далее пример является учебным, который на практике редко может встретиться. Исходную факторную матрицу заимствуем опять из табл. 3.14. К данным этой таблицы уже применялись метод варимакс и итеративная процедура вращения, выполненная с помощью графиков, поэтому мы имеем возможность сравнить все три решения. Результат облимакс-вращения приведен в табл. 5.11 и изображен на рис. 5.30. Интересно отметить, что облимакс-решение довольно хорошо согласуется с решением, полученным с помощью графической процедуры. Коэффициент корреляции между вторичными осями равен 0,54.

Кроме облимакс-критерия, имеется еще несколько критериев, основанных на достижении максимума или минимума некоторой функции и аналогичных тем, которые уже обсуждались нами. Ни один из методов, базирующихся на этих критериях, не дает во всех случаях удовлетворительного результата. Предпочтительность того или другого из них связана с природой исследуемого материала. Мы ограничимся здесь только краткой характеристикой этих методов. Минимизация функции (5.27) без наложения ограничения, обусловливающего ортогональность факторов, приводит к так называемому *квартимин-критерию* Кэрролла. Кэрролл предложил целый класс методов преобразования исходного решения в косоугольное, получивших общее на-

Таблица 5.11

Облнмакс-решение для двенадцати переменных
(исходная факторная матрица приведена в табл. 3.14)

	V_1	V_2
1	0,82	—0,03
2	—0,03	0,78
3	0,78	—0,02
4	—0,09	0,70
5	0,54	0,01
6	—0,07	0,68
7	0,78	0,02
8	—0,01	0,79
9	0,73	—0,01
10	0,03	0,78
11	0,83	—0,02
12	—0,03	0,78

звание «облимин». Их обзор приведен у Хармана [117]. Облимин-методы основаны на различных комбинациях квартимин-критерия и косоугольного варианта варимакс-критерия Кайзера, известного под названием «коваримин». Кайзер и Дикман предложили другую процедуру поиска косоугольной системы координат с помощью критерия *бинормамин.* Обилие терминов может ввести в заблуждение. Вполне возможно, что на основе всех перечисленных критериев будет создан метод, который превзойдет по качеству получения простой структуры метод облимакс. Но до сих пор это никому не удалось сделать. Часть авторов приводит доводы в пользу одних методов, другая часть подчеркивает достоинства других методов. Но большинство исследователей все-таки склоняются к мнению, что эффективность и преимущества того или иного метода тесно связаны с характером изучаемого материала.

Основное преимущество аналитических методов заключается в том, что по разработанным алгоритмам могут быть составлены машинные программы и все расчеты произведены на ЭВМ. Аналитические методы вращения являются объективными в том смысле, что вся процедура выполняется на ЭВМ как бы без вмешательства исследователя, но они не являются наилучшими в смысле получения простой структуры. Несмотря на однозначность принципов построения алгоритмов, различные методы приводят к различным результатам и ни один из них не дает простую структуру, оптимальную в смысле удовлетворения критерия Баргмана или Каттелла. Уже упомянутый здесь метод максплейн Каттелла и Мюрля дает хорошие результаты, так как его алгоритм близок к графическим процедурам вращения и основан на получении наибольшего числа нулевых нагрузок в гиперплоскостях координат.

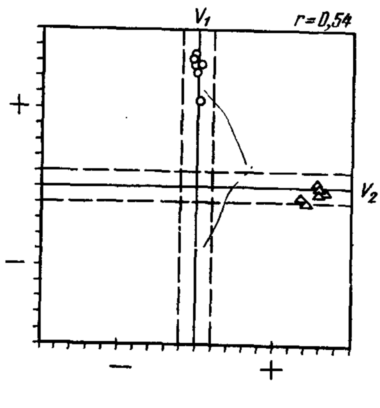


Рис. 5.30. Облимакс-вращение по данным табл. 5.11. Точки лежат в зоне ±0,10 вокруг гиперплоскостей. Результаты этого метода вращения согласуются с рис. 5.16

5.6. ПРИМЕР ВРАЩЕНИЯ

При осуществлении вращения рекомендуется комбинировать применение варимакс-критерия с последующей итеративной процедурой до получения косоугольной простой структуры, как это было показано в гл. 5.3. Далее будет приведен пример с четырьмя факторами и тридцатью двумя переменными. Это так называемая задача о мячах Каттелла и Дикмана (*ball-problem*), которая будет более подробно описана в 7.1.2. Познакомиться с описанием и решением этой задачи можно также в работе этих авторов [39]. С помощью метода главных факторов по корреляционной матрице для тридцати двух переменных были выделены четыре фактора и к полученному факторному решению

Таблица 5.12

Исходная факторная матрица V_0 и 1-й цикл вращения

V_0				
	V_{01}	V_{02}	V_{03}	V_{04}
1	0,55	0,75	0,01	—0,05
2	0,55	0,83	—0,09	—0,02
3	—0,49	—0,85	0,11	0,02
4	0,01	—0,16	0,79	—0,02
5	0,06	—0,24	0,91	—0,01
6	—0,60	—0,47	0,57	0,00
7	0,04	—0,05	0,92	0,08
8	0,94	0,30	0,16	—0,03
9	0,01	0,12	0,87	0,04
10	—0,07	—0,11	0,08	—0,94
11	—0,12	—0,02	0,02	0,99
12	—0,13	—0,02	0,02	0,98
13	—0,09	—0,02	0,03	1,00
14	—0,03	—0,01	—0,03	—1,00
15	0,49	0,86	—0,10	—0,02
16	0,52	0,75	0,13	0,29
17	0,73	0,15	0,12	—0,46
18	0,37	0,35	0,55	—0,10
19	0,27	0,07	0,88	—0,02
20	0,77	0,55	—0,03	—0,01
21	0,64	0,24	0,64	—0,04
22	0,04	—0,24	0,91	—0,03
23	—0,04	—0,01	0,03	1,00
24	—0,84	—0,35	—0,11	0,08
25	0,94	0,28	0,15	—0,04
26	0,93	0,31	0,16	—0,03
27	0,17	0,87	—0,16	—0,06
28	0,13	0,08	0,83	0,12
29	—0,64	—0,27	—0,06	0,62
30	—0,84	—0,34	—0,11	0,07
31	0,85	0,27	0,19	—0,02
32	0,49	0,85	—0,11	—0,02

Подсчет числа нулевых нагрузок					
Фактор	V_{01}	V_{02}	V_{03}	V_{04}	Всего
Число	9	8	11	22	50
Процент*	28	35	34	68	39

$$S_1$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & —0,30 & —0,10 & — \\ —0,50 & 1,00 & — & — \\ —0,05 & — & 1,00 & — \\ — & — & — & 1,00 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1$$

$$\begin{pmatrix} 0,8935 & —0,2874 & —0,0995 & — \\ —0,4468 & 0,9578 & — & — \\ —0,0447 & — & 0,9950 & — \\ — & — & — & 1,0000 \end{pmatrix}$$

$$C_{r1}$$

$$\begin{pmatrix} 1,000 & — & — & — \\ —0,685 & 1,000 & — & — \\ —0,133 & 0,029 & 1,000 & — \\ — & — & — & 1,000 \end{pmatrix}$$

* Количество нулевых нагрузок каждого фактора указано в % от общего числа переменных, например для V_{01} имеем: $\frac{9}{32}\cdot 100\%=28\%$. В итоговом столбце подсчет производится таким образом: $\frac{50}{4\cdot 32}\cdot 100\%=39\%$.

была применена процедура вращения, основанная на варимакс-критерии. Нас здесь интересует только последующая процедура вращения, выполненная с помощью Rotoplot-программы (см. гл. 5.3) при поиске косоугольной простой структуры.

В табл. 5.12 приведена ортогональная исходная факторная матрица $\mathbf{V}_0$, результат варимакс-вращения. Значения элементов факторной матрицы округлены до второго десятичного знака. Подсчет числа нулевых нагрузок по матрице $\mathbf{V}_0$ производится обычным образом. В результате получаем, что фактор V_{04} определяется двадцатью двумя переменными, фактор V_{03} — одиннадцатью переменными, а факторы V_{01} и V_{02} соответственно девятью и восемью переменными.

По критерию Баргмана, при данном числе переменных для принятия решения о значимости простой структуры необходимо, чтобы факторы определялись не менее чем двенадцатью переменными. Четвертый фактор уже удовлетворяет этому критерию. На диаграммах рис. 5.31 представлена факторная структура в соответствующих плоскостях и на

Таблица 5.13

Факторная матрица $\mathbf{V}_1$ и второй цикл вращения

	$\mathbf{V}_1$			
	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}
1	0,16	0,56	—0,04	—0,05
2	0,12	0,64	—0,14	—0,02
3	—0,06	—0,67	0,16	0,02
4	0,05	—0,16	0,79	—0,02
5	0,12	—0,25	0,90	—0,01
6	—0,35	—0,28	0,63	0,00
7	0,02	—0,06	0,91	0,08
8	0,70	0,02	0,07	—0,03
9	—0,08	0,11	0,86	0,04
10	—0,02	—0,08	0,09	—0,94
11	—0,10	0,02	0,03	0,99
12	—0,11	0,02	0,03	0,98
13	—0,07	0,01	0,04	1,00
14	—0,02	—0,00	—0,03	—1,00
15	0,06	0,69	—0,15	—0,02
16	0,12	0,57	0,08	0,29
17	0,58	—0,07	0,05	—0,46
18	0,15	0,23	0,51	—0,10
19	0,17	—0,01	0,85	—0,02
20	0,44	0,31	—0,11	—0,01
21	0,44	0,05	0,57	—0,04
22	0,10	—0,24	0,90	—0,03
23	—0,03	0,00	0,03	1,00
24	—0,59	—0,09	—0,03	0,08
25	0,71	—0,00	0,06	—0,04
26	0,69	0,03	0,07	—0,03
27	—0,23	0,78	—0,18	—0,06
28	0,04	0,04	0,81	0,12
29	—0,45	—0,07	0,00	0,62
30	—0,59	—0,08	—0,03	0,07
31	0,63	0,01	0,10	—0,02
32	0,06	0,67	—0,16	—0,02

Подсчет числа нулевых нагрузок

Фактор	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	Всего
Число	12	18	15	22	67
Процент	37	56	46	68	52

$$\mathbf{S}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,03 & -0,06 & 0,10 \\ -0,05 & 1,00 & 0,20 & 0,05 \\ - & - & 1,00 & - \\ 0,08 & - & - & 1,00 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0,8747 & -0,3077 & -0,2019 & 0,0748 \\ -0,4766 & 0,9515 & 0,2094 & 0,0032 \\ -0,0431 & 0,0013 & 0,9568 & -0,0045 \\ 0,0771 & - & - & 0,9972 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{r2}$$

$$\begin{pmatrix} 1,000 & - & - & - \\ -0,723 & 1,000 & - & - \\ -0,318 & 0,263 & 1,000 & - \\ 0,141 & -0,020 & -0,019 & 1,000 \end{pmatrix}$$

них демонстрируется первый цикл вращения с указанием тангенса угла поворота соответствующих осей. Затем в табл. 5.12 составляется матрица поворота $\mathbf{S}_1$ и по формулам 5.13—5.16 вычисляется $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{C}_{r_1}$.

Табл. 5.13 и рис. 5.32 отражают второй цикл вращения, а табл. 5.14 и рис. 5.33 — третий цикл. В табл. 5.15 приведена финальная факторная матрица $\mathbf{V}_3$, соответствующая окончательному решению. Все факторы в этой матрице удовлетворяют критерию Баргмана. Число переменных, приходящихся на фактор и удовлетворяющих условию $|v_{il}/h_i| < 0{,}10$, с каждым циклом увеличивается и достигает, наконец, такого уровня (табл. 5.15), который не может быть превзойден путем дальнейшего вращения. В табл. 5.15 номера переменных приведены как с левой, так и с правой стороны матрицы $\mathbf{V}_3$. Процедура вращения была выполнена независимо от решения, полученного авторами этой задачи. Поэтому имеются расхождения в обозначениях переменных. Номера, указанные справа в табл. 5.15, соответствуют обозначениям переменных в оригинальной работе Каттелла и Дикмана,

Таблица 5.14

Факторная матрица $\mathbf{V}_2$ и третий цикл вращения

	$\mathbf{V}_2$			
	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
1	0,12	0,54	0,06	−0,01
2	0,09	0,62	−0,02	0,02
3	−0,03	−0,66	0,03	−0,02
4	0,05	−0,15	0,72	−0,02
5	0,13	−0,25	0,81	−0,01
6	−0,33	−0,26	0,57	−0,05
7	0,03	−0,06	0,86	0,08
8	0,67	−0,00	0,03	0,04
9	−0,08	0,11	0,86	0,04
10	−0,08	−0,08	0,07	−0,94
11	−0,02	0,02	0,04	0,98
12	−0,03	0,02	0,04	0,97
13	0,01	−0,01	0,04	0,99
14	−0,10	0,00	−0,02	−1,00
15	0,02	0,67	−0,01	0,02
16	0,11	0,55	0,18	0,33
17	0,53	−0,08	−0,00	−0,40
18	0,13	0,22	0,52	−0,07
19	0,16	−0,02	0,80	−0,00
20	0,41	0,29	−0,07	0,05
21	0,42	0,03	0,53	0,01
22	0,11	−0,24	0,81	−0,03
23	0,05	0,00	0,03	0,99
24	−0,56	−0,07	−0,01	0,02
25	0,68	−0,02	0,01	0,03
26	0,66	0,01	0,03	0,04
27	−0,26	0,78	−0,01	−0,04
28	0,05	0,04	0,78	0,13
29	−0,38	−0,06	0,02	0,57
30	−0,56	−0,07	−0,01	0,01
31	0,61	−0,00	0,07	0,04
32	0,03	0,66	−0,03	0,02

Подсчет числа нулевых нагрузок

Фактор	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	Всего
Число	14	18	21	22	75
Процент	43	56	65	68	58

$$\mathbf{S}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}00 & — & — & — \\ -0{,}05 & 1{,}00 & — & — \\ -0{,}10 & — & 1{,}00 & — \\ -0{,}06 & — & — & 1{,}00 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_3$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8494 & -0{,}3077 & -0{,}2019 & 0{,}0828 \\ -0{,}5113 & 0{,}9515 & 0{,}2094 & -0{,}0052 \\ -0{,}1299 & 0{,}0013 & 0{,}9568 & -0{,}0427 \\ 0{,}0162 & — & — & 0{,}9956 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{r3}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}000 & — & — & — \\ -0{,}748 & 1{,}000 & — & — \\ -0{,}403 & 0{,}263 & 1{,}000 & — \\ 0{,}095 & -0{,}030 & -0{,}059 & 1{,}000 \end{pmatrix}$$

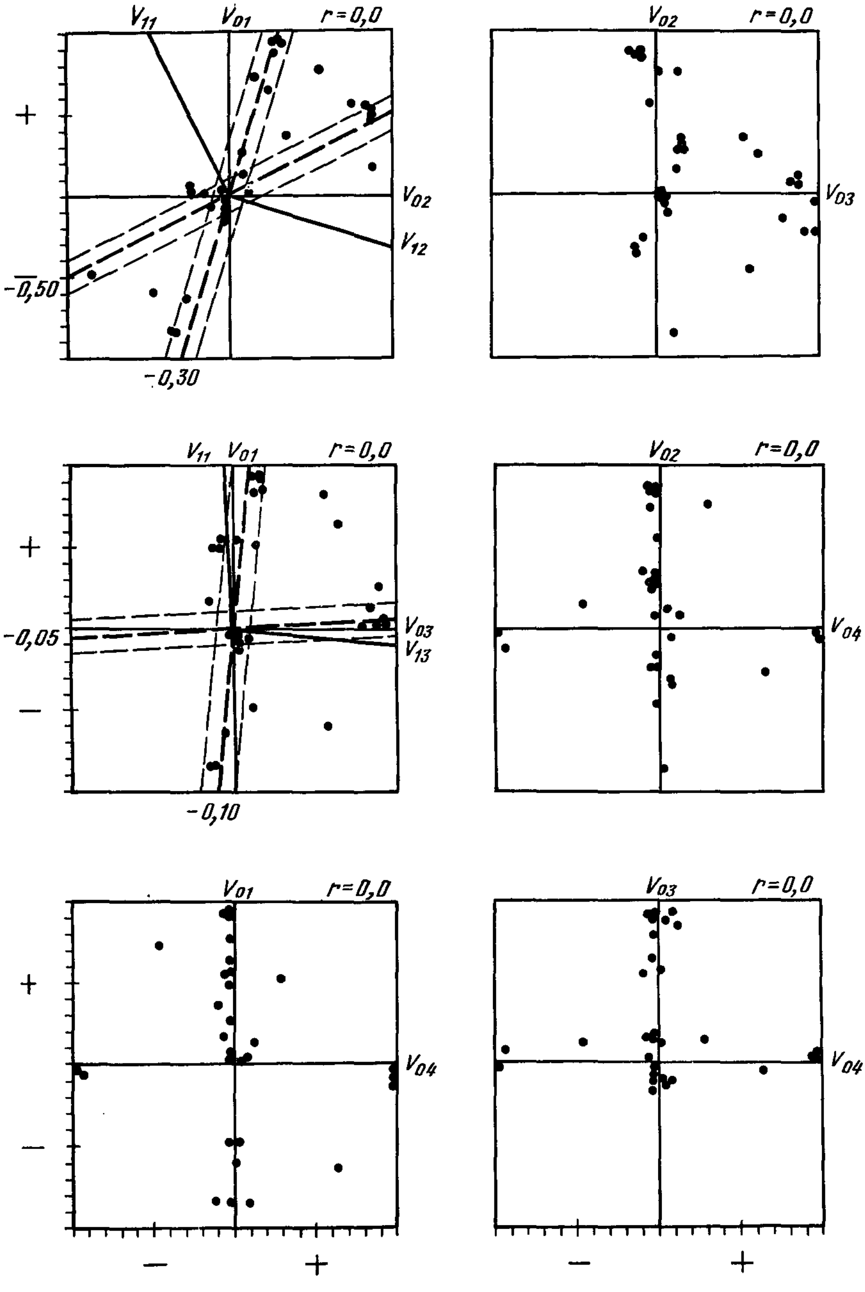


Рис. 5.31. Диаграммы к первому циклу вращения по данным табл. 5.12. Указаны повернутые оси и соответствующие им положения гиперплоскостей координат. Значения тангенсов углов поворота осей, указанные на диаграмме, записываются в матрицу поворота S. В остальном обозначения на диаграммах соответствуют рис. 5.13—5.28

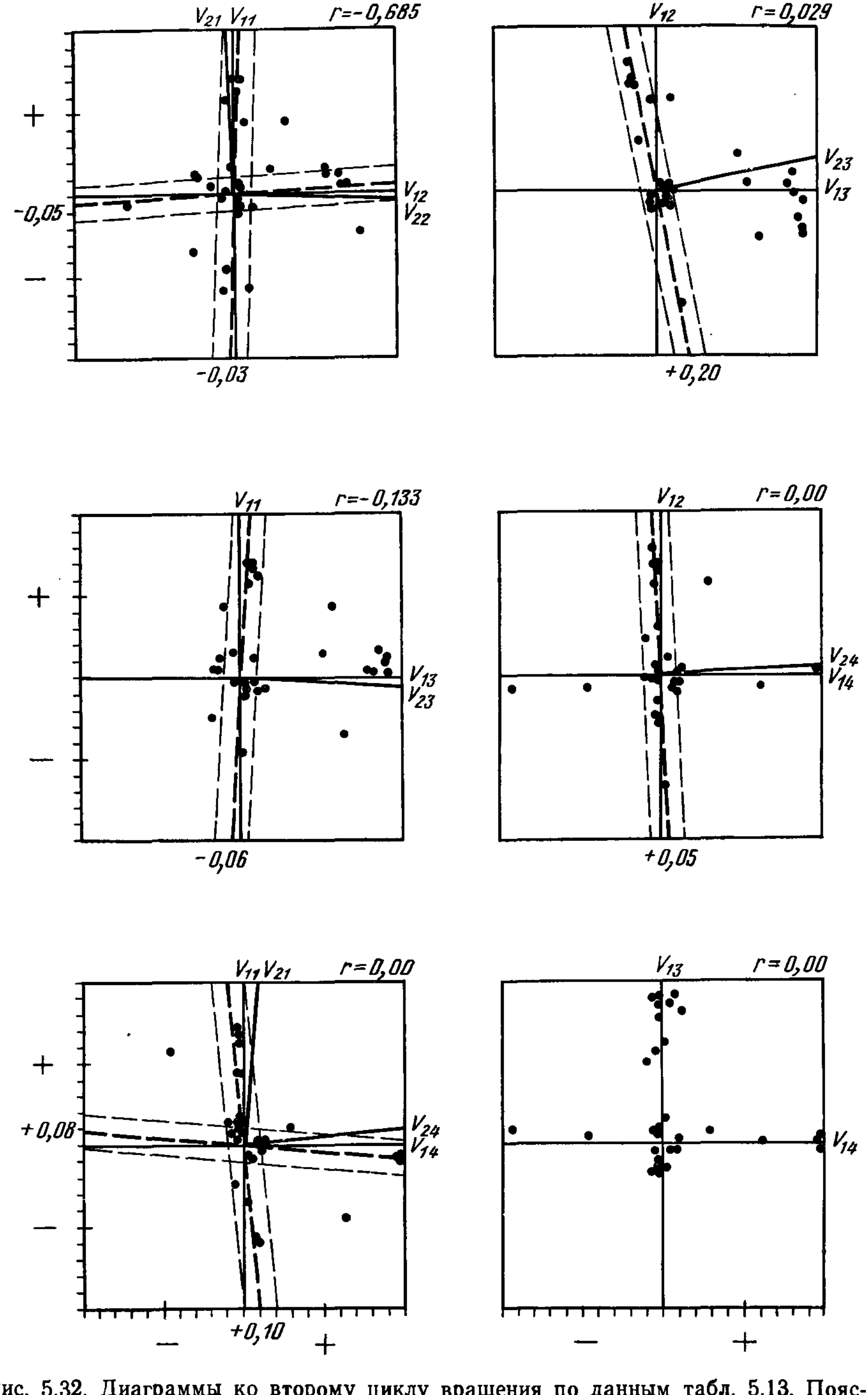


Рис. 5.32. Диаграммы ко второму циклу вращения по данным табл. 5.13. Пояснения те же, что и к рис. 5.31

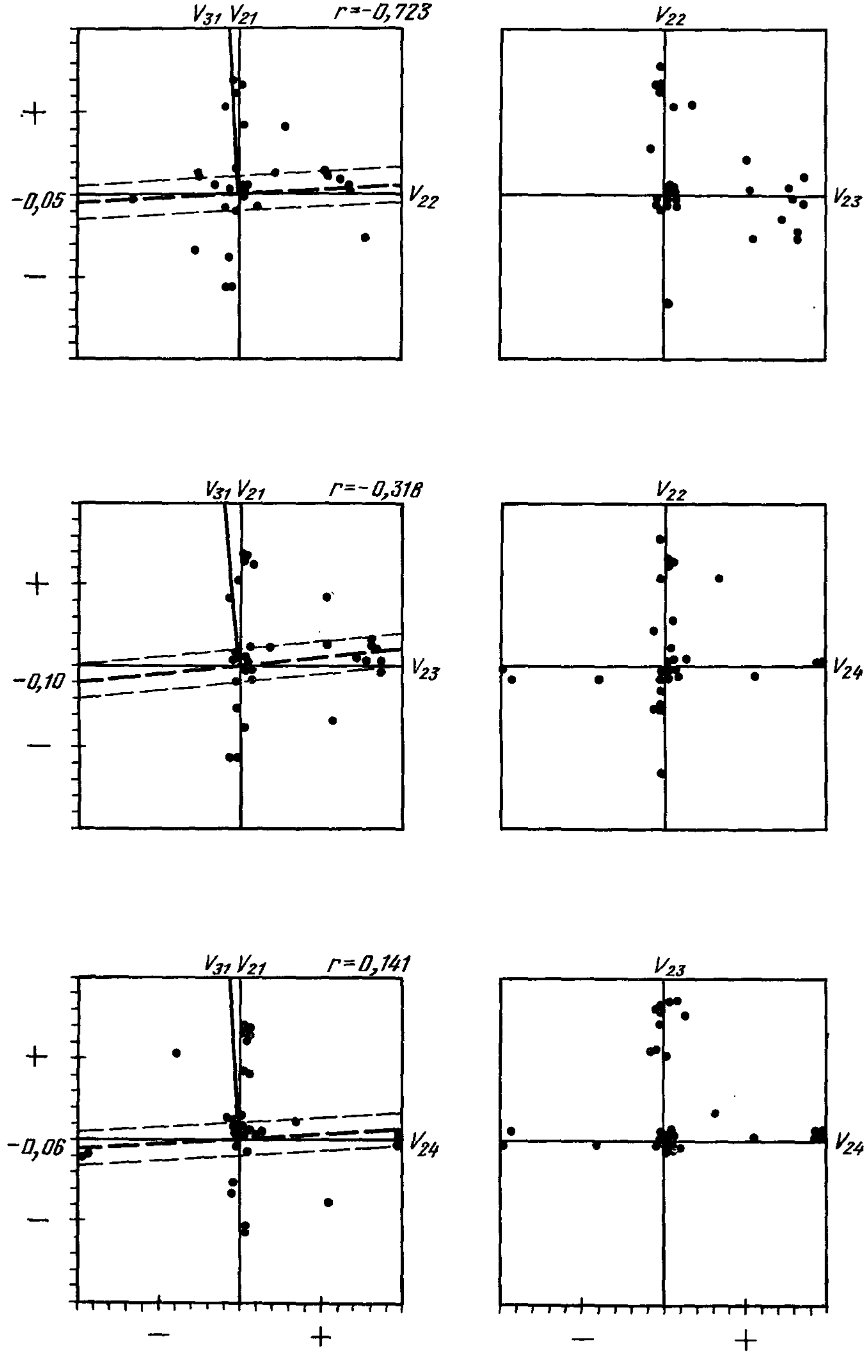


Рис. 5.33. Диаграммы к третьему циклу вращения по даным табл. 5.14. Пояснения те же, что и к рис. 5.31

Таблица 5.15

Финальное решение, факторная матрица V_3

	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	
1	0,08	0,54	0,06	—0,01	12
2	0,05	0,62	—0,02	0,03	13
3	0,00	—0,66	0,03	—0,02	14
4	—0,01	—0,15	0,72	—0,05	15
5	0,06	—0,25	0,81	—0,04	16
6	—0,34	—0,26	0,57	—0,07	17
7	—0,06	—0,06	0,86	0,04	18
8	0,62	—0,00	0,03	0,04	1
9	—0,17	0,11	0,86	0,00	19
10	—0,03	—0,08	0,07	—0,95	24
11	—0,08	0,02	0,04	0,98	20
12	—0,09	0,02	0,04	0,96	21
13	—0,05	0,01	0,04	0,99	22
14	—0,03	—0,00	—0,03	—1,00	23
15	—0,01	0,67	—0,01	0,02	2
16	0,05	0,55	0,18	0,32	32
17	0,52	—0,08	—0,00	—0,40	31
18	0,06	0,22	0,52	—0,09	25
19	0,08	—0,02	0,80	—0,03	26
20	0,38	0,29	—0,07	0,05	27
21	0,34	0,03	0,53	—0,02	28
22	0,04	—0,24	0,81	—0,06	3
23	—0,02	0,00	0,03	0,99	4
24	—0,52	—0,07	—0,01	0,02	5
25	0,64	—0,02	0,01	0,03	6
26	0,61	0,01	0,03	0,04	7
27	—0,28	0,78	—0,01	—0,04	11
28	—0,04	0,04	0,78	0,09	29
29	—0,39	—0,06	0,02	0,57	30
30	—0,52	—0,07	—0,01	0,01	8
31	0,56	—0,00	0,07	0,04	9
32	—0,00	0,66	—0,03	0,02	10

Подсчет числа нулевых нагрузок

Фактор	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	Всего
Число	19	18	21	23	81
Процент	59	56	65	71	63

Примечание. Числа с правой стороны таблицы соответствуют номерам переменных в работе Каттелла и Дикмана. По критерию Баргмана при четырех факторах и тридцати переменных на 1%-ном уровне значимости следует ожидать не менее двенадцати переменных, для которых выполняется условие $|v_{il}/h_i| < 0{,}10$. Следовательно, для данного факторного решения все четыре фактора являются значимыми в смысле соответствия принципу простой структуры.

а также табл. 7.2. Задачу о мячах удобно использовать в учебных целях для демонстрации процедуры вращения. Задача о ящиках меньше отражает ситуацию, возникающую на практике, а именно в подборе переменных, в определении числа факторов, а также в наличии ошибок измерения.

5.7. ДРУГИЕ МЕТОДЫ ВРАЩЕНИЯ И КРИТЕРИИ

О различных методах вращения при поиске простой структуры имеется обширная литература. Мы останавливались особенно подробно на графическом методе, как наиболее наглядном и часто дающим наилучшие результаты в смысле достижения простой структуры. Этого метода долгое время придерживались последователи Тэрстоуна и Каттелла. Однако имеется еще целый ряд методов, с которыми должен быть хотя бы вкратце ознакомлен читатель. Ни один из них не может быть рекомендован в качестве универсального средства, хотя в некоторых частных случаях они дают хорошую аппроксимацию простой структуры и отличаются быстрой сходимостью.

В частности, Тэрстоун [286; *6*] среди других методов указал также на метод обобщенных осей (*method of extended vectors*), который может быть применен только тогда, когда найдена такая вторичная ось, что все переменные дают на нее положительные проекции. Это очень сильное ограничение, но мы все-таки рекомендуем познакомиться с этим методом, а также с рядом других в [286; *6*], в том числе с методом последовательных вращений, известным под названием метода минимизации суммы, или *double-group*-метода. Этим методом рекомендуется пользоваться тогда, когда большинство соответствующих переменных лежит на одной прямой, не проходящей через начало координат. Очевидно, что во всех этих методах не обойтись без геометрических представлений. Метод вращения, с которым мы познакомились в 5.1, также пригоден для аппроксимации ортогональной простой структуры. Но при большом числе переменных он требует большого объема вычислений, а для этой процедуры до сих пор не написана соответствующая машинная программа. Циммерманом был указан соответствующий графический прием, который позволяет избавиться от вычисления промежуточных координат точек на различных этапах вращения. За счет этого сокращается время на поиск решения с простой структурой.

Наибольшее распространение получили другие методы вращения, о которых речь пойдет ниже. Каттелл [35; *4*] считал, что при вращении должны преследоваться три цели:

1. Вращение нужно для того, чтобы в еще неизвестной области между данными была обнаружена новая структура. Поиск этой структуры должен осуществляться внутри самих исходных данных. В качестве отправной точки можно воспользоваться принципом простой структуры. Дальнейшая модификация метода в соответствии с изложенным принципом привела к новой технике факторного анализа, заключающейся в выявлении пропорциональности нагрузок факторов с помощью параллельных форм тестов (*parallel proportional profiles*). Хотя методика соответствующих расчетов еще далека от совершенства, этот принцип нахождения структуры перспективен.

2. Вращение нужно, чтобы факторы оставались возможно более тесно связанными с различиями между группами индивидуумов. Этот принцип, известный под названием «критерия вращения» (*criterion*

rotation), предложен Айзенком [86; *2*]. При осуществлении вращения этим методом придерживаются внешнего критерия.

3. Вращение нужно производить для того, чтобы можно было проверить различные гипотезы. Например: насколько соответствует данное факторное отображение заранее выдвинутой гипотезе? Осуществить проверку такой гипотезы без вращения, очевидно, нельзя. Не все решения факторной проблемы инвариантны относительно добавления новых переменных. Факторное отображение также претерпевает изменение от выборки к выборке, чего нельзя сказать относительно решений, полученных в результате вращения. Во всяком случае, эмпирическим путем была доказана их стабильность в определенных границах. Для проверки гипотез необходимо производить вращение системы факторов, руководствуясь принципом простой структуры или метода наименьших квадратов, а затем определять, насколько точно полученный результат и гипотеза согласуются между собой. Наиболее известна методика соответствующих расчетов, предложенная Харли и Каттеллом и названная ими прокрустовой (*Prokrustes-programm*).

Метод «выявления пропорциональности нагрузок факторов с помощью параллельных тестов», предложенный Каттеллом [35; *1*], можно считать модификацией принципа простой структуры. Он исходил из того, что более простое решение должно получаться не только относительио определенного эксперимента или корреляционной матрицы. Если в изучаемом явлении гарантируется действие одних и тех же факторов, то все матрицы выборочных коэффициентов корреляций, полученные на основе различных экспериментов, должны в результате процедуры вращения давать одну и ту же простую структуру. Если фактор органически присущ данному явлению и может быть использован для содержательной интерпретации механизма изучаемого явления, то факторные нагрузки в финальных матрицах должны оставаться в значительной степени неизменными и не зависеть от колебаний, присущих выборочным наблюдениям. Правда, степень влияния фактора в двух различных корреляционных матрицах может быть выражена поразному, поэтому и нагрузки на переменные должны изменяться в той же пропорции. Итак, если имеем две выборки, про которые известно, что в одной из них фактор оказывает более сильное воздействие, чем в другой, то должно быть найдено такое положение осей координат для этих матриц, которое бы выявило пропорциональность нагрузок обоих факторов, что было бы доказательством действительного существования этого фактора. Однозначное определение положения системы координат дало бы возможность также наиболее достоверно оценить значения фактора. К сожалению, метод еще не настолько разработан, чтобы его можно было применять на практике. Для ортогонального случая можно было бы показать технику вычисления на какомлибо примере, но больший интерес представляет все-таки косоугольное решение, а для него эта техника не разработана. Основная идея метода заслуживает интереса.

Айзеик [86; *2*], вводя критерий вращения (*criterion rotation*), выступил с критикой факторного анализа, и прежде всего концепции простой структуры. Мы не согласны с этой критикой, но предложенный им критерий заслуживает внимания, поскольку его можно рассматривать как принцип простой структуры, но в другом аспекте. Айзенк исходит из того, что имеется некоторый внешний критерий, которым вовсе не обязательно руководствоваться во время вращения при поиске простой структуры. Он предполагает, что по набору тестов применительно к одной выборке нормальных индивидуумов выявляется определенный фактор. Кроме того, он имеет выборку из лиц, у которых этот, вначале только постулируемый, фактор выявляется наиболее ярко; например, для невротиков характерен такой генеральный фактор, как невроз. Далее он определяет по набору тестов бисериальную корреляцию между невротиками и нормальными индивидуумами. Эту корреляцию он использует далее в качестве исходного пункта при вращении. Первый фактор, соответствующий группе нормальных индивидуумов, вращается таким образом, чтобы он как можно точнее (в смысле метода наименьших квадратов) согласовывался с упомянутой корреляцией, принятой в качестве критерия. Эта процедура приводит к подтверждению ранее выдвинутой гипотезы о том, связаны ли данные переменные с определенным фактором и может ли быть он использован в разделении исследуемых индивидуумов на две альтернативные группы. Различие между заранее известными группами индивидуумов служит исходным пунктом для выявления фактора и определения его положения в пространстве общих факторов. Конечно, нельзя точно указать уровень значимости принятия такой гипотезы. Но вполне очевидно, что между фактором, полученным по случайным числам, и вектором-критерием не будет проявляться корреляция; во всяком случае, если и проявится связь между ними, то только совершенно случайно. С другой стороны, процедура, предложенная Айзенком, приводит к максимально возможной корреляции между вектором-критерием и фактором, величина которой, правда, ограничена имеющимися данными и значимость нельзя оценить сразу. При использовании этого метода каждый раз речь идет о проверке гипотез, а не об их генерировании. Айзенк имел обширный экспериментальный материал, из которого он только часть подвергал непосредственно факторному анализу, а остальное употреблял в качестве внешнего критерия. Было бы интересно сравнить результаты факторного анализа по всему экспериментальному материалу, имеющемуся у него, с результатами, полученными по его методу. Описанный анализ с внешним критерием не должен противопоставляться факторному анализу, основанному на принципе простой структуры. Здесь применяется совсем другой критерий, который более прост и нагляден. Но прежде чем вынести ему окончательный приговор и установить границы его применения, анализ с внешним критерием должен быть опробован с различными экспериментальными данными.

Перейдем теперь к методу вращения, предложенного Харли и Кателлом и независимо от них и даже немного раньше Амаваарой. Как раз из-за предельной ситуации, которая характеризует следующую процедуру, этот метод и представляет интерес. Исходят из того, что стараются как можно точнее сформулировать гипотезу об ожидаемой факторной структуре $\mathbf{V}_{rs}$, руководствуясь результатами ранее проведенных исследований или какой-либо информацией о численных значениях элементов данной матрицы. Исходная факторная матрица $\mathbf{V}_0$ вращается до тех пор, пока не появится новая матрица $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$, которая в смысле метода наименьших квадратов как можно меньше будет отличаться от $\mathbf{V}_{rs}$, соответствующей нашей нулевой гипотезе.

$$\mathbf{V}_0\mathbf{\Lambda}_x = \mathbf{V}_{rs}^{\cdot}, \tag{5.36}$$

где $\mathbf{\Lambda}_x$ является матрицей преобразования, переводящей $\mathbf{V}_0$ в $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ так, чтобы $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ наилучшим образом аппроксимировала $\mathbf{V}_{rs}$. Умножим обе части равенства (5.36) на $(\mathbf{V}_0'\mathbf{V}_0)^{-1}$:

$$\mathbf{\Lambda}_x = (\mathbf{V}_0'\mathbf{V}_0)^{-1}\mathbf{V}_0'\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}. \tag{5.37}$$

Подставив вместо $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ матрицу $\mathbf{V}_{rs}$, соответствующую нашей гипотезе, получим матрицу преобразования, столбцы которой ие нормализованы. После ее нормализации подставляем в (5.36) и получаем искомую матрицу, которая является наилучшим приближением к $\mathbf{V}_{rs}$ в смысле метода наименьших квадратов. Точно не известно, каким условиям должны удовлетворять матрицы $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ и $\mathbf{V}_{rs}$. Вся процедура основана на принципе наибольшего приближения к гипотетически установленной структуре, согласующейся с наблюдаемыми данными (см. по этому вопросу также Фишера и Ропперта [242]). Естественно, степеиь приближения зависит и от выдвинутой гипотезы, и от имеющихся данных. Для каждого исходного материала, отражающего природу изучаемого явления, и для каждой гипотезы, выраженной в виде матрицы $\mathbf{V}_{rs}$, имеется оптимальное положение системы координат, в которой $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ переходит в $\mathbf{V}_{rs}$. Как раз это положение и должно быть определено с помощью некоторой процедуры. Но другая гипотеза $\mathbf{V}_{rs}^{+}$ может быть так же хорошо или даже еще лучше аппроксимирована теми же данными. Метод заставляет данные занять заранее определенное положение, и потому эта процедура получила такое характерное название — *прокрустова* процедура. Попытка проверить качество приближения к матрице $\mathbf{V}_{rs}$ таит в себе некоторые опасности. В принципе такая процедура аналогична проверке значимости главных компонеит. В то время как для проверки значимости главных компонент разработана уже признанная всеми методика (см. 3.3.3), выполнить проверку гипотезы о степени приближения к матрице $\mathbf{V}_{rs}$ удается не во всех случаях. Кеттелл рекомендует для проверки этой гипотезы процедуру, названиую им проверкой сходства резко выделяющихся переменных (*salient variable similarity index*). Другая процедура описана у Каттелла и Баггалея [36], а также у Харли и Каттелла [149]. При получении отрицательного результата в этих тестах относительно матриц $\mathbf{V}_{rs}$ и $\mathbf{V}_{rs}^{\cdot}$ принимаем нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что ожидаемая структура не может быть приведена в соответствие с исходными даниыми. Положительный результат теста позволяет нам сделать вывод, что исследуемый материал с определенной вероятностью может быть представлен в форме, соответствующей выдвинутой гипотезе. При этом рекомендуется производить вращение исходной факторной матрицы, не пользуясь информацией, содержащейся в выдвинутой заранее гипотезе. Достигнув в результате вращения простой структуры, следует оценить полученный результат, сравнивая с гипотетической структурой.

Описанная выше процедура заслуживает своего названия — прокрустова. Если известны матрицы $\mathbf{V}_{rs}$ и $\mathbf{V}_0$, то с помощью этой процедуры можно найти матрицу преобразования $\mathbf{\Lambda}$. Приведенный метод можно использовать для обобщеиия опыта, стремясь согласовать между собой результаты различных экспериментов. Следует предостеречь читателя от опрометчивых и слишком поспешных выводов, которые могут сложиться в результате этой процедуры.

Данный обзор методов и критериев должен помочь читателю глубже понять стандартные процедуры вращения. В рамках этого параграфа мы не можем полностью воспроизвести всю дискуссию, развернувшуюся вокруг проблемы вращения. Эта дискуссия со всеми доводами за и против объективности процедуры вращеиия нашла отражение во многих журнальных статьях. Мы ограничились упоминанием только одиого критика простой структуры — Айзенка, предложившего в качестве альтернативы внешний критерий.

Дальнейшее развитие концепции простой структуры в методе выявления пропорциональности нагрузок факторов с помощью параллельных тестов свидетельствует о том, что первоначальная формулировка принципа и вытекающие из нее процедуры не удовлетворяют даже сторонников этого принципа и служат основанием для дальнейших его модификаций. Так называемая прокрустова программа показывает, что данные можно в смысле метода наименьших квадратов привести в соответствие с любым заранее заданным решением. Эти три подхода являются лишь небольшой частью многочисленных проблем, возникающих вокруг процедуры вращения. Более подробное обсуждение может завести нас слишком далеко и вынудит заниматься вопросами, которые не нашли еще должного решения. Вместо этого мы перейдем к другой главе и займемся косоугольным вращением. Речь пойдет о факторах второго и более высокого порядков, которые начинают играть все большую роль не только в теории, но и в практических исследованиях.

5.8. ФАКТОРЫ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКОВ

Обычно в результате вращеиия при поиске простой структуры получаем факторную матрицу с коррелированными факторами. Матрицу корреляций между факторами можно в свою очередь использовать в качестве исходного момента для продолжения анализа обычными методами, ио применительно уже к этой матрице, рассматривая факторы как переменные. Факторы, являющиеся результатом первого анализа на базе первичного исходного материала по матрице коэффициентов корреляции между наблюдаемыми переменными, называют факторами первого порядка. До сих пор мы имели дело именно с ними. Факторы второго порядка являются результатом анализа связки корреляций между факторами первого порядка. Эту процедуру можно продолжить, выделяя из факторов второго порядка факторы третьего порядка и т. д. Разумеется, выделение факторов более высокого порядка возможно тогда, когда факторы предыдущего порядка имеют однозначную явно выраженную простую структуру, так как только в этом случае получают до некоторой степени надежную оценку $\mathbf{C}_f$. Так как число факторов значительно меньше числа переменных, размер матрицы корреляций между факторами большей частью очень незначителен. Считая в среднем, что на фактор должно приходиться 4—5 переменных, для определения двух факторов второго порядка требуется около десяти факторов первого порядка, которые в свою очередь должны быть выделены в результате анализа 40—50 переменных. Аналогично рассуждая, можно подсчитать, что для получения факторов третьего порядка нужно иметь не менее 100—200 переменных. Этот подсчет показывает нам, что с увеличением порядка выделяемых факторов растут и расходы на проведение экспериментов. Но при этом происходит уточнение структуры причинных связей, действующих за кулисами явлений.

Идея применения факторов второго и более высоких порядков принадлежит Тэрстоуну [286; *1*, *6*]. Ее можно сформулировать в матричных терминах следующим образом:

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{V}_{fp1}\mathbf{C}_{f1}\mathbf{V}'_{fp1}, \tag{5.38}$$

$$\mathbf{C}_{f1} = \mathbf{V}_{fp2} \cdot \mathbf{C}_{f2} \cdot \mathbf{V}'_{fp2}. \tag{5.39}$$

По редуцированной матрице коэффициентов корреляции между наблюдаемыми переменными выделяют факторы и подвергают их вращению с целью нахождения простой структуры. В результате получают факторное отображение $\mathbf{V}_{fp1}$ и матрицу корреляций между факторами первого порядка $\mathbf{C}_{f1}$. К найденной матрице корреляций косоугольных факторов применяют опять обычные классические методы оценки общностей, выделения факторов и их вращения до получения отображения $\mathbf{V}_{fp2}$ факторов второго порядка. Матрица корреляций между факторами второго порядка $\mathbf{C}_{f2}$, если число ее столбцов достаточно велико и ее структура однозначна, может быть подвергнута опять факторному анализу, результатом которого будут являться факторы третьего порядка. Автору данной книги не известны исследования, где бы производились выделения факторов еще более высокого порядка. Непосредственно ясно, что введение факторов второго и более высоких порядков усложняет модель, однозначность которой при этом в общем случае снижается. Факторы второго порядка должны проявлять четкую и значимую простую структуру на уровне факторов первого порядка. Так как редуцированная матрица $\mathbf{R}_h$ имела ранг r, введение других величин помимо r факторов первого порядка означает, что факторы более высокого порядка не могут быть независимыми от факторов первого порядка. Они должны рассматриваться в качестве функций факторов первого порядка. В сущности говоря, при введении факторов второго порядка возникает вопрос: как увязать между собой структуру факторов и конфигурацию векторов, соответствующих наблюдаемым переменным? Обычно при умеренном числе переменных удовлетворяются факторами первого порядка. Однако, располагая большим числом переменных и имея в наличии значительные корреляции между факторами первого порядка, мы можем попытаться выделить факторы второго порядка с целью более глубокого проникновения в причины изменений, существующих на поверхности явлений. Конечно, все эти рассуждения с определенной точки зрения не так уж убедительны и даже несколько «притянуты за уши». Уже факторы первого порядка являются некоторыми гипотетическими конструкциями, абстрагированными от реальной действительности, от исходных данных. Факторы второго порядка удалены от экспериментального материала еще на одну ступень. С другой стороны, достигается возможность взаимоувязать результаты многих экспериментов и выявить структуру в про-

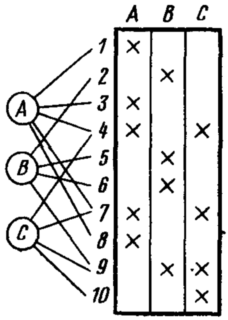


Рис. 5.34. Схема факторного отображения при наличии факторов первого порядка. Крестиком обозначены высокие факторные нагрузки

странстве большой размерности, что при некоторых обстоятельствах представляет особый интерес в смысле генерирования новых гипотез.

Воспользуемся геометрической интерпретацией ортогональной простой структуры для десяти переменных и трех факторов, наглядно поясняющей все рассуждения. На рис. 5.34 переменные 1, 3, 4, 7 и 8 связаны с фактором A и определяют его, переменные 2, 5 ,6 и 9 связаны с фактором B, а переменные 4, 7, 9 и 10 — с фактором C. Эта связь представлена в факторном отображении в виде крестиков в правой части рисунка, а также в виде прямых, соединяющих обозначения факторов A, B, C с номерами переменных в левой части рисунка. Оба способа изображения соответствуют друг другу и имеют один и тот же смысл. Пусть для данного случая ранг корреляционной матрицы равен трем, три выделенных фактора ортогональны и определяют существенную долю общей дисперсии десяти переменных. Факторы A, B и C являются обычными факторами первого порядка.

Ситуация на рис. 5.35 сложнее. Как и на рис. 5.34, мы воспользовались двумя способами изображения. Левая часть рис. 5.35 в другой графической форме представляет те же результаты факторного анализа, что средняя и правая части. Пусть в результате факторного анализа пятнадцати переменных было получено факторное отображение первого порядка с факторами A, B, C, D, E. Путем вращения при поиске простой структуры пришли к косоугольной системе факторов. Факторы теперь линейно взаимосвязаны. Коэффициенты корреляции между факторамн, записанные в матрицу, отражают структуру, присущую данным факторам. Мы пришли к однозначной косоугольной простой структуре. Величина потери факторами независимости в результате вращения находит отражение в корреляционной матрице C_{f1}. Подвергая дальнейшему факторному анализу эту матрицу, выделяем из нее два фактора: K и L. Итак, в этом примере имеем дело с более сложной структурой исходных данных, чем это было изображено на рис. 5.35. Несомненно, что возможность сформулировать, вывести и удачно интерпретировать такие дифференцированные гипотезы путем применений хорошо разработанной процедуры, является важным моментом в проведении исследований.

Пока еще четко не разграничено, какой фактор является фактором первого порядка, а какой — второго порядка. Очевидно, это зависит от выбора переменных. Имеется еще целый ряд вопросов, которые также остаются пока неразработанными, например проверка значимости всей структуры, соотношение между факторами второго порядка (*second order factors*) и их значениями (*factor scores*) и вопрос, насколько содержательно интерпретируема полученная таким образом структура. О факторах второго и более высокого порядка имеется относи-

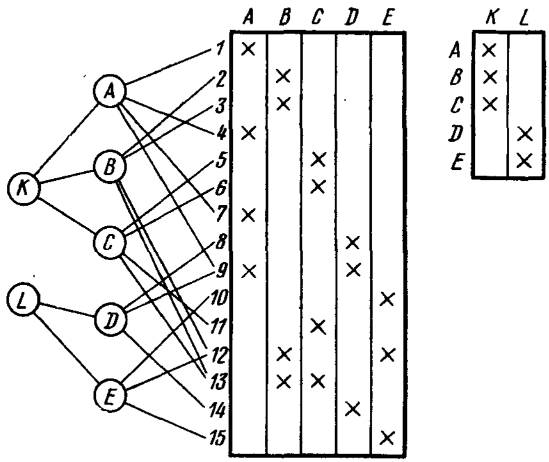


Рис. 5.35. Схема факторного отображения при наличии факторов первого и второго порядков. Крестиками обозначены высокие факторные нагрузки. Числа соответствуют номерам переменных. *A, B, C, D, E* — факторы первого порядка; *K, L* — факторы второго порядка

тельно мало литературы. Лишь школа Тэрстоуна и Каттелла интенсивно работала над этой проблемой. Тэрстоуну принадлежит пример с одной популяцией, в котором он наглядно продемонстрировал характер фактора второго порядка. Найдя удачное истолкование фактора второго порядка в этом примере, он обобщил возможность выполнять такую интерпретацию во всех случаях, назвав этот фактор генерирующим. Нельзя надеяться, что выделение такого фактора будет возможно для любого экспериментального материала. Во всяком случае, это очень заманчиво—использовать факторы второго порядка для генерирования новых гипотез.

Каттелл также уделил много внимания вопросу разделения факторов первого и второго порядков. В своих книгах [35; *8*] и [49] он сообщает о целом ряде факторов второго порядка, которые ему удалось выделить в различных психологических экспериментах. В качестве примера назовем такой фактор, как «страх». В противоположность этому для такой концепции, как невроз, не может быть выделен единый фактор второго порядка, объясняющий все его проявления. Для этого нужно по крайней мере шесть—восемь факторов. Стремление выявить природу факторов второго порядка содействует образованию новых гипотез и четкому определению структуры всей изучаемой популяции. Это говорит в пользу концепции факторов высоких порядков, так как несомненна их практическая ценность. Но имеется немало теоретических возражений и критических замечаний. Для выяснения всех этих вопросов должен быть накоплен опыт исследования различных явлений с привлечением обширного экспериментального материала. Достигнутые в настоящее время успехи в области моделирования на ЭВМ могут облегчить поставленную задачу.

Для случая, когда экспериментальный материал позволяет путем описанных процедур выявить однозначную структуру, скрывающуюся за наблюдаемыми переменными, и выйти на уровень по меньшей мере факторов второго порядка, Шмид и Лейман [257] указали один интересный метод, который заключается в преобразовании косоугольной структуры в иерархическое ортогональное факторное отображение. Такое преобразование возможно, если факторы второго порядка изолированы. Непосредственно с самой процедурой вычисления можно познакомиться у Шмида и Леймана. Мы опишем это преобразование в матричных терминах.

Тукер [291; *2*] показал, что любое косоугольное факторное решение $\mathbf{R}=\mathbf{VCV}'+\mathbf{U}^2$ может быть переведено в ортогональную матрицу, если можно образовать $\mathbf{C}=\mathbf{HH}'$. Тогда матрица $\mathbf{VH}=\mathbf{F}$ ортогональна и равенство $\mathbf{R}=\mathbf{FF}'+\mathbf{U}^2$ выполняется. Предположим, что из корреляционной матрицы выделили факторы первого, второго и третьего порядков. Для простоты обозначим $\mathbf{V}_{fp1}$ через $\mathbf{V}_1$, а $\mathbf{V}_{fp2}$ через $\mathbf{V}_2$ и так далее

$$\mathbf{R}=\mathbf{V}_1\mathbf{C}_1\mathbf{V}_1'+\mathbf{U}_1^2, \tag{5.40}$$

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{V}_2\mathbf{C}_2\mathbf{V}_2'+\mathbf{U}_2^2, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{C}_2=\mathbf{V}_3\mathbf{V}_3'+\mathbf{U}_3^2. \tag{5.42}$$

Пусть факторы третьего порядка будут ортогональны по отношению друг к другу. Это предположение весьма правдоподобно, так как оно связано с уменьшением размерности факторного пространства. Путем добавления некоторых элементов образуем новую матрицу $\mathbf{B}_3=\mathbf{V}_3\,|\,\mathbf{U}_3$, где обе матрицы лишь просто записаны рядом друг с другом. Тогда имеем

$$\mathbf{C}_2=\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3'. \tag{5.43}$$

Исходя из (5.43) и всего вышесказанного получаем ортогональную матрицу

$$\mathbf{V}_2\mathbf{B}_3=\mathbf{F}_2. \tag{5.44}$$

И наконец,

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{F}_2\mathbf{F}_2'+\mathbf{U}_2^2. \tag{5.45}$$

Та же самая процедура повторяется еще раз. Образуем матрицу $\mathbf{B}_2=\mathbf{F}_2\,|\,\mathbf{U}_2$, получаем $\mathbf{C}_1=\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2'$, затем перемножаем $\mathbf{V}_1$ с $\mathbf{B}_2$. Тогда $\mathbf{V}_1\mathbf{B}_2=\mathbf{F}_1$, где $\mathbf{F}_1$ — ортогональная матрица. Все выполненные операции дают возможность записать: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1\mathbf{F}_1' + \mathbf{U}_1^2$. Этот вывод может быть не очень понятен. Но если ввести обозначения размерностей отдельных матриц, то все встанет на свои места.

Иерархический метод основан на последовательной ортогонализации всего факторного отображения, начиная с факторов наивысшего порядка (в данном случае с факторов третьего порядка). Затем подвергаются ортогонализации факторы второго порядка, а потом первого. На рис. 5.36 показано, как выглядит такая иерархическая факторная структура. Слева изображены косоугольные факторы первого,

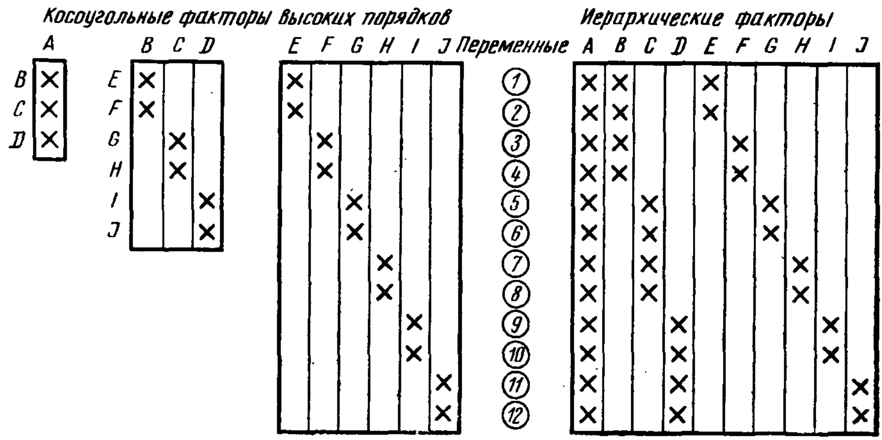


Рис. 5.36. Схема ортогонального иерархического факторного отображения Шмида—Леймана и косоугольного решения с факторами высоких порядков. Крестиками обозначены высокие факторные нагрузки. *A* — фактор третьего порядка; *B, C, D* — факторы второго порядка; *E, F, G, H, I, J* — факторы первого порядка

второго и третьего порядков, справа — ортогональное иерархическое факторное отображение по Шмиду—Лейману.

Шмид и Лейман считают, что ортогонализация всегда возможна, если имеются в распоряжении факторы второго и более высоких порядков, и что ортогональность факторов является важным признаком существования факторов еще более высокого порядка. Если на каждом уровне факторизации получается косоугольное решение с простой структурой, то можно достигнуть такой иерархической структуры, которая значительно облегчит интерпретацию материала и может послужить основой для формулировки некоторой научной гипотезы. Какой способ изображения, представленный на рис. 5.36, выбрать исследователю в каждом конкретном случае, — трудно заранее предсказать. Оба способа соответствуют друг другу, и выбор зависит, очевидно, от индивидуальных особенностей исследователя и содержания эксперимента. К сожалению, еще накоплено мало опыта по применению преобразования Шмида—Леймана на практике.

5.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вращение является увлекательной проблемой. С ней приходится сталкиваться не только в факторном анализе, но и других разделах многомерного статистического анализа. Многие методы многомерной статистики можно рассматривать как вращение системы координат в n-мерном пространстве вплоть до достижения максимума определенной функции. Например, в дискриминантном анализе производится вращение осей координат до такого их положения, когда заранее известные группы индивидуумов окажутся максимально разделенными. В данной книге проблема вращения обсуждалась только в рамках факторного анализа, но неоднократно подчеркивалось основополагающее и принципиальное ее значение.

Концепция простой структуры является центральным понятием факторного анализа. Если бы эта концепция отсутствовала, то исследователь при поиске структуры между наблюдаемыми переменными был бы брошен на произвол судьбы (как это происходит, например, в компонентном анализе) или осуществлял бы выбор положения осей чисто случайным образом. Конечно, он мог бы также использовать критерии, которые лежат вне факторного анализа, как это рекомендовал делать Айзенк. Но прежде чем этими критериями пользоваться, их нужно четко сформулировать. Комбинация обоих подходов скрывает в себе нереализованные еще возможности создания новых критериев поиска структуры данных. Из многочисленных методов вращения здесь подробно был разобран графический метод, состоящий из итеративной процедуры осуществления вращения в соответствующих плоскостях. Этот метод выдержал испытание временем, и даже создание оптимального аналитического критерия, — который пока еще не существует, — не сможет заставить исследователей полностью отказаться от этого метода. Графический метод вращения следует рекомендовать также исходя из дидактических соображений. Геометрические представления, кроме наглядности, дают возможность исследователю прочувствовать характер экспериментальных данных, чего при анализе не заменят никакая быстродействующая ЭВМ и никакие элегантные математические методы. Поэтому графический метод был представлен достаточно широко, и в значительно меньшем объеме обсуждались аналитические методы. Очень рекомендуется практикам применять комбинацию метода варимакс и Rotoplot-программы.

Экскурс в область других методов вращения и аналитических критериев должен побудить читателя к продолжению изучения проблемы вращения. Некоторые из описанных нами подходов являются весьма спорными. Большую опасность таит в себе «прокрустов» метод, так как он позволяет приспособить данные к любой заранее сформулированной гипотезе. Был приведен учебный пример с целью продемонстрировать процедуру вычислений и показать возможность получения результатов, не противоречащих здравому смыслу. Рассмотрение факторов более высоких порядков также задумано как небольшой экскурс в эту еще мало разработанную область факторного анализа. Хотя уже на некоторых конкретных примерах может быть показана практическая польза от выделения факторов второго и более порядков, остаются нерешенными многие методические вопросы. Как подчеркивалось нами, накопление экспериментального материала докажет необходимость введения концепции факторов более высоких порядков.

Для проверки значимости простой структуры на практике используется тест Баргмана. С его помощью, предполагая определенный порядок вращения, контролируется взаимное расположение переменных в пространстве — случайно оно или как-то упорядочено. Если гипотеза о значимости структуры принята, то можно со спокойной совестью приступать к интерпретации факторов. Едва ли можно найти примеры применения этого теста в литературе на немецком языке. Очевидно, исследователи остерегаются его применять из-за того, что при небольших значениях общностей увеличивается ошибка первого рода. Однако критерий Баргмана следует рассматривать как стандартный метод, который рекомендуется употреблять в любых ситуациях, так как он достаточно обоснован теоретически. Правда, во многих случаях он не дает удовлетворительных результатов, например при приложении к факторным решениям, полученным центроидным методом или методом главных факторов. Но это только еще раз доказывает, что решения, к которым не применяется процедура вращения, не могут считаться окончательными, ибо не могут быть содержательно проинтерпретированы. Получение же содержательно интерпретируемых факторов является конечной целью факторного анализа.

6. ИЗМЕРЕНИЕ ФАКТОРОВ

В предыдущих разделах обсуждались методы, позволяющие сократить большое число наблюдаемых переменных до небольшого числа влияющих факторов (факторная проблема и проблема общности). Выделенные факторы при решении указанных проблем носили искусственный характер и непосредственно не выражались через наблюдаемые переменные (например, при использовании метода главных факторов, при котором каждый последовательно выделяемый фактор оттягивает на себя максимум суммарной дисперсии, оставшейся после исключения предыдущих факторов). Чтобы достигнуть лучшей интерпретируемости факторов, необходимо выполнить процедуру вращения, руководствуясь принципом простой структуры. Конечным результатом факторного анализа является получение содержательно интерпретируемых факторов, воспроизводящих матрицу коэффициентов корреляций между переменными. Факторное решение может быть записано в виде матрицы $\mathbf{V}_{fs}$, выражая таким образом наблюдаемые переменные в терминах факторов. Однако можно пойти еще дальше, а именно решить обратную задачу — произвести измерение факторов по значениям наблюдаемых переменных. До сих пор рассматривалась такая ситуация, когда для каждого индивидуума имелись отдельные значения различных переменных. Теперь будем рассматривать значения различных факторов у каждого обследуемого индивидуума и решать задачу измерения факторов. Значения факторов могут являться результатом статистической оценки или непосредственного определения. Если до сих пор речь шла о факторных нагрузках переменных, то теперь речь пойдет о выражении факторов через переменные.

Основная модель факторного анализа была записана в виде равенства (2.13), которое повторено в данном разделе (6.1). Матрица $\mathbf{Z}$ — это матрица стандартизованных переменных, являющихся линейной комбинацией r факторов. Уже в модели факторного анализа заложена матрица значений факторов $\mathbf{P}$. Ее размер $r \times n$, и в каждом ее столбце содержатся значения факторов у отдельных индивидуумов. Матрица должна быть пронормирована построчно. Значения факторов должны иметь среднюю, равную нулю, и дисперсию, равную единице:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{AP}. \tag{6.1}$$

До сих пор мы занимались с помощью различных подходов и ограничений определением матрицы $\mathbf{A}$, не затрагивая матрицу значений факторов $\mathbf{P}$. Если матрица $\mathbf{A}$ известна, то можно приступить к определению $\mathbf{P}$.

На определение матрицы **A** затрачивается много усилий, а ее интерпретация сама по себе является важной задачей факторного анализа. Поэтому большинство исследователей, утомленных длительной процедурой вычислений, отказываются от следующего этапа факторного анализа — определения значений факторов, тем более, что непосредственную пользу при интерпретации факторов этот этап не приносит. С этим можно согласиться, если речь идет о предварительных исследованиях и еще не выяснены все последствия проведенного анализа. Но для дальнейшего использования результатов очень важно знать значения факторов у обследуемых индивидуумов, особенно при генерировании новых гипотез и их проверке. Если проверка гипотез показала, что отдельные функциональные единицы* могут быть изолированы, то отдельным индивидуумам могут приписываться значения этих функциональных единиц. Требование факторного анализа выявить структуру, завуалированную какими-то внешними проявлениями, лишь тогда считается выполненным, когда найдено соотношение между этой структурой и отдельными индивидуумами. Каждый индивидуум, таким образом, может быть с погрешностями, обусловленными определением факторов, представлен в виде линейной комбинации значений факторов. С помощью этой комбинации можно рассчитать значения наблюдаемых переменных у отдельного индивидуума.

Такая процедура не позволяет достаточно просто описать способности индивидуума в терминах многочисленных переменных, присущих одному эксперименту. С некоторыми оговорками результаты первого эксперимента можно перенести в другой эксперимент и благодаря этому добиться некоторой экономии в расчетах. Пусть по результатам первой выборки, где были получены измерения переменных, было выделено методом факторного анализа r факторов. Для каждого фактора отбираем только те переменные, которые сильно нагружают данный фактор, и только эти переменные используем в других выборках для оценок фактора. По полученным таким образом значениям факторов можно затем способности каждого индивидуума оценить по всем m переменным. Погрешность оценки значений фактора при такой процедуре, естественно, больше погрешности, допускаемой при участии всех переменных в экспериментах. Но величину этой погрешности определить трудно.

Исходя из (6.1) запишем равенство для отдельного индивидуума:

$$z_{ij} = a_{i1}p_{1j} + a_{i2}p_{2j} + \ldots + a_{ir}p_{rj}, \qquad (6.2)$$

где z_{ij} — стандартизованное значение i-й переменной для j-го индивидуума; p_{1j} — p_{rj} — значения фактора r у j-го индивидуума; a_{il} — вычисленные факторные нагрузки.

Каттелл [35; *4*, *8*] называет это равенство специфическим (*specification equation*), так как оно характеризует поведение j-го индивидуума

* Функциональные единицы — это другое название факторов. — *Примеч. пер.*

при выполнении i-го психологического теста. Факторные нагрузки a_{il} интерпретируются им как признаки, характеризующие ситуацию, а p_{lj} — как степень индивидуальности каждого лица. Оба коэффициента являются функциями проявления способности j-го индивидуума в i-м тесте. Эта интерпретация равенства (6.2) переносится на другие области исследования, целью которых является, выражаясь формально, заменить m наблюдаемых переменных r факторами, причем должно быть $r < m$.

В конкретных случаях проблема определения значений факторов заключается в нахождении такой модификации равенства (6.1), чтобы можно было по известным **Z** и **A** построить матрицу **P**. Если факторный анализ ведется в терминах главных компонент, то значения факторов могут быть вычислены точно, так как полная единичная дисперсия переменных делится компонентами на определенные части. В модели факторного анализа оценка значений факторов возможна только с помощью множественного регрессионного анализа. Оба случая раздельно обсуждаются в гл. 6.1 и 6.2. При этом в гл. 6.2 кратко излагается метод множественной регрессии для стандартизованных переменных. Множественная корреляция между переменными и факторами рассматривается в гл. 6.3. Коэффициент множественной корреляции между фактором и переменными является мерой точности оценки значений фактора. В заключение в гл. 6.4 упоминаются другие методы определения значений факторов.

6.1. ИЗМЕРЕНИЕ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

При проведении компонентного анализа исходят из корреляционной матрицы. Вычисляя собственные значения и собственные векторы матрицы, приходят к ортогональной матрице **A**. Более подробно вся процедура расчета была описана в гл. 3.1. Для решения поставленной задачи в компонентном анализе, так же как в факторном анализе, будем использовать равенство (6.1). Умножив обе его части на $\mathbf{A}^{-1}$, получим

$$\mathbf{P}^{\cdot} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}. \tag{6.3}$$

Так как **Z** известна, то для получения $\mathbf{P}^{\cdot}$ нужно определить лишь $\mathbf{A}^{-1}$. Для обращения матрицы необходимо, чтобы она была квадратна. Матрица **A** квадратна только тогда, когда **R** имеет ранг m и выделяются все m главных компонент. После вычисления обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ можно приступить к определению матрицы значений главных компонент, которую мы обозначили через $\mathbf{P}^{\cdot}$, по формуле (6.3).

Эта процедура приводит к точным и однозначным результатам, если были выделены все m главных компонент. Процедура связана с большим объемом вычислений в основном из-за обращения матрицы порядка m. Кроме того, должны быть вычислены все m собственных значений матрицы **R**, чтобы получить квадратную матрицу **A**. Но такая процедура на практике не применяется. Кайзер [164; *6*], руководствуясь работой Хотеллинга [144; *1*], предложил следующий упрощенный способ.

Для факторного отображения, полученного в результате компонентного анализа, имеем

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{M}, \tag{6.4}$$

т. е. суммируются квадраты факторных нагрузок в каждом столбце **A** относительно соответствующего собственного значения. Диагональная матрица **M** содержит собственные значения, порядок расположения которых зависит от их величины. В этом легко можно убедиться, обратившись к равенству (3.7), по которому выполняется нормирование элементов собственных векторов матрицы. Возведя обе части равенства (3.7) в квадрат и просуммировав по всем i, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{il}^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_{il}^2 \lambda_l}{\alpha_{1l}^2+\alpha_{2l}^2+\dots+\alpha_{ml}^2} = \frac{\lambda_l}{\alpha_{1l}^2+\alpha_{2l}^2+\dots+\alpha_{ml}^2} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{il}^2 = \lambda_l. \tag{6.5}$$

Кроме того, умножая обе части равенства (6.1) на $\mathbf{A}'$, а затем на $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}$, получим

$$\mathbf{P}^{\cdot} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Z}. \tag{6.6}$$

В любом случае матрица $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ квадратна, порядком не больше m. Если выделяют только первые r главных компонент, то ее размерность равна r. Следовательно, она всегда имеет обратную матрицу. Подставляя (6.4) в (6.6), получим равенство

$$\mathbf{P}^{\cdot} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Z}, \tag{6.7}$$

которое значительно упрощает все вычисления по сравнению с (6.3). Собственные значения матрицы **R**, которые стоят по диагонали матрицы **M**, уже известны по вычислениям, произведенным в компонентном анализе. Так как **M** является диагональной матрицей, то вычисление обратной матрицы сводится к определению величин, обратных к значениям диагональных элементов. Итак, значения главных компонент $\mathbf{P}^{\cdot}$ получаем путем простого перемножения матриц. Формула (6.7) обладает еще тем преимуществом, что она позволяет определить значения не всех m, а лишь нескольких первых компонент, нужных исследователю. Формулой (6.3) можно пользоваться только в случае, если определены все главные компоненты. Это особенно важно при работе на клавишных вычислительных машинах. Само собой разумеется, формулу (6.7) можно употреблять также при вычислениях на ЭВМ.

Поясним определение значений главных компонент на примере из раздела 2. Мы исходим из данных табл. 2.2 и 2.3. К корреляционной матрице табл. 2.3 был применен метод главных факторов (см. гл. 3.1.3). По этой же матрице (с единицами на главной диагонали) был проведен компонентный анализ. В строке 1 табл. 6.1 записаны два собственных значения главных компонент, а в 3-й и 4-й строках — матрица $\mathbf{A}'$. Матрица **Z** заимствована из табл. 2.2 и занесена в строки 7—12 табл. 6.1. Таким образом, мы имеем все необходимое, чтобы производить вычисления по формуле (6.7). Все исходные величины в табл. 6.1 заключены в рамку.

Таблица 6.1

Вычисление значений главных компонент P·

Обозначения	Строка №	Отдельные значения									
λ_1, λ_2	1	2,45656	1,72580								
$1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$	2	0,40707	0,57944								
A′	3	0,839	0,775	0,772	0,428	0,486	0,371				
	4	0,345	0,419	0,315	—0,731	—0,658	—0,606				
M⁻¹A′	5	0,342	0,315	0,391	0,174	0,198	0,151				
	6	0,199	0,243	0,183	—0,424	—0,382	—0,351				
Z	7	0,10	—0,90	0,0	—0,10	—1,80	0,80	0,0	0,20	0,0	1,80
	8	0,05	—0,80	0,0	—0,05	—1,60	0,75	0,0	0,10	0,0	1,60
	9	0,10	—0,70	0,0	—0,10	—1,40	0,60	0,0	0,20	0,0	1,40
	10	0,80	—0,05	0,0	—0,80	—0,10	—0,75	0,0	1,60	0,0	0,10
	11	0,70	—0,10	0,0	—0,70	—0,20	—0,60	0,0	1,40	0,0	0,20
	12	0,50	—0,05	0,0	—0,50	—0,10	0,0	0,0	1,00	0,0	0,10
P·	13	0,442	—0,869	0,0	—0,442	—1,739	0,495	0,0	0,885	0,0	1,739
	14	—0,732	—0,425	0,0	0,732	—0,849	+0,096	0,0	—1,464	0,0	0,849
P	15	0	—1	0	0	—2	+1	0	0	0	+2
	16	+1	0	0	—1	0	—1	0	+2	0	0

Вычислив $1/\lambda_1$ и $1/\lambda_2$, записываем эти значения в строку 2. Элементы строки 5 получаются в результате умножения первого значения строки 2 на все элементы строки 3. Аналогично, перемножая второе значение строки 2 с элементами строки 4, получаем строку 6. Затем, умножая строку 5 на первый столбец матрицы **Z**, получаем первый элемент строки 13. (В подробной записи это выглядит таким образом: $0{,}342 \cdot 0{,}10 + 0{,}315 \cdot 0{,}05 + 0{,}391 \cdot 0{,}10 + 0{,}174 \cdot 0{,}80 + 0{,}198 \times \times 0{,}70 + 0{,}151 \cdot 0{,}50 = 0{,}442$.) Остальные элементы строки 13 вычисляются таким же образом путем перемножения оставшихся столбцов матрицы **Z** с вектором — строкой 5. Строка 14 вычисляется аналогично по строке 6 и столбцам матрицы **Z**. Строки 13 и 14 содержат искомые значения главных компонент. Для сравнения в строках 15 и 16 указаны стандартизованные значения матрицы **P**, которые были заданы в этом примере. Из таблицы видно, что они плохо согласуются с вычисленными значениями главных компонент, даже если изменить знаки у значений второго фактора, что в принципе допускается. Различие между вычисленными и действительными значениями указывает на то, что в большинстве случаев главные компоненты не соответствуют величинам, которые действительно лежат в основе исходных данных. Поскольку факторное отображение, полученное в результате компонентного анализа, не согласуется с произвольно заданным отображением в табл. 2.2, значения главных компонент также не согласуются с заданными наперед значениями факторов. Положение может исправить лишь вращение.

Вычислять значения главных компонент имеет смысл тогда, когда удовлетворяются выделением r факторов, линейно независимых друг от друга, которые оттягивают на себя максимум дисперсии наблюдаемых переменных. Но такие факторы не всегда могут быть содержательно проинтерпретированы. Если анализируют m переменных, которые попали в выборку более или менее случайно, просто потому, что экспериментатор мог их легко получить, нужно отказаться от модели факторного анализа. В таких случаях, а на практике, к сожалению, они часто встречаются, нужно с самого начала довольствоваться моделью компонентного анализа. Тем самым отказываются от возможной интерпретации и довольствуются выделением как можно меньшего числа компонент, отбирающих на себя по возможности наибольшую долю дисперсии, насколько позволяют это исходные данные. Тогда описанным здесь способом могут быть определены значения главных компонент для отдельных индивидуумов. Компонентный анализ в некотором роде произвольно уменьшает размерность исходных величин. Он выполняет назначение прокрустова ложа, к которому должны приспосабливаться данные. Конечно, не исключено, что получают как раз такие данные, которые хорошо поддаются анализу методом главных компонент. Тогда метод дает удовлетворительное описание наблюдаемых переменных небольшим числом компонент.

В принципе можно результат компонентного анализа подвергнуть вращению. Но чаще всего вращение выполняется с решением, полученным в результате применения модели факторного анализа. Кайзер [164; *6*] указал формулы, по которым можно выполнить процедуру вращения главных компонент. Здесь также различают вторичные оси и первичные факторы. Формулы Кайзера в основном соответствуют тем, которые будут указаны в следующей главе для оценки значений факторов. Поэтому мы здесь их не рассматриваем. Остановимся лишь на частном случае ортогонального преобразования. Пусть матрица **A** преобразуется в ортогональную матрицу **B** и матрица преобразования **T** известна.

$$\mathbf{AT} = \mathbf{B}. \tag{6.8}$$

Тогда в новой системе координат для определения значений главных компонент пользуемся формулой

$$\mathbf{P}^{\cdot} = \mathbf{T}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Z}, \tag{6.9}$$

т. е. формула (6.9) получается из (6.7) путем умножения ее на транспонированную матрицу преобразования. Впрочем, этой формулой можно пользоваться также в случае неортогонального вращения. Тогда **T** является матрицей преобразования к первичной факторной структуре.

6.2. ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ФАКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ МНОЖЕСТВЕННОГО РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Определение значений факторов по сравнению с вычислением значений главных компонент осложняется тремя обстоятельствами. Во-первых, в факторной модели наряду с общими учитываются характерные факторы, значения которых не могут быть определены пока остается неизвестной полная дисперсия переменной. Во-вторых, факторы почти всегда подвергают вращению, и, в-третьих, они большей частью не ортогональны. Особенно затрудняет решение поставленной задачи первое из перечисленных обстоятельств, так как матрица $\mathbf{F} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{U})$ содержит больше факторов, чем переменных, она не квадратна и для нее не существует обратной матрицы. Точно определить значения факторов, как это было в случае измерения главных компонент, нельзя, но мы можем построить их оценки с помощью метода наименьших квадратов. С этой целью применяется множественный регрессионный анализ.

В этом месте необходимо напомнить о множественной регрессии, о которой уже шла речь в гл. 2.5. В гл. 1.3 были приведены формулы вычисления уравнений линейной регрессии для одной независимой переменной. В факторном анализе используют стандартизованные переменные, среднее значение которых равно нулю, а дисперсия равна единице. Это только упрощает соответствующие формулы множественного регрессионного анализа, так как исчезает свободный член в уравнении регрессии. Раздел, посвященный регрессионному анализу, имеется почти во всех учебниках по статистике. В качестве примера назовем из литературы на немецком языке книги Линдера [190; *2*], Вебера [303], а также Хофстеттера и Вендта [132], а из литературы на английском языке — Хоула [130; *2*], Уолкера, Лева [299] и Шпигеля [273]. В доступной форме излагается множественный регрессионный анализ для стандартизованных переменных у Баггалея [9]. Далее опускаются выводы формул этого широко известного метода многомерной статистики, обсуждается лишь общая идея и приводится техника вычисления для стандартизованных переменных.

На рис. 6.1 изображено поле корреляции, точки которого соответствуют отдельным индивидуумам. Координаты точек являются значениями стандартизованных переменных z_0 и z_1. Задача *регрессионного анализа* состоит в проведении прямой через облако точек таким образом, чтобы с ее помощью можно было с наименьшей погрешностью по значениям z_{1j} оценивать значения z_{ij}. Эта прямая

$$\hat{z}_0 = bz_1 \tag{6.10}$$

изображена на рис. 6.1. Так как среднее значение обеих переменных равно нулю, то она проходит через начало координат. Оценки z_0, полученные по значениям величины z_1, лежат на прямой. Однако отдельные точки более или менее удалены от нее, что вызывается погрешностью оценки e_j. Величина одной такой погрешности для точки P_j изображена на рисунке. Коэффициент b должен быть подобран так, чтобы эта погрешность была минимальна. Он является мерой наклона прямой. Общие формулы корреляционного и регрессионного исчислений для двух переменных x и y были представлены в табл. 1.1. Чтобы перейти к стандартизованным переменным, достаточно в этих формулах заменить x на z_1, а y на z_0, приравняв средние значения нулю, а дисперсии — единице. В табл. 6.2 приведены формулы линейной регрессии для двух стандартизованных переменных. Они соответствуют формулам табл. 1.1, в чем легко убедиться.

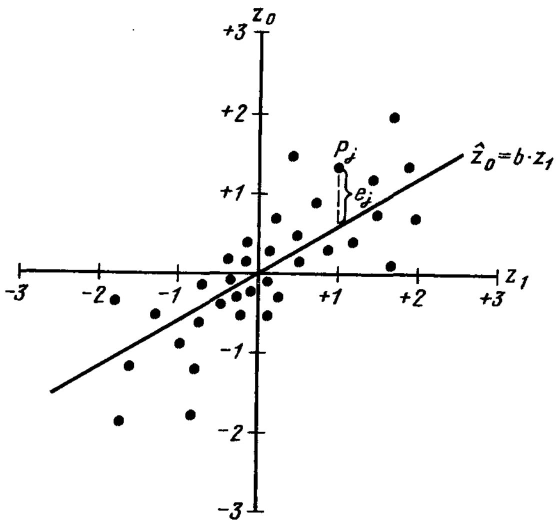


Рис. 6.1. Уравнение регрессии для стандартизованных переменных. Прямую $\hat{z}_0 = bz_1$ проводят через облако точек так, чтобы сумма квадратов отрезков e_j была минимальна

Когда для оценки переменной привлекают не менее двух независимых переменных, то говорят о *множественном регрессионном анализе*. Целью множественного регрессионного анализа является подбор таких весовых коэффициентов к нескольким независимым переменным, или, точнее сказать, исходным величинам, чтобы оценки значений зависимой переменной, или, лучше сказать, целевой функции, имели возможно меньшие ошибки. Включение в анализ нескольких переменных часто улучшает оценку искомой переменной. Линейная модель множественной регрессии для стандартизованных переменных была уже приведена в формуле (2.47).

$$\hat{z}_{0j} = \beta_1 z_{1j} + \beta_2 z_{2j} + \ldots + \beta_m z_{mj}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.11}$$

Здесь β_i являются искомыми коэффициентами регрессии. Через $\hat{z}_{0j}$ обозначена оценка значения целевой функции, а через z_{ij} — значения исходных величин.

В матричной форме это уравнение имеет вид:

$$\hat{\mathbf{z}}_0' = \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{Z}, \tag{6.12}$$

где $\hat{\mathbf{z}}_0'$ является вектор-строкой оценок значений переменной z_0; $\boldsymbol{\beta}'$ — вектор-строкой оценок коэффициентов регрессии, а $\mathbf{Z}$ — матрицей стандартизованных значений исходных величин.

Таблица 6.2

Вычисление уравнения регрессии для стандартизованных переменных

	Переменная z_{1j}	Переменная z_{0j}
Объем выборки	n	n
Среднее значение	$\bar{z}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} z_{1j} = 0$	$\bar{z}_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} z_{0j} = 0$
Сумма квадратов отклонений	$S_{z_1 z_1} = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^2$	$S_{z_0 z_0} = \sum_{j=1}^{n} z_{0j}^2$
Дисперсия	$s_{z_1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot S_{z_1 z_1} = 1$	$s_{z_0}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot S_{z_0 z_0} = 1$
Сумма произведений отклонений	$S_{z_1 z_0} = \sum_{j=1}^{n} z_{1j} \cdot z_{0j}$	
Уравнение регрессии z_0 по z_1	$\hat{z}_0 = b \cdot z_1$, где $b = S_{z_1 z_0}/S_{z_1 z_1}$	
Уравнение регрессии z_1 по z_0	$\hat{z}_1 = b' \cdot z_0$, где $b' = S_{z_1 z_0}/S_{z_0 z_0}$	

Коэффициенты регрессии β_i должны быть подобраны так, чтобы сумма квадратов ошибок оценок была минимальна.

$$\sum_j e_j^2 = \sum_j (z_{0j} - \hat{z}_{0j})^2 = \text{Min}. \qquad (6.13)$$

Можно показать, что при этих условиях для стандартизованных переменных имеет силу следующее равенство:

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}, \qquad (6.14)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ является вектор-столбцом оценок коэффициентов регрессии; $\mathbf{v}$ — вектор-столбцом коэффициентов корреляции между целевой функцией и всеми исходными величинами; $\mathbf{R}$ — матрицей коэффициентов корреляции между исходными величинами. Для большей ясности перейдем от матричной формы записи (6.14) к системе уравнений

$$\begin{array}{l} r_{11}\beta_{l1} + r_{12}\beta_{l2} + \ldots + r_{1m}\beta_{lm} = v_{l1} \\ r_{12}\beta_{l1} + r_{22}\beta_{l2} + \ldots + r_{2m}\beta_{lm} = v_{l2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{m1}\beta_{l1} + r_{m2}\beta_{l2} + \ldots + r_{mm}\beta_{lm} = v_{lm}, \end{array}$$

где v_{li} — коэффициенты корреляций между целевой функцией и всеми исходными величинами; r_{ik} — коэффициенты корреляции между исходными величинами, или независимыми переменными. Искомые коэффициенты регрессии обозначены через β_{li}. Индекс l указывает на то, что для различных наборов целевых функций имеются соответствующие векторы-решения. Умножая обе части равенства (6.14) на $\mathbf{R}^{-1}$, получим

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v} \text{ или } \boldsymbol{\beta}' = \mathbf{v}'\mathbf{R}^{-1}. \qquad (6.15)$$

Итак, искомые коэффициенты регрессии получаются путем обращения матрицы коэффициентов корреляции между независимыми переменными и последующего ее умножения на вектор v. Второе равенство (6.15) является другой формой записи решения, которая нужна нам будет позднее. Формула (6.15) позволяет найти оценку коэффициентов регрессии в случае стандартизованных переменных.

На рис. 6.2 трехмерное пространство натянуто на переменные z_0, z_1 и z_2. Значения переменной z_0 должны определяться по значениям двух других переменных с наименьшей ошибкой. Найденное уравнение регрессии $\hat{z}_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$ определяет плоскость, проходящую через нулевую точку. Все оценки лежат на ней. Эта плоскость должна занимать такое положение в облаке точек, чтобы в общем оценка ошибки для всех точек была как можно меньше. Чтобы не загромождать изображение, на рис. 6.2 представлена только одна точка P_j

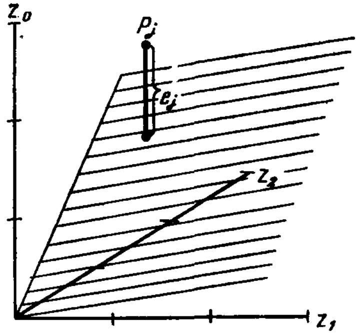


Рис. 6.2. Плоскость регрессии для стандартизованных переменных. Наилучшая оценка z_0 по z_1 и z_2 находится на плоскости $\hat{z}_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$, заштрихованной на графике. Расстояние точки P_j до этой плоскости характеризует ошибку оценки e_j. Плоскость должна быть проведена так, чтобы сумма квадратов e_j была минимальна

Отрезок прямой, проведенной через точку P_j параллельно z_0 до пересечения с плоскостью регрессии, дает оценку ошибки для этой точки. Уравнения регрессии в геометрических терминах соответствуют m-мерным плоскостям, где m — число независимых переменных. Они должны располагаться в $(m+1)$-мерном пространстве так, чтобы сумма квадратов оцененных ошибок e_j^2 была минимальной величиной.

После этого небольшого экскурса в область множественного регрессионного анализа для стандартизованных переменных мы можем возвратиться к нашей проблеме. По матрице стандартизованных исходных данных **Z** должны быть получены оценки значений факторов $\hat{\mathbf{P}}$ для отдельных индивидуумов. Матрица коэффициентов корреляции между наблюдаемыми (независимыми) переменными известна. Также известны коэффициенты корреляции между переменными и факторами, а именно элементы матрицы $\mathbf{V}_{fs}$. Должна быть найдена $\mathbf{B}'$—матрица коэффициентов регрессии факторов по переменным, которая входит в равенство

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{B}'\mathbf{Z}. \tag{6.16}$$

Здесь $\hat{\mathbf{P}}$ означает матрицу оценок значений факторов размерностью $r \times n$; $\mathbf{B}'$ — матрицу коэффициентов регрессии размерностью $r \times m$, а $\mathbf{Z}$ — матрицу стандартизованных переменных размерностью $m \times n$. Итак, должны быть найдены коэффициенты регрессии стандартизованных факторов по стандартизованным переменным. Это соответствует задаче множественного регрессионного анализа, записанной в виде формулы (6.12). Но в (6.16) входят несколько зависимых величин, факторов, подлежащих оценке, а в формуле (6.12) речь идет только об одной переменной. Поэтому для определения коэффициентов регрессии обратимся к равенству

$$\mathbf{B}' = \mathbf{V}'_{fs}\mathbf{R}^{-1}, \tag{6.17}$$

получающемуся из формулы (6.15) путем замены в ней вектор-строк $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\beta}'$ на матрицы $\mathbf{V}'_{fs}$ и $\mathbf{B}'$. Матрицу $\mathbf{V}'_{fs}$ составляют, располагая друг над другом несколько вектор-строк $\mathbf{v}'$, элементами которых являются коэффициенты корреляции между переменными и факторами, подлежащими оценке. В результате умножения на обратную матрицу получаем не единственный вектор-строку $\boldsymbol{\beta}'$, как в (6.15), а матрицу $\mathbf{B}' = (\beta_{il})$, состоящую из нескольких вектор-строк $\boldsymbol{\beta}'$. Каждая строка матрицы $\mathbf{B}'$ содержит коэффициенты регрессии фактора по переменным. Матрица $\mathbf{R}^{-1}$ является обратной к матрице коэффициентов корреляции между наблюдаемыми переменными, которые во множественном регрессионном анализе называются независимыми величинами (а факторы — зависимыми величинами). Подставляя (6.17) в (6.16), получаем

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{V}'_{fs}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \tag{6.18}$$

Итак, наилучшие оценки значений факторов в смысле наименьшей суммы квадратов ошибок получаем исходя из первичной факторной структуры, корреляционной матрицы и стандартизованных переменных. Наиболее трудоемкой частью вычислений является обращение матрицы $\mathbf{R}$. Много времени также приходится тратить на нормирование переменных в матрице $\mathbf{Z}$. Из равенств (6.17) и (6.18) с помощью известных нам соотношений можно вывести другие формулы, которые применяются в том случае, когда матрица $\mathbf{V}_{fs}$ не известна. Они эквивалентны формуле (6.18) и приводятся нами далее.

Между первичной факторной структурой и первичным факторным отображением существует связь (5.20): $\mathbf{V}_{fs} = \mathbf{V}_{fp}\mathbf{C}_f$. Подставляя это соотношение в (6.18), получаем

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{C}_f\mathbf{V}'_{fp}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \text{ или } \mathbf{B}' = \mathbf{C}_f\mathbf{V}'_{fp}\mathbf{R}^{-1}. \tag{6.19}$$

В большинстве случаев исходят не из первичного факторного отображения, а из вторичной факторной структуры, связь между которыми согласно (5.24) выражается таким образом: $\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_{fp}\mathbf{D}$. Умножив обе части этого равенства на $\mathbf{D}^{-1}$ и подставив затем выражение $\mathbf{V}'_{fp}$ в (6.19), получим следующую формулу:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{C}_f\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}'_{rs}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \tag{6.20}$$

По формуле (5.26) имеем $\mathbf{C}_f = \mathbf{D}\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{D}$. Подставив это выражение в (6.20), придем к формуле (6.21), которая содержит матрицу вторичной факторной структуры

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{D}\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{V}'_{rs}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \text{ или } \mathbf{B}' = \mathbf{D}\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{V}'_{rs}\mathbf{R}^{-1}. \tag{6.21}$$

Эта формула кажется более сложной, но работать с ней намного проще, чем с приведенными выше, хотя она также предполагает вычисление $\mathbf{R}^{-1}$. Матрица $\mathbf{V}_{rs}$, а также матрица коэффициентов корреляций между вторичными осями $\mathbf{C}_r$ получается после вращения при достижении простой структуры. Обращение матрицы $\mathbf{C}_r$ размерностью r также часто необходимо для определения $\mathbf{D}$ и факторного отображения $\mathbf{V}_{fp}$. Таким образом, мы получаем оценки значений факторов путем простого перемножения ряда матриц. Для полноты укажем еще одну формулу, которая служит для определения оценок значений факторов, если известны $\mathbf{V}_{rp}$ и $\mathbf{C}_r$. По (5.17) имеем $\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_{rp} \cdot \mathbf{C}_r$. Подставляя это выражение в (6.21), получаем

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{D}\mathbf{V}'_{rp}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \tag{6.22}$$

Формулы (6.18)—(6.22) дают один и тот же результат, и какой из них пользоваться в конкретном случае — зависит от того, какими матрицами располагает исследователь. При использовании любой из этих формул необходимо вычислять матрицу, обратную к $\mathbf{R}$. Все способы приводят к определению матрицы $\mathbf{B}'$, элементами которой являются коэффициенты регрессии факторов по переменным. Различие их обусловлено тем, какими из четырех косоугольных факторных решений $\mathbf{V}$ пользуются. Выбор формулы зависит от величин, полученных в ходе анализа. Для ортогональной матрицы $\mathbf{A}$ не существует различия между факторным отображением и структурой, а вторичные оси совпадают с первичными факторами. В случае такого факторного решения пользуются формулой (6.18) или идентичной ей формулой (6.19), в которой $\mathbf{C}_f = \mathbf{I}$. Значения $\hat{\mathbf{P}}$, полученные таким образом, в отличие от (6.7) не являются точными, а являются лишь оценками значений факторов. Если имеется варимакс-решение, а факторы были выделены с помощью метода главных факторов, то пользуются формулой (6.18). При косоугольном вращении в большинстве случаев располагают матрицами $\mathbf{V}_{rs}$ и $\mathbf{C}_r$. Тогда следует применить формулу (6.21). Итак, выбор формулы осуществляется в зависимости от того, исходят ли из $\mathbf{V}_{fp}$, $\mathbf{V}_{fs}$ или из $\mathbf{V}_{rp}$. Список формул можно было бы продолжить, учитывая все возможные комбинации матриц $\mathbf{V}$. Но мы отказываемся здесь от этого.

Нахождение оценок значений факторов очень трудоемкая работа. Это вызвано прежде всего вычислением обратной матрицы. При 40—100 переменных выполнить такую операцию несколько лет назад было практически невозможно. Сейчас операция обращения больших матриц выполняется на ЭВМ за несколько минут. В гл. 6.4 рассматриваются еще некоторые приближенные способы оценок, которые ускоряют процесс вычисления.

Как указывалось, общим для приведенных формул является то, что в любом случае определяются коэффициенты регрессии факторов по переменным. Эти коэффициенты регрессии являются элементами матрицы $\mathbf{B}'$, которая интересна тем, что по ней можно считывать вклады переменных в факторы. К этому мы еще вернемся, а сейчас рассмотрим конкретный пример.

Пусть имеется ортогональное факторное отображение. В этом случае для определения коэффициентов регрессии можно использовать формулу (6.17). Хотя речь идет об ортогональном факторном отображении, мы будем употреблять обозначение $\mathbf{V}_{fs}$, приведенное в формуле, подчеркивая тем самым, что можно было бы исходить из косоугольной первичной факторной структуры. Вначале выполним операцию обращения корреляционной матрицы, а затем, перемножая матрицы по формуле (6.17), находим коэффициенты регрессии.

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \dots v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} \dots v_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} \dots v_{rm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^{11} & r^{12} \dots r^{1m} \\ r^{21} & r^{22} \dots r^{2m} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ r^{m1} & r^{m2} \dots r^{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} \dots \beta_{rm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}'_{fs} \quad\quad \cdot \quad\quad \mathbf{R}^{-1} \quad = \quad\quad \mathbf{B}'.$$

Элементами каждой строки в матрице $\mathbf{V}'_{fs}$ являются коэффициенты корреляции между переменными и фактором, элементами соответствующих строк в матрице $\mathbf{B}'$ являются коэффициенты регрессии этого фактора по всем переменным. Если хотят оценить только один фактор, то в $\mathbf{V}'_{fs}$ и $\mathbf{B}'$ используют лишь одну строку. С помощью коэффициентов регрессии β_{il} затем вычисляют по (6.16) оценки значений фактора. Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{1j} &= \beta_{11} z_{1j} + \beta_{12} z_{2j} + \dots + \beta_{1m} z_{mj} \\ \hat{p}_{2j} &= \beta_{21} z_{1j} + \beta_{22} z_{2j} + \dots + \beta_{2m} z_{mj} \\ &\vdots \\ \hat{p}_{lj} &= \beta_{l1} z_{1j} + \beta_{l2} z_{2j} + \dots + \beta_{lm} z_{mj} \\ &\vdots \\ \hat{p}_{rj} &= \beta_{r1} z_{1h} + \beta_{r2} z_{2j} + \dots + \beta_{rm} z_{mj}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Индекс j пробегает по всем n (n — число обследуемых индивидуумов) Подставив в правую часть соответствующего уравнения величины j-го индивидуума, получаем оценку значения фактора l для этого индивидуума.

Результаты вычислений по формулам (6.16) и (6.17) сведены в табл. 6.3. Расчет выполнялся для тех же исходных данных, что и в примере с определением значений главных компонент в табл. 6.1. В рамку заключены числа, по которым производятся вычисления. В строках 1 и 2 таблицы записана матрица $\mathbf{V}'_{fs}$. Она заимствована из табл. 2.2. В строках 3—8 записаны элементы матрицы $\mathbf{R}^{-1}$. Строку 9 получаем, умножая вектор, записанный в строке 1, на каждый вектор-столбец матрицы $\mathbf{R}^{-1}$. Аналогично получается строка 10, а именно, умножая вектор, записанный в строке 2, на вектор-столбцы матрицы $\mathbf{R}^{-1}$, выполняя таким образом операцию в (6.17). В строки 11—16 перенесены элементы матрицы $\mathbf{Z}$ из табл. 2.2. Перемножая вектор, записанный в строке 9, со всеми вектор-столбцами матрицы $\mathbf{Z}$, получаем строку 17. Аналогично вычисляются элементы строки 18 по строке 10 и вектор-столбцам матрицы $\mathbf{Z}$ (формула (6.16)). Для сравнения в строки 19 и 20 из табл. 2.2 перенесены действительные значения факторов. Полученные оценки хорошо согласуются с действительными значениями.

Таблица 6.3

Оценка значений факторов

Обозначение	Строка №	Отдельные значения									
V'_{fs}	1	0,90	0,80	0,70	0,05	0,10	0,05				
	2	0,10	0,05	0,10	0,80	0,70	0,50				
R^{-1}	3	2,5669	—1,3869	—0,8337	—0,2079	—0,0151	0,0062				
	4	—1,3869	2,2436	—0,3906	0,2999	—0,1391	—0,0522				
	5	—0,8337	—0,3906	1,7669	—0,0828	—0,0191	—0,0055				
	6	—0,2079	0,2999	—0,0828	1,6193	—0,7742	—0,3696				
	7	—0,0151	—0,1391	—0,0191	—0,7742	1,5378	—0,2222				
	8	0,0062	—0,0522	—0,0055	—0,3696	—0,2222	1,2309				
B′	9	0,6055	0,2717	0,1677	0,0201	—0,0343	—0,0192				
	10	—0,0698	0,0509	—0,0086	0,5546	0,4356	0,1617				
Z	11	0,10	—0,90	0,00	—0,10	—1,80	0,80	0,00	0,20	0,00	1,80
	12	0,05	—0,80	0,00	—0,05	—1,60	0,75	0,00	0,10	0,00	1,60
	13	0,10	—0,70	0,00	—0,10	—1,40	0,60	0,00	0,20	0,00	1,40
	14	0,80	—0,05	0,00	—0,80	—0,10	—0,75	0,00	1,60	0,00	0,10
	15	0,70	—0,10	0,00	—0,70	—0,20	—0,60	0,00	1,40	0,00	0,20
	16	0,50	—0,05	0,00	—0,50	—0,10	0,00	0,00	1,00	0,00	0,10
$\hat{P}$	17	0,07	—0,87	0,00	—0,07	—1,75	0,79	0,00	0,15	0,00	+1,75
	18	0,82	—0,05	0,00	—0,82	—0,10	—0,70	0,00	1,65	0,00	0,10
P	19	0	—1	0	0	—2	+1	0	0	0	+2
	20	+1	0	0	—1	0	—1	0	+2	0	0

6.3. КРИТЕРИЙ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ ФАКТОРА

В последней главе обсуждалось оценивание значений факторов с помощью обычных методов множественной регрессии. Теперь рассмотрим точность полученных оценок. Будем исходить из ортогональной факторной матрицы **A**. Считаем, что коэффициенты регрессии факторов по переменным определены методом, описанным в предыдущей главе, и известны нам.

Каждое из записанных в (6.23) уравнений регрессии связывает фактор l с наблюдаемыми переменными, приведенными к стандартной форме. Коэффициенты β_{il} известны. Если в правую часть уравнения подставить z-значения переменных у определенного индивидуума, то получим оценку значения фактора для этого индивидуума. Очень хотелось бы знать, насколько точна такая оценка. Мерой качества оценки могут служить коэффициент множественной корреляции и коэффициент множественной детерминации.

При парной линейной корреляции коэффициент корреляции характеризует тесноту связи между x и y. Соответствующим показателем во множественной регрессии является коэффициент множественной корреляции R, или совокупный коэффициент корреляции. В данном случае мы его будем вычислять как коэффициент корреляции между действительными значениями фактора и их оценками. Итак, для фактора l имеем

$$r_{p_l \hat{p}_l} = R_l = \sqrt{\beta_{l1} \cdot v_{l1} + \beta_{l2} \cdot v_{l2} + \ldots + \beta_{lm} \cdot v_{lm}}. \qquad (6.24)$$

Квадрат коэффициента множественной корреляции называется коэффициентом множественной детерминации. В соответствии с этим определением

$$R_l^2 = \beta_{l1} \cdot v_{l1} + \beta_{l2} \cdot v_{l2} + \ldots + \beta_{lm} \cdot v_{lm}. \qquad (6.25)$$

Коэффициент множественной детерминации состоит из нескольких слагаемых, каждое из которых вносит свой вклад в R_l^2. Каждое из этих слагаемых в свою очередь является произведением коэффициента регрессии и коэффициента корреляции v_{il} между i-й переменной и фактором l. Если какое-либо слагаемое в (6.25) значительно по величине, то соответствующая переменная вносит большой вклад в определение фактора l. По коэффициенту множественной детерминации можно определить, какая часть дисперсии фактора обусловлена переменными, а какая часть остается необъясненной. Обычно R^2 выражается в процентах, так, например, если $R_l^2 = 0{,}60$, то считаем, что 60% дисперсии фактора l определяется переменными, включенными в анализ. Остальная доля дисперсии, а именно $1 - R_l^2 = 40\%$, обусловлена неучтенными переменными. Вклад отдельной переменной в коэффициент множественной корреляции определяется соответствующим слагаемым в (6.25). Не допуская большой ошибки, можно исключить при оценке фактора переменные, вносящие незначительные вклады в его дисперсию.

По табл. В приложения можно проверить значимость коэффициента множественной корреляции с учетом числа независимых переменных. Если гипотеза о значимости коэффициента множественной корреляции отклоняется, то соответствующий фактор ни в коем случае не следует интерпретировать. Правда, проверка на значимость с помощью этой таблицы не очень корректна, так как она составлена для гипотезы некоррелированности величин. Однако путем вращения можно прийти к такому размещению факторов в пространстве, которое не будет носить случайного характера, даже если сами переменные располагаются в нем случайно. Таким образом, показателем R_l при известных обстоятельствах проверяют качество выполнения процедуры вращения. Из этих рассуждений ясно, что R_l является критерием качества оценки фактора, поэтому коэффициент множественной корреляции всегда полезно вычислять.

Следует отметить еще одно свойство коэффициента множественной корреляции. Он равен стандартному отклонению факторных оценок. Харман [117] приводит вывод следующего равенства (в других обозначениях):

$$R_l = s_{\hat{p}_l}. \qquad (6.26)$$

Хотя среднее значение факторных оценок равно нулю, их дисперсия, однако, не равна единице, а соответствует коэффициенту множественной детерминации. Если анализ производится в терминах главных компонент, то коэффициент множественной детерминации равен единице. При использовании же модели факторного анализа стандартное отклонение факторных оценок меньше единицы и соответствует коэффициенту множественной корреляции.

Харман указывает способ преобразования уравнения (6.25) для вывода формул, обладающих рядом полезных свойств. Умножим первое из уравнений системы (6.14) на β_{l1}, второе — на β_{l2} и так далее до последнего уравнения, умножаемого на β_{lm}:

$$\begin{aligned}
\beta_{l1}v_{l1} &= \beta_{l1}^2 + r_{12}\beta_{l2}\beta_{l1} + \ldots + r_{1m}\beta_{lm}\beta_{l1}\\
\beta_{l2}v_{l2} &= r_{21}\beta_{l1}\beta_{l2} + \beta_{l2}^2 + \ldots + r_{2m}\beta_{lm}\beta_{l2}\\
&\vdots\\
\beta_{lm}v_{lm} &= r_{m1}\beta_{l1}\beta_{lm} + r_{m2}\beta_{l2}\beta_{lm} + \ldots + \beta_{lm}^2.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Члены левой части этих уравнений являются слагаемыми из (6.25). Сложив эти уравнения, мы получим новое выражение коэффициента множественной детерминации R_l^2. Члены левой части уравнений (6.27) измеряют суммарный вклад соответствующей переменной в R_l^2. В правой части (6.27) полный вклад переменной разбит на части, соответствующие непосредственному и опосредствованному вкладам. Так, например, в первом уравнении суммарный вклад переменной состоит из непосредственного вклада β_{l1}^2 и опосредствованного вклада $r_{12}\beta_{l2}\beta_{l1}$, определяемого корреляциями этой переменной со всеми остальными переменными.

Уравнения (6.27) дают возможность сделать вывод о том, как формируется точность оценки фактора. Если коэффициент множественной детерминации мал, то нужно отказаться от оценки фактора. Конечно, вполне возможно, что относительно большие составляющие R_l^2 имеют противоположные знаки и взаимно сокращаются. Это указывает на особую структуру переменных. Вначале рекомендуется вычислить отдельные слагаемые в правой части (6.25) и проверить значимость коэффициента множественной корреляции, а затем рассматривать вклады отдельных переменных, определяя слагаемые в правых частях уравнений (6.27). Но такое подробное исследование проводится редко. В большинстве случаев не доходят до оценки значений факторов. Однако коэффициент множественной детерминации является важным критерием факторного анализа, который следует всегда вычислять. По нему можно сделать вывод, как точно фактор может быть оценен.

6.4. ДРУГИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ ФАКТОРА

В принципе значения фактора можно оценивать без использования матрицы **А**. Но на практике такой подход не находит распространения. Кроме метода множественной регрессии, для оценки значений фактора разработан ряд других методов, а также приближенные и ускоренные способы оценок. Метод множественной регрессии, подробно рассмотренный в гл. 6.2, влечет большой объем вычислений, поэтому часто не устраивает исследователя. В данной главе разберем коротко принципы построения других оценок значений фактора.

В гл. 6.2 мы исходили из уравнения регрессии фактора по переменным. В модели факторного анализа направление исследования противоположное: переменная рассматривается как линейная комбинация факторов:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{AP}. \tag{6.28}$$

Умножив обе части равенства слева на $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$, получим

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\hat{\mathbf{Z}}. \tag{6.29}$$

Подставив в (6.29) $\mathbf{Z}$ вместо ее оценки $\hat{\mathbf{Z}}$, получим выражение для оценки значений факторов:

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Z}. \tag{6.30}$$

Обращение матрицы $(\mathbf{A}'\mathbf{A})$ по сравнению с обращением $\mathbf{R}$ в формулах (6.17)—(6.22) проще, так как здесь идет речь о матрице размером $r \times r$. Мы не можем дать точной рекомендации, каким из двух подходов и при каких дополнительных условиях пользоваться. В ортогональном случае результаты оценок факторов по (6.30) меньше отличаются от результатов по (6.18), чем в косоугольном случае. Нами рекомендуется процедура вычислений по формулам (6.17)—(6.22), так как кроме экономии в вычислениях никакого более убедительного аргумента в пользу (6.30) привести нельзя.

Самая простая процедура вычисления значений факторов описана Каттеллом в его книге [35; *4*]. Он отбрасывает все переменные с малыми нагрузками на фактор. Затем он отдельно складывает z-значения переменных, дающих высокие положительные нагрузки на фактор, и z-значения переменных с высокими отрицательными нагрузками. Разница между ними дает оценку значения фактора. Это очень грубая оценка и неизвестны как случайная, так и систематическая ошибки этой оценки. Несмотря на такую неточность, этой оценкой часто пользуются на практике.

При оценке значений факторов приходится тратить много времени на обращение матрицы $\mathbf{R}$. Известны два подхода, которые сокращают эту вычислительную процедуру. Один из них предложен Харманом, другой — Ледерманом. Харман рекомендует свой способ в задачах с большим числом переменных. Эти переменные разбиваются на r групп. Переменные каждой группы объединяются в одну составную переменную. При оценке факторов вместо корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ порядка m обращению подвергают матрицу коэффициентов корреляции между составными переменными порядка r. При такой процедуре все переменные группы имеют одинаковый вес. Метод субъективен, так как не указывается однозначный критерий, по которому переменные должны объединяться в одну группу. Поэтому метод применяется тогда, когда этот критерий можно сформулировать исходя из каких-либо соображений. Объем вычислений, конечно, сокращается, что играет существенную роль при работе на клавишных вычислительных машинах. Более подробно метод описан у Хармана.

Ледерман исходил из того, что обращение корреляционной матрицы порядка m, имеющей ранг r, можно заменить обращением матрицы порядка r. Если r значительно меньше m, то объем вычислений существенно сокращается. Погрешность результата зависит от того, насколько точно факторная матрица с r столбцами воспроизводит матрицу выборочных коэффициентов корреляции. Если остаточные коэффициенты корреляции малы, то точность ускоренного метода не уступает методу полной оценки. Техника вычислений описана у Ледермана и Хармана.

Если r значительно меньше m, то факторный анализ облегчает вычисление коэффициентов множественной корреляции и частных коэффициентов корреляции. При этом используется в принципе та же самая процедура ускоренного метода оценки значений факторов Ледермана. По данному вопросу отсылаем читателя к работам Дуайера [79; *2*, *3*], Кригера и Гуттмана [112; *1*, *2*], Гуттмана и Коэна [113].

Оценкой значений косоугольных факторов занимались Томсон, Баггалей и Каттелл. Каттелл сравнил на одном примере результаты точного оценивания и ускоренного метода. Ограниченные рамками этой главы, мы не можем останавливаться на этом сравнительном анализе. Следует упомянуть также метод, предложенный Бартлетом. Метод основан на минимизации дисперсии характерных факторов и в общем случае он приводит к иным результатам, чем разобранные здесь методы, так как они были построены на другом принципе. При выборе того или иного метода нужно исходить из принципа оценки, который лежит в его основе.

● 7. ПРОВЕРКА МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА НА РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

В предыдущих разделах обсуждались отдельные этапы факторного анализа. Сейчас мы хотели бы проследить весь ход рассуждений, чтобы представить себе ситуацию, в которой находится исследователь при проведении факторного анализа.

Обычно вначале в руки исследователя попадает матрица исходных данных, по которой определяется корреляционная матрица. Корреляционная матрица содержит важную информацию о взаимных связях между переменными. Из нее выделяют несколько факторов, которые достаточно точно воспроизводят коэффициенты корреляции. Факторы содержат ту же самую информацию, что и матрица **R**, однако в другой форме. Факторы подвергают вращению до достижения положения, в котором наиболее просто и однозначно проявляется связь между ними и переменными (принцип простой структуры). Когда определено истинное положение системы координат, переходят к содержательной интерпретации природы выявленных факторов на основе знаний о самих переменных. Эта интерпретация представляет собой гипотезу о сущности изучаемого явления. При интерпретации факторов исследователь распространяет свои выводы на всю исследуемую область, с которой были связаны случайные переменные, входящие в анализ. Эти переменные должны представлять собой репрезентативную выборку из генеральной совокупности. Концепция генеральной совокупности переменных аналогична концепции генеральной совокупности индивидуумов, в психометрии она выступает обычно в качестве логической модели.

По выборке переменных проводится факторный анализ. Результирующие факторы должны отражать важнейшие влияния и взаимодействия внутри исследуемой области. Для того чтобы формулируемая исследователем гипотеза в виде факторов больше отражала сущность изучаемого явления, должна быть правильно организована выборка переменных.

Отбор переменных играет ведущую роль в образовании гипотезы с помощью факторного анализа. Простой пример: если три раза измеряют одну и ту же переменную и результаты измерений включают в факторный анализ как три разные переменные, то получают один общий фактор, связывающий только эти три переменные. Этого не случилось бы, если переменная была бы использована только один раз. В факторном анализе наблюдаемые переменные рассматриваются как заданные и по этим переменным — и только по ним — выделяются факторы, по которым затем формулируется простая гипотеза. Если наблюдаемые переменные не представляют собой репрезентативную выборку из заранее ограниченной области исследования, то не следует ожидать, что метод выявит все действительные взаимосвязи внутри этой области. Метод лишь формально проанализирует взаимосвязи между наблюдаемыми переменными, и вывод не будет отражать действительное положение в исследуемой области.

С одной стороны, нельзя привести веских доказательств, почему факторный анализ переменных, представляющих собой репрезентативную выборку и равномерно распределенных по всей заранее определенной области исследования, все-таки может не выявить существенные гипотетические факторы внутри этой области. Но с другой стороны, на примерах можно показать, при каких условиях факторный анализ выявляет структуру между наблюдаемыми переменными, а при каких нет. Этот вопрос будет подробнее обсуждаться дальше на моделях.

До сих пор факторный анализ применялся к таким задачам, в которых отсутствовали сведения о структуре взаимосвязей между переменными. Поэтому не было возможности проверить методы. Однако если структура внутри определенной области известна заранее, то ее можно сравнить с результатами факторного анализа. На моделях можно проверить также разнообразные подходы к решению различных проблем.

Созданные модели играют в факторном анализе роль измерительного инструмента, с помощью которого проверяют возможности методов в различных ситуациях.

Повторим еще раз основную мысль. Факторный анализ проводится на материале с однозначной, простой и известной структурой и его результаты сравниваются с этой структурой. Другого способа проверки результатов факторного анализа и соответствия генерируемой гипотезы действительному материалу нет. Этот метод является вполне научным и в литературе можно найти много примеров его применения. Но систематически эта проблема нигде не излагалась. Для такой процедуры начинают использовать статистическое моделирование на ЭВМ.

Исследования на моделях облегчают понимание факторного анализа и с успехом применяются в качестве примеров для упражнений. Кроме того, модели пригодны для эмпирического сравнения различных вычислительных процедур выделения факторов и вращения. Хотя проверка на моделях не всегда может служить бесспорным аргументом, однако с помощью моделей можнс показать, что цель факторного анализа с помощью данного метода достигается, и выявить условия, при которых это достижение становится оптимальным. Если модель рассматривается как выборка из какой-то реальной совокупности, то можно выводы о точности применяемого метода распространить на всю генеральную совокупность с указанием псдельной ошибки.

7.1. ДВА ПРИМЕРА ИЗ ЛИТЕРАТУРЫ

7.1.1. Задача о ящиках (бокс-проблема Тэрстоуна)

Самым известным примером использования модели в факторном анализе является задача Тэрстоуна о ящиках [286; *6*) (*box-problem*). Она описана в его книге и в опубликованной ранее статье. Эта задача уже упоминалась при обсуждении проблемы вращения при поиске простой структуры в гл. 5.3. На рис. 7.1 представлена схема проверки результатов факторного анализа на модели. Тэрстоун исходил из гипотетической совокупности 20 прямоугольных параллелепипедов

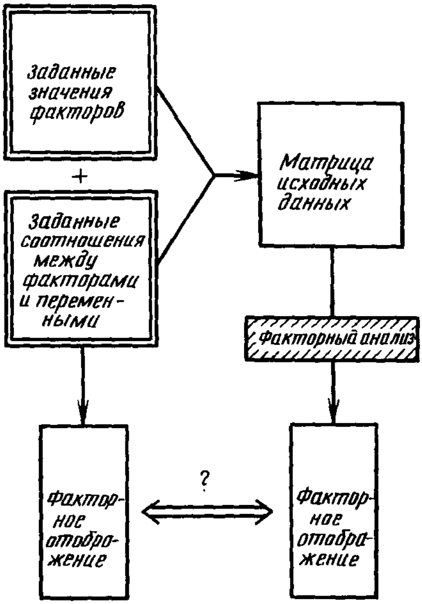


Рис. 7.1. Схема проверки результатов факторного анализа на модели (задача Тэрстоуна о ящиках). Заданные величины взяты в двойную рамку. Сравниваются между собой два факторных отображения, полученных двумя способами

(ящиков), задаваясь размерами их ребер. Прямоугольные параллелепипеды являются объектами эксперимента, длина их ребер — заданными значениями факторов. Кроме того, он задавался определенными соотношениями между длиной ребер и рядом переменных. Эти заданные соотношения определяют ожидаемое факторное отображение. На рис. 7.1 заданные величины обведены двойной рамкой.

Произвольно заданные величины однозначно устанавливают факторное отображение. По ним же можно построить матрицу исходных данных для проведения факторного анализа. Выполняя все необходимые процедуры, начиная с определения корреляционной матрицы, выделения факторов и вращения, приходят к финальному факторному отображению. Спрашивается, как этот результат согласуется с заранее известным факторным отображением. На схеме рис. 7.1 в том месте, где производится сравнение вычисленного факторного отображения с ожидаемым, стоит знак вопроса. Исходя из данных величин двумя различными путями приходят к двум результатам, которые должны соответствовать друг другу. Степень адекватности двух факторных отображений отражает пригодность данного метода анализа. Итак, на простой модели мы имеем возможность проверить, как точно при заданных соотношениях факторный анализ в состоянии выделить и определить те самые величины, по которым установлена матрица исходных данных.

Мы не имеем здесь возможности подробно излагать всю задачу. В табл. 7.1 представлены самые важные исходные данные и результаты решения. Факторы, которые соответствуют длине ребер прямоугольных параллелепипедов, обозначены через x, y и z. Заданные соотношения между этими факторами и 20 переменными указаны в левой части табл. 7.1. Например, переменной 1 является квадрат длины первого ребра, переменной 2 — квадрат длины второго ребра, переменной 3 — квадрат длины третьего ребра. Переменные 4, 5 и 6 являются площадями квадратов на сторонах параллелепипеда. Переменная 16 соответствует объему, а 17 — диагонали параллелепипеда. 20 переменных функционально связаны с величинами x, y, z; большинство из них геометрически интерпретируемо. Ожидаемое факторное отображение определяется этими функциональными зависимостями. Если фактор связан только с одной переменной, следует ожидать значительной нагрузки переменной на этот фактор. Если переменная является функцией от нескольких факторов, то лишь те факторные нагрузки отличны от нуля, которые связаны с этими факторами. Ожидаемое факторное отображение, приведенное в табл. 7.1, указывает, что все переменные определяются тремя величинами. Для простоты значительные факторные нагрузки отмечены крестиками, остальные нагрузки опущены.

Таблица 7.1

Задача Тэрстоуна

Переменная №	Заданные соотношения	Ожидаемое факторное отображение			Факторное отображение после вращения[a]			Центроидное решение[a] до поворота		
		x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	x^2	×			0,96			0,65	0,73	0,13
2	y^2		×			0,93		0,72	0,18	0,65
3	z^2			×			0,95	0,66	0,53	0,50
4	xy	×	×		0,47	0,72		0,86	0,20	0,44
5	xz	×		×	0,38		0,84	0,83	0,18	0,50
6	yz		×	×		0,39	0,79	0,83	0,51	0,15
7	$\sqrt{x^2+y^2}$	×	×		0,71	0,51		0,85	0,45	0,26
8	$\sqrt{x^2+z^2}$	×		×	0,85		0,38	0,84	0,42	0,32
9	$\sqrt{y^2+z^2}$		×	×		0,76	0,44	0,86	0,41	0,29
10	$2x+2y$	×	×		0,61	0,62		0,88	0,34	0,35
11	$2x+2z$	×		×	0,66		0,63	0,88	0,14	0,43
12	$2y+2z$		×	×		0,61	0,62	0,87	0,48	
13	$\log x$	×			0,95			0,66	0,72	0,10
14	$\log y$		×			0,92		0,71	0,24	0,61
15	$\log z$			×			0,93	0,63	0,50	0,52
16	xyz	×	×	×	0,28	0,36	0,70	0,93	0,25	0,16
17	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	×	×	×	0,64	0,46	0,27	0,96	0,23	
18	e^x	×			0,94			0,62	0,72	0,16
19	e^y		×			0,96		0,70	0,11	0,65
20	e^z			×			0,94	0,66	0,53	0,48

[a] Все $|a_{jl}| < 0{,}10$ опущены.

× означает высокую факторную нагрузку.

По факторному отображению можно судить, как взаимосвязаны эти три величины с переменными.

В правой части табл. 7.1 приведены два факторных решения, полученных по корреляционной матрице. Значения вычисленных нагрузок так же, как у Тэрстоуна, указаны до второго десятичного знака. Нагрузки $|a_{il}| < 0,10$ опущены. По таблице видно, что факторная матрица после поворота хорошо согласуется с ожидаемым факторным отображением. Там, где в ожидаемом факторном отображении стоят крестики, соответствующие коэффициенты в факторном решении, полученном после вращения, значительны по величине. Степень совпадения результата процедуры вращения, осуществленного вслепую при поиске структуры, с действительной структурой, заложенной в модели, поразительна. Здесь следует указать на то, что повторный анализ тех же самых исходных данных приводит к тому же факторному решению. На это уже указывалось в гл. 5.3 при обсуждении задачи Тэрстоуна. Приведенное там факторное отображение (см. табл. 5.8) полностью совпадает с результатами, полученными Тэрстоуном. Изменен только порядок факторов.

Центроидное решение не согласуется с заданной структурой, хотя число выделенных факторов совпадает с заданным (среднее значение остаточных коэффициентов корреляции после выделения трех факторов у Тэрстоуна равно 0,008). Набор факторных нагрузок, полученных центроидным методом, не отражает тех величин, которые стоят за переменными. Центроидные факторы не удовлетворяют критерию Баргмана, и их нельзя проинтерпретировать.

Тэрстоун с помощью факторного анализа произвольно установленных им исходных данных вслепую пришел к структуре, скрытой за этими данными. Правда, совпадение с заданной структурой было достигнуто за счет процедуры вращения выделенных факторов. В этой модели не учитываются погрешности измерения и ошибка выборки. При практических исследованиях оба вида погрешностей присутствуют и мешают выявлению четкой структуры. Кроме того, модель сконструирована так, что каждый фактор получает значительные нагрузки от большинства переменных, а остальные переменные совсем не нагружают его. Таким образом, в основу модели положена однозначная простая структура. Действительные данные с такой четкой структурой встречаются редко.

7.1.2. Задача о мячах Каттелла и Дикмана

Каттелл и Дикман в 1962 г. опубликовали работу «A dynamic model of physical influences demonstrating the necessity of oblique simple structure». Так как в ней шла речь об эксперименте с мячами, в дальнейшем задача получила короткое название «*ball-problem*». При создании модели они исходили из того, что

1) должны учитываться физические величины;

2) должна быть введена погрешность измерения;

3) факторы не должны искусственно приводиться к ортогональному виду;

4) ожидаемая структура должна быть точно известна заранее.

Целью работы было разрешить спор между сторонниками ортогонального и косоугольного вращения. С этой целью из 150 мячей различных размеров и видов было отобрано 80 штук. Размер, вес и упругость мячей рассматривались как факторы. При этом особое внимание обращалось на то, чтобы эти факторы (величины) имели приблизительно нормальное распределение. Для этого некоторые из отобранных мячей были заменены деревянными шарами. Четвертый фактор был образован следующим образом. Нить была разрезана на 80 частей. Длина каждого отрезка составляла от 10 до 60 дюймов. Но отрезки были подобраны так, что этот признак (длина) имел нормальное распределение. Затем нити были случайным образом распределены между 80 мячами так, что не могло быть речи ни о какой корреляции между признаками (характеристиками) мячей и длиной нитей. Фактор «длина нити» ортогонален к другим величинам. На этих нитях мячи были подвешены наподобие маятников. Объекты наблюдения, составленные из мяча и нити, соответствуют в принятой нами ранее терминологии индивидуумам с набором переменных. Область, подлежащая исследованию, была ограничена четырьмя свойствами наблюдаемых объектов: размером мячей, их весом, упругостью (высотой отскока от твердой поверхности) и длиной нити, на которой закреплен мяч. Для этой области исследования были сконструированы переменные, по возможности в одинаковой степени отражающие свойства объектов. Укажем некоторые из этих переменных.

Переменная 5: число оборотов мяча при скатывании по наклонной плоскости длиной в четыре фута.

Переменная 7: диаметр тени мяча на стене, когда мяч находится посередине между стеной и источником света.

Переменная 11: расстояние, на которое отодвигается спичечная коробка от основания наклонной плоскости под ударом мяча, скатившегося по этой плоскости.

Переменная 15: число подскоков мяча на высоту более $^1/_4$ дюйма при падении его с высоты 36 дюймов на твердую поверхность.

Переменная 24: число колебаний (в течение 15 секунд) мяча, раскачивающегося на нити.

Кроме того, для каждого из факторов, намеченных к исследованию, подбирается маркировочная переменная (*marker variable*). Это такая переменная, про которую известно, что она значительно нагружает определенный фактор, или маркирует его. Переменные такого типа включаются в анализ, чтобы ранее полученные результаты учесть в новом исследовании. В данном случае в качестве маркировочных переменных выступали размер, вес, упругость мячей и длина нити. Факторный анализ, и особенно вращение, производились вслепую, т. е. без знания маркировочных переменных.

Диапазон изменения переменных значителен. Эксперимент был проведен два раза. Коэффициент надежности оказался значительно больше 0,90. По корреляционной матрице, вычисленной для 32 переменных, определили ее собственные значения. Так как четыре собственных значения оказались больше единицы, то ограничились выделением четырех факторов (см. критерий на с. 136). Путем итеративной процедуры были найдены оценки общности для четырех факторов.

После десятого цикла итерации значения общностей практически не изменялись. К редуцированной матрице с оценками общностей был применен центроидный метод. Исследователи хотели проверить этот метод выделения факторов. Использование метода главных факторов дало бы более точные результаты.

Ожидаемое факторное отображение V_e для 32 переменных можно оценить более или менее точно. Оно представлено в левой части рис. 7.2. Первые четыре переменные являются маркировочными. Затем следует ряд переменных, которые связаны только с первым фактором и значительно его нагружают. Затем идут переменные, связанные только со вторым фактором, с третьим и с четвертым. Наконец, имеется еще несколько переменных, дающих нагрузки на два или три фактора.

	Ожидаемое факторное отображение				Варимакс-решение				Косоугольная простая структура			
	S	W	E	L	S	W	E	L	S	W	E	L
1	×				0,94	0,30			1,04			
2		×				0,86				1,02		
3			×				0,91			0,29	0,88	
4				×				1,00				1,00
5	—×				—0,84	—0,35			—0,84			
6	×				0,94	0,28			1,08			
7	×				0,93	0,31			1,01			
8	—×				—0,84	—0,34			—0,87			
9	×				0,85	0,27			0,92			
10		×			0,45	0,85				1,02		
11		×				0,87			0,50	1,22		
12		×			0,55	0,75				0,83		
13		×			0,55	0,83				0,94		
14		—×			—0,49	—0,85				—1,01		
15			×				0,79				0,78	
16			×				0,91			0,29	0,87	
17			×		0,60	—0,47	0,57		—0,54	—0,31	0,64	
18			×				0,92				0,93	
19			×				0,87			0,28	0,91	
20				×				0,99				0,99
21				×				0,98				0,98
22				×				1,00				1,00
23				—×				—1,00				—1,01
24				—×				—0,94				—0,95
25		×	×		0,37	0,35	0,55			0,39	0,56	
26		×	×		0,27		0,88				0,86	
27	×	×			0,77	0,55			0,59	0,41		
28	×	×	×		0,64		0,64		0,59		0,57	
29			×	×			0,83				0,85	
30	—×			×	—0,64	—0,27		0,62	—0,60			0,59
31	×			—×	0,73			—0,46	0,82			—0,43
32		×	×	×	0,52	0,75		0,29		0,84		0,31
	V_e								V_{fp}			

Нагрузки ниже 0,25 опущены

Рис. 7.2. Задача о мячах (Ball-проблема Каттелла и Дикмана). Объяснение дано в тексте. S — величина; W — вес; E — упругость; L — длина

Выделенные факторы, не подвергнутые вращению, как в задаче с ящиками, не могут быть содержательно проинтерпретированы. Нагрузки многих переменных на факторы не соответствовали ожидаемым. При этом не совпали бы центроидное решение и решение, полученное методом главных факторов. Для получения содержательно интерпретируемых факторов необходима процедура вращения.

Варимакс-решение представлено в середине рис. 7.2. Ортогональное приближение к простой структуре дает хорошие результаты тогда, когда факторы приблизительно ортогональны. В данном эксперименте четвертый фактор, длина нити, ортогонален ко всем остальным, так как он был сформирован путем случайного распределения отрезков нити по мячам. Из рис. 7.2 видно, что нагрузки четвертого фактора почти точно совпадают с ожидаемыми. Нагрузки трех других факторов варимакс-решения плохо согласуются с ожидаемыми. Это неудивительно, так как коэффициент корреляции между размером и весом близок 0,70, и эта корреляция варимакс-критерием никак не учитывается.

Результат косоугольного вращения, полученный авторами задачи, представлен в правой части рис. 7.2. Решение было достигнуто с помощью бинормамин-критерия и Rotoplot-программы. Рекомендуемая в 5.5.1 процедура применения к варимакс-решению графического вращения по Rotoplot-программе приводит к тому же результату, в чем можно убедиться на примере, приведенном в гл. 5.6. Все связанные с этим примером расчеты были выполнены независимо от Каттелла и Дикмана.

Для выполнения расчетов вслепую автор изменил нумерацию переменных. Лишь после достижения простой структуры были восстановлены их первоначальные обозначения. Сравнивая результаты, приведенные на рис. 7.2, с табл. 5.15, можно убедиться, что оба решения согласуются между собой. Матрица V_{rs} почти соответствует ожидаемому факторному отображению. Существующие расхождения не имеют большого значения по сравнению с общей тенденцией результата решения и могут быть отнесены к ошибке в оценке ожидаемого факторного отображения. Для оценки значимости простой структуры, полученной в результате применения различных методов, составлена табл. 7.2. При этом учитывались только те переменные, для которых $|a_{il}/h_i| < 0{,}10$.

Таблица 7.2

Подсчет числа нулевых нагрузок в задаче о мячах

Фактор	Размер S	Вес W	Упругость E	Длина L
Центроидный метод	0	1	1	3
Варимакс-вращение	9	8	10	21
Графическое косоугольное вращение	18	19	21	21

По критерию Баргмана на 5%-ном уровне значимости внутри зоны $\pm 0{,}10$ вокруг гиперплоскостей координат при данном числе переменных и факторов следует ожидать не менее 11 нулевых нагрузок.

На уровне значимости 1% считается, что фактор достаточно определен переменными при числе нулевых нагрузок больше 11. Ни один центроидный фактор не удовлетворяет этому условию. Следовательно, оси координат в центроидном решении расположены относительно векторов-переменных чисто случайно. В варимакс-решении значимым является лишь один фактор, а именно длина нити. Этот фактор ортогонален по отношению к другим факторам. В результате косоугольного вращения достигнуто такое положение системы координат, что все четыре фактора на 1%-ном уровне значимости достаточно однозначно определяются своими переменными.

Каттелл и Дикман на этой задаче показали, что выделенные факторы могут оказаться физическими величинами, определяющими поведение наблюдаемых переменных. Путем косоугольного вращения было найдено положение осей координат, удовлетворяющее критерию Баргмана. Повернутые факторы оказались содержательно интерпретируемыми и достаточно точно согласующимися с ожидаемым отображением. При ортогональном вращении оказался значимым только один фактор, а именно тот, который был заранее сформирован как ортогональный. Косоугольные факторы, которые как раз чаще всего встречаются в действительности, к сожалению, не могут быть достаточно точно определены с помощью варимакс-критерия. Этот пример демонстрирует необходимость выявления косоугольных факторов, если исследователь стремится обнаружить влияния, лежащие в основе наблюдаемых переменных.

7.2. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ

Оба вышеприведенных примера из литературы дали возможность сделать ценные выводы. Но их нельзя обобщить и доказать. Они полезны для приобретения опыта при осуществлении вращения и широко используются в учебных целях. Имеется ряд других моделей, которые заслуживают внимания, и поэтому должны быть упомянуты здесь. К ним относится так называемая «задача о бутылках» (*bottle-problem*) Барта [27; *8*], связанная с идентификацией факторов в различных экспериментах. Другим примером является модель с трапециями (*Trapezmodell*) Тэрстоуна [286; *1*, *6*], с помощью которой объясняется выделение факторов второго порядка. Каттелл и Салливэн занимались решением задачи под названием «проблема чашек с кофе» (*kaffeetassen-problem*). В этой задаче моделировались переменные со всеми погрешностями, которые возникают при исследовании поведения человека.

Каттелл и Горсач, основываясь на принципах построения модели с мячами, занимались поиском простой структуры с «органическими» данными и набором случайных чисел. Кроме того, известен ряд задач, которые не являются искусственно сконструированными моделями, а основаны на действительных данных. Но решения этих задач с помощью факторного анализа хорошо согласуются с результатами исследований, выполненных другими методами. В этом плане представляют интерес работы Джонса по хроматопсии. Далее приведены две задачи, которые имеют большое методическое значение.

7.2.1. Модель, сконструированная по результатам измерения кровяного давления

Описываемая далее модель позволяет подтвердить выводы, сделанные при обсуждении задач о ящиках и мячах. Модель дает возможность уяснить, что произойдет, если в анализ включают повторные измерения переменных. Модель показывает, при каких условиях и как точно может быть определена корреляция между факторами. На примере небольшой ошибки, вкравшейся в исходные данные и выявленной в ходе анализа, показывается, какое влияние оказывают ошибки на результат факторного анализа.

У 90 американских студентов мужского пола в течение 30 мин 12 раз измерялось систолическое и диастолическое кровяное давлеиие. В распоряжении экспериментатора в итоге имеются 24 переменные, вариация которых в основном определяется двумя влияющими величинами, а именно систолическим и диастолическим кровяным давлением. Оба фактора должны быть выявлены в результате анализа. Ожидаемое факторное отображение представлено в табл. 7.3. Переменные поочередно нагружают то первый, то второй фактор.

Корреляционная матрица для первых 12 переменных была представлена в табл. 3.14. Результаты различных оценок общностей были приведены в табл. 4.1. Процедура вращения 12 переменных обсуждалась в гл. 5.3 и 5.5. Распределение остаточных коэффициентов корреляции между 24 переменными было приведено в табл. 3.25 и изображено на рис. 3.14. Мы отказываемся от воспроизведения всей корреляционной матрицы из-за отсутствия места. В качестве оценок общностей были выбраны КМК. В табл. 7.3 представлены три решения, полученные в процессе факторного анализа, а именно: система главных факторов, варимакс-решение и косоугольная простая структура, достигнутая графическим вращением. Путем сравнения можно убедиться, что главные факторы не согласуются с ожидаемым факторным отображением. Варимакс-вращение также не позволило четко разделить оба фактора, как это было достигнуто при косоугольном вращении на основе Rotoplot-программы. Проверка значимости факторов варимакс-решения не дала положительных результатов. Хотя точки-переменные расположены на плоскости в виде двух плотных скоплений и четко разделены между собой, они не ортогональны друг другу. В косоугольном решении оба фактора являются значимыми по критерию Баргмана. Каждый фактор определяется двенадцатью переменными, для которых соблюдается условие $|a_{il}/h_i| < 0{,}10$. На рис. 7.3—7.5 представлены результаты всех трех решений. При анализе главных факторов первый фактор не позволяет отделить систолические переменные от диастолических. Второй фактор биполярен. В варимакс-решении оба скопления точек находятся вблизи осей координат, но при сохранении ортогональности осей нельзя добиться, чтобы переменные четко определяли оба фактора. Лишь косоугольное вращение приводит к желаемому результату.

В данном примере было достигнуто согласие с ожидаемым факторным отображением, несмотря на то что вся процедура вычислений, на-

Таблица 7.3

Модель, построенная на данных измерения кровяного давления

		Ожидаемое факторное отображение		Решение, полученное методом главных факторов		Варимакс-решение		Визуальное[a] косоугольное решение V_{rs}	
		Систолическое давление	Диастолическое давление	I	II	I	II	I	II
1	*s*	×		0,82	0,48	0,93	0,23	0,84	
2	*d*		×	0,79	—0,47	0,24	0,89		0,79
3	*s*	×		0,80	0,46	0,89	0,23	0,80	
4	*d*		×	0,78	—0,52	0,20	0,92		0,83
5	*s*	×		0,82	0,43	0,89	0,27	0,79	
6	*d*		×	0,91	—0,51	0,23	0,93		0,83
7	*s*	×		0,86	0,43	0,92	0,29	0,82	
8	*d*		×	0,82	—0,47	0,26	0,92		0,82
9	*s*	×		0,88	0,42	0,93	0,31	0,83	
10	*d*		×	0,86	—0,44	0,31	0,92		0,80
11	*s*	×		0,85	0,48	0,94	0,25	0,85	
12	*d*		×	0,85	—0,45	0,29	0,91		0,80
13	*s*	×		0,86	0,46	0,93	0,27	0,84	
14	*d*		×	0,86	—0,45	0,30	0,92		0,81
15	*s*	×		0,86	0,46	0,94	0,27	0,84	
16	*d*		×	0,84	—0,45	0,29	0,91		0,80
17	*s*	×		0,86	0,46	0,94	0,28	0,84	
18	*d*		×	0,83	—0,47	0,27	0,92		0,81
19	*s*	×		0,86	0,44	0,92	0,29	0,82	
20	*d*		×	0,82	—0,48	0,25	0,91		0,80
21	*s*	×		0,86	0,47	0,94	0,26	0,85	
22	*d*		×	0,86	—0,43	0,31	0,91		0,79
23	*s*	×		0,85	0,47	0,94	0,25	0,85	
24	*d*		×	0,83	—0,46	0,27	0,92		0,81

s — результат нзмерения систолического кровяного давления.
d — результат измерения диастолического кровяного давления.
× — ожидаемая высокая нагрузка.
[a] — значення, меньшие |0,09|, опущены.

чиная с корреляционной матрицы до косоугольного вращения, выполнялась вслепую. Знание заданной структуры не оказывало влияния на результат. Факторный анализ позволил разделить 24 переменные по двум факторам. Каждый из этих факторов нагружается либо только «систолическими», либо только «диастолическими» переменными. Этот пример примечателен тем, что в нем выявилась особенно четкая структура.

Коэффициент корреляции между обоими факторами равен 0,49. Для сравнения было проверено наличие корреляции между результатами измерения систолического и диастолического давления крови. С этой целью вычислили сначала средние значения систолического и диастолического кровяного давления для каждого индивидуума и по полученным значениям для всей выборки индивидуумов вычислили коэффициент корреляции. Он оказался равным 0,53, что достаточно точно согласуется с корреляцией между факторами. Применение облимакс-вращения приводит практически к тому же самому факторному отображению, что и Rotoplot-программа с 12 переменными. В облимакс-решении коэффициент корреляции между факторами оказался равным 0,54. В 5.5.2 уже указывалось, что метод облимакс имеет тенденцию к завышению коэффициентов корреляции между факторами по сравнению с действительными их значениями.

При одном из предварительных исследований измерений кровяного давления методом главных факторов было получено решение, изображенное на рис. 7.6. По сравнению с рис. 7.3 переменные 4, 5, 6 и 18 имеют значительно меньшую общность, о чем можно судить по расстоянию до нулевой точки. Кроме того, они расположены немного в стороне от обеих групп точек. Никакого серьезного объяснения отличия этих переменных от остальных не было найдено. Не представляется возможным объяснить также это отклонение за счет случайной вариации.

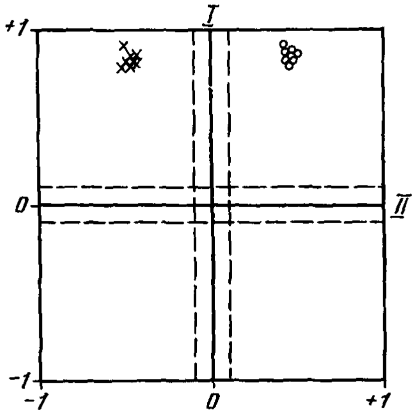


Рис. 7.3. Решение методом главных факторов. Кружочками обозначены результаты измерений систолического кровяного давления, крестиками — диастолического

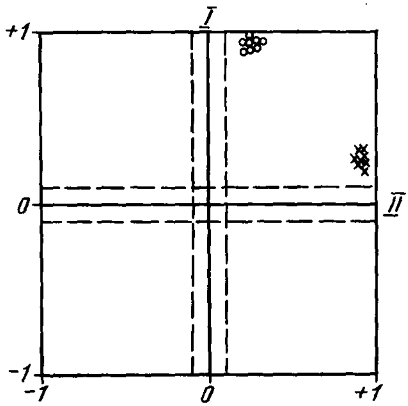


Рис. 7.4. Варимакс-вращение. Кружочками обозначены результаты измерений систолического кровяного давления, крестиками — диастолического

После проверки данных выяснилось, что в результате измерений, представляющих переменные 4, 6 и 18, была допущена грубая ошибка — промах. У одного студента неправильно измерили давление, в результате чего были получены заниженные значения переменных 4 и 6. Поэтому эти переменные сильнее коррелируют друг с другом, чем с остальными. После выделения двух факторов остаточная корреляция была вызвана только этими переменными. Значение КМК, используемое в качестве оценки общности, было занижено в связи с этой ошибкой. Все это дает основание предположить, что переменные 4 и 6 связаны с третьей величиной, а именно с одним общим фактором. Этим общим фактором является, как выяснилось, допущенная ошибка в измерениях. Значение переменной 18 также связано с ошибкой измерения давления, но уже у другого студента. Вот почему эта переменная слабо коррелирует с другими переменными и оценка общности для нее получилась заниженной. После исключения указанных ошибок получено факторное решение, изображенное на рис. 7.3.

Отсюда ясно, что исходные данные нужно подвергать проверке, чтобы не допустить ошибок любого вида. Погрешность, допущенная при измерении одной переменной, приводит к уменьшению ее общности. Если ошибка была допущена при измерении нескольких переменных на одном и том же индивидууме, то это приводит к появлению специфичного фактора. В данном примере ожидаемая структура была известна, так что ошибку было легко обнаружить. Но при неизвестной структуре пришлось бы интерпретировать решение, полученное по недоброкачественным исходным данным, в результате чего можно прийти к ложному выводу. Факторным решениям присущ и другой вид по-

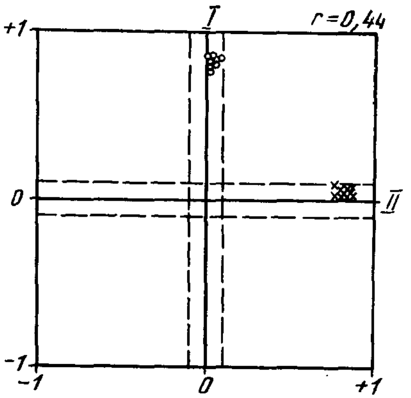


Рис. 7.5. Косоугольное вращение. Кружочками обозначены результаты измерений систолического кровяного давления, крестиками — диастолического

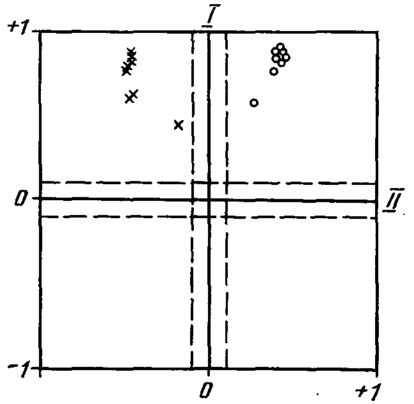


Рис. 7.6. Решение методом главных факторов по данным, содержащим ошибки измерений. Кружочками обозначены результаты измерений систолического кровяного давления, крестиками — диастолического

грешности — случайный, который носит вероятностный характер. Нужно прилагать усилия к тому, чтобы уменьшать и случайную погрешность в измерениях с целью сделать выявляемую структуру более однозначной и четкой.

7.2.2. Модель с числом жителей

Уже неоднократно упоминалось, что решение, полученное методами факторного анализа, не только может послужить основой при формулировании некоторой научной гипотезы, но также может быть использовано при оценке этой гипотетической величины для каждого отдельного индивидуума. В разделе 6 были разобраны методы определения значений факторов. Возникает вопрос: какова связь между оценкой неизмеренных величин и оценкой величин, полученных с помощью регрессионного анализа?

С самого начала должно быть ясно, что оценка величин, которые никогда не были измерены и которые были выявлены только с помощью факторного анализа, не может быть точно такой же, как если бы величины определялись с помощью метода регрессионного анализа на основе выборочных наблюдений. Следует помнить, что при оценке значений фактора также применялся метод множественной регрессии (см. с. 244). Но в первом случае целевая функция измеряется непосредственно, во втором же случае она является гипотетической величиной, определяемой с помощью факторного анализа.

По сводным ведомостям органов статистики земли Рейнланд-Пфальц (ФРГ) за 1960—1961 гг. в административном округе г. Кобленца были отобраны первые 200 населенных пунктов с числом жителей меньше 3000. Кроме общего числа жителей для этих пунктов известен целый ряд других переменных, которые тесно связаны с первой переменной. В качестве переменных были выбраны такие величины, которые составляют как можно меньшую долю от наличного населения (от 4,7 до 22,6%). Для каждого населенного пункта в анализ кроме числа жителей были включены число переселенцев, число жителей моложе 16 лет, число служащих, число женщин, имеющих самостоятельный заработок, и число лиц, занятых в сфере бытового обслуживания. В этом примере каждый населенный пункт соответствует индивидууму в наших предыдущих рассуждениях.

Таблица 7.4

Данные к примеру с числом жителей

	1	2	3	4	5	Фактор I
1. Переселенцы	1,000	−0,008	−0,047	+0,003	−0,005	0,888
2. Жители моложе 16 лет	0,832	1,000	+0,037	−0,005	−0,052	0,946
3. Служащие	0,755	0,932	1,000	−0,080	−0,063	0,904
4. Женщины, имеющие самостоятельный заработок	0,848	0,849	0,779	1,000	+0,060	0,952
5. Лица, занятые в сфере бытового обслуживания	0,844	0,853	0,801	0,969	1,000	0,956
6. Наличное население	0,828	0,967	0,964	0,835	0,856	

В табл. 7.4 приведены нижний треугольник корреляционной матрицы для пяти переменных и верхний треугольник матрицы остатков после выделения первого фактора. Целевая функция — наличное население — с соответствующими коэффициентами корреляции выделены в строку 6.

Применяя классический метод множественной регрессии, вычислим линейное уравнение регрессии, связывающее пять «независимых» переменных с зависимой переменной «наличное население». По уравнению регрессии можно оценить число жителей, исходя из значений независимых переменных. Коэффициент корреляции между этими оценками и действительным числом жителей довольно высокий, а именно $r_{y\hat{y}} = 0{,}98$. Следовательно, точность оценки очень высокая. В левой части рис. 7.7 изображена корреляционная диаграмма для действительного числа жителей в населенных пунктах и полученных оценок.

С другой стороны, может быть неизвестно наличное население, но могут быть измерены пять других переменных; тогда по корреляционной матрице проводится факторный анализ, причем в качестве оценок общностей берутся наибольшие значения элементов каждого столбца матрицы **R**. Верхний треугольник матрицы остатков после выделения первого фактора приведен в табл. 7.4. Совершенно очевидно,

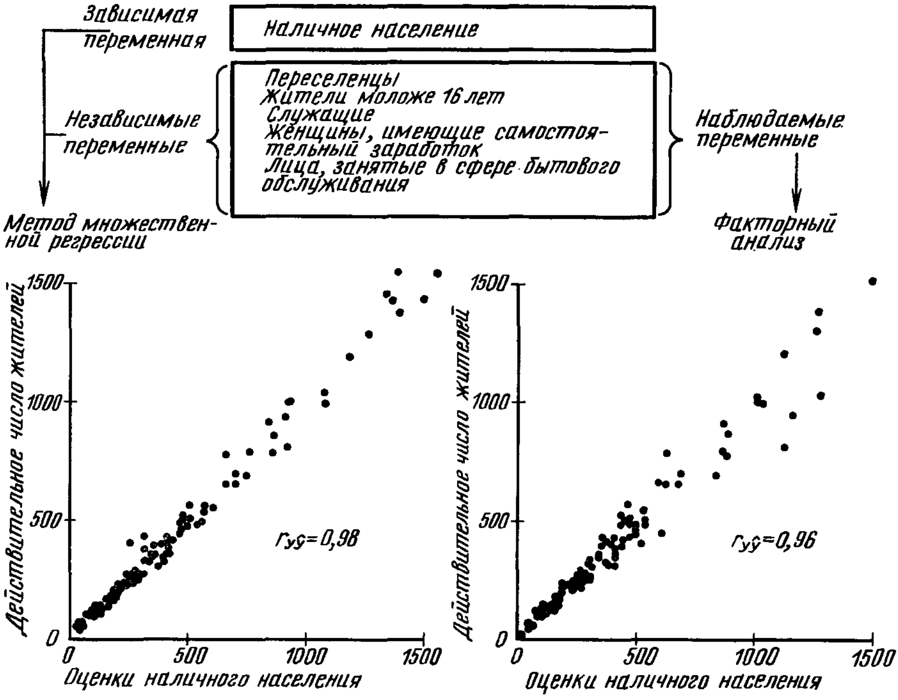


Рис. 7.7. Сравнение точности оценок, полученных с помощью метода множественной регрессии и факторного анализа

что выделять второй фактор не имеет смысла. Оценка значений фактора была произведена методом, описанным в гл. 6.2. Фактор представляет собой величину, связанную со всеми наблюдаемыми переменными данной матрицы. Коэффициент корреляции между оценками значений фактора и действительным числом жителей равен $r_{\hat{y}y} = 0{,}96$. В правой части рис. 7.7 изображена диаграмма рассеяния, соответствующая этой зависимости.

Итак, в этой задаче можно без привлечения целевой функции с помощью факторного анализа получить оценку числа наличного населения, почти такую же хорошую, как оценка по уравнению регрессии, для вычисления которой отдельные значения целевой функции должны быть известны. В качестве критерия точности оценки применяют коэффициент множественной детерминации. При оценивании методом множественной регрессии он равен 0,96, а при оценивании методом факторного анализа — 0,92. В данном примере можно произвести оценку интересующего нас признака без измерения зависимой переменной, практически точно такую же, как при применении оптимального оценивания классическим методом регрессионного анализа. При этом преимущество заключается в том, что вообще не нужно измерять зависимую переменную.

Следует указать на то, что коэффициент корреляции не может превышать единицы. Поэтому показатели точности оценок будут все группироваться в конце r-шкалы. При использовании z-преобразования Фишера можно убедиться, что между коэффициентами корреляции $r = 0{,}98$ и $r = 0{,}96$ существует такое же различие, как и между коэффициентами $r = 0{,}60$ и $r = 0{,}78$ или между $r = 0{,}20$ и $r = 0{,}50$. Кроме того, нужно обратить внимание на очень тесную связь между переменными в данном примере, что приводит к хорошим оценкам. Данный пример не позволяет сделать вывода о том, каковы будут значения коэффициентов множественной регрессии при применении обоих методов оценивания, если корреляция между переменными будет слабее.

Данный пример показывает принципиальную возможность оценивания неизмеряемых величин с помощью факторного анализа. При этом точность оценок получается не намного ниже, чем это происходит при определении оценок по уравнению регрессии и когда к тому же для составления этого уравнения нужно измерять величину, подлежащую оцениванию. Конечно, если бы данная задача встретилась нам на практике, то мы не применили бы факторный анализ, так как целевая функция нам известна. Но именно знание значений целевой функции позволило нам провести сравнение точности оценок при двух подходах к решению задачи. При практическом исследовании была бы лишь известна матрица коэффициентов корреляции между наблюдаемыми переменными. Оверолл и Вильямс применили описанную процедуру для оценки функционального состояния щитовидной железы, определив содержание тироксина в крови, которое клиническим путем нельзя установить. При этом они использовали ряд измеряемых величин, про которые известно, что они коррелируют с содержанием этого гормона в крови, вырабатываемого щитовидной железой. Подобная процедура могла бы оказаться полезной во многих медицинских и биологических исследованиях.

7.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ

Основной недостаток всех известных моделей заключается в том, что результаты, полученные по ним, не могут быть обобщены. Кроме того, несовершенен критерий качества полученных результатов и он не использует всю имеющуюся информацию. Описываемое далее моделирование на ЭВМ, или метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), отличается от всех исследований на моделях. Это отличие состоит в следующем:

1) в определенных границах выводы, полученные этим методом, могут быть обобщены, так как моделируется отбор выборок из определенной генеральной совокупности;

2) применяется очень точный и стабильный критерий качества результатов факторного анализа.

7.3.1. Моделирование с одинаковыми факторными нагрузками

ЭВМ вырабатывает матрицу исходных данных[1]. Эти исходные данные следует рассматривать как выборку из генеральной совокупности с заданной структурой переменных. Каждый раз в выборку попадает несколько переменных. Для генеральной совокупности устанавливаются число факторов и корреляция между переменными и факторами. Для выборки известны коэффициенты корреляции между переменными и факторами и действительные значения факторов. По матрице исходных данных проводится факторный анализ и оценки значений факторов сравниваются с действительными значениями факторов. Эта процедура повторяется для нескольких выборок при одних и тех же условиях в генеральной совокупности. Структуру генеральной совокупности можно изменять, и для каждого нового условия отбирается новый ряд выборок. На рис. 7.8 изображена схема этой процедуры для одного цикла вычислений.

Отдельные векторы и матрицы изображены в виде прямоугольников. Пусть шесть переменных коррелируют с первым фактором, а четыре переменные — со вторым фактором. Вначале генерируется вектор-столбец $\mathbf{p}_1$ из n нормально распределенных случайных чисел со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Элементы этого вектора представляют собой значения первого фактора у n индивидуумов. При генерировании второго такого вектора случайных чисел получаем вектор $\mathbf{y}_1$, практически всегда ортогональный к $\mathbf{p}_1$. Чтобы установить между ними нужную корреляцию векторы вращают относительно друг друга, т. е. умножают $(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{p}_1)$ на матрицу преобразования $\mathbf{T}$ справа.

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

где ρ — требуемый коэффициент корреляции. После преобразования $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{p}_1$ проверяют наличие корреляции между ними. Если вычисленный фактический коэффициент корреляции между $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{p}_1$, обозначаемый через r_1, не совпадает точно с ρ, это указывает на то, что векторы $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{p}_1$ перед преобразованием не были строго ортогональны друг другу. Фактические значения коэффициентов корреляции будут случайно колебаться вокруг требуемого. Оба преобразованных вектора $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{p}_1$ следует понимать как две выборки из одной генеральной совокупности, в которой реализована требуемая корреляция между переменными.

---

[1] Этот параграф написан по результатам работы, выполненной автором [293; *3*, *4*, *5*]. Все вычисления были произведены в вычислительном центре Дармштадта (ФРГ).

Та же самая процедура повторяется с тем же самым вектором p_1, но с другими y_2 и ρ. Таким образом получают шесть переменных y_1—y_6, которые коррелируют с фактором p_1. Выбранным произвольно коэффициентам корреляции в генеральной совокупности соответствуют фактические значения в выборках (r_1—r_6). Аналогично, исходя из нового вектора p_2, элементы которого являются значениями второго фактора, получают четыре другие переменные y_6—y_{10}, коррелирующие со вторым фактором и независимые от первого. Все эти переменные со-

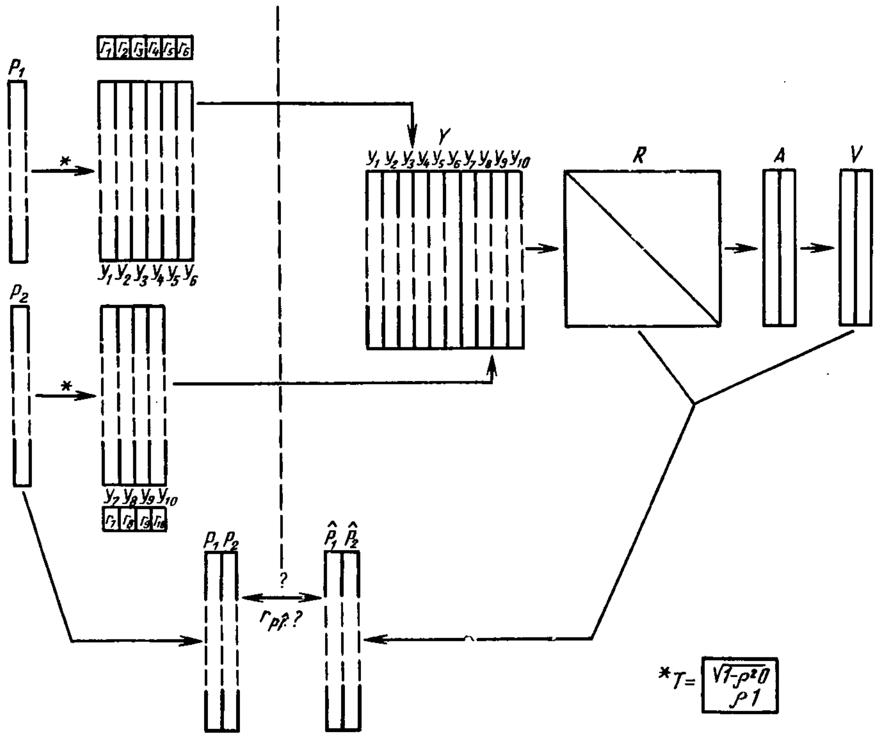


Рис. 7.8. Схема моделирования процедур факторного анализа на ЭВМ

ставляют матрицу исходных данных **Y** (см. рис. 7.8). Способ образования матрицы гарантирует следующее: 1) матрица исходных данных зависит от двух факторов, значения которых известны; 2) первые m_1 переменных коррелируют с первым фактором, а другие m_2 переменных — со вторым; 3) требуемые коэффициенты корреляции между переменными и факторами выбираются для генеральной совокупности и им соответствуют фактические значения для каждой выборки; 4) факторы практически ортогональны и не перекрываются.

По матрице исходных данных **Y** определяется корреляционная матрица **R**. В качестве оценок общностей используются наибольшие коэффициенты корреляции каждого столбца. С помощью метода главных факторов выделяются два фактора. После варимакс-вращения находятся оценки значений факторов для отдельных индивидуумов. Теперь мы подошли вплотную к вопросу о том, насколько точно согласуются между собой полученные оценки значений факторов с действительными их значениями. Этот вопрос отражен в соответствующем месте на рис. 7.8. В качестве критерия применяется коэффициент корреляции $r_{p\hat{p}}$ между действительными значениями фактора p и их оценками $\hat{p}$. Коэффициент корреляции $r_{p\hat{p}}$ является количественным критерием, оценивающим весь процесс факторного анализа. Он измеряет качество оценок значений фактора и может быть меньше коэффициента множественной корреляции, вычисленного по результатам регрессионного анализа.

Обычно факторный анализ проводится без каких-либо сведений о структуре исходных данных. В данном случае заранее знают значения факторов и имеют возможность в широких пределах изменять соотношения между переменными и факторами. Результаты факторного анализа затем сравниваются с действительными величинами, которые были положены в основу анализа. Вертикальная пунктирная линия, проходящая через середину рис. 7.8, делит схему на две части, одна из которых (правая) соответствует проведению факторного анализа при практических исследованиях. Левая часть добавляется при моделировании и позволяет произвести оценку точности значений фактора при различных условиях.

Для лучшего понимания моделирования на ЭВМ приведем числовой пример для одного цикла. В этом примере каждый из двух факторов коррелирует с пятью переменными. Требуемые коэффициенты корреляции для генеральной совокупности представлены в левой части табл. 7.5. Устанавливая коэффициент корреляции между каждым фактором и соответствующей переменной $\pm 0{,}70$, добиваются сильной взаимосвязи между ними. Полученное факторное отображение для выборки в 200 индивидуумов также представлено в табл. 7.5. Сравнение показывает, что фактически получившиеся коэффициенты корреляции варьируют вокруг требуемых, установленных в генеральной совокупности. (Например, для первой переменной $\rho = +0{,}70$. После преобразования коэффициент корреляции между $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{p}_1$ стал равен $r_1 = 0{,}74$.) В модели не устанавливается корреляция между первыми пятью переменными и вторым фактором, эта корреляция может проявиться чисто случайно (в таблице в соответствующих местах проставлены черточки). Среднее значение абсолютных величин коэффициентов корреляции первых пяти переменных с первым фактором, обозначенное через r_{m1}, является показателем тесноты связи между переменными и первым фактором. Аналогичный показатель тесноты связи между другими пятью переменными и вторым фактором — r_{m2}.

После образования переменных с указанными в табл. 7.5 соотношениями определяется корреляционная матрица. Она приведена в табл. 7.6. Как и следовало ожидать, существует сильная корреляция только внутри групп переменных 1—5 и 6—10, а между переменными этих групп корреляция несущественна. В качестве показателя тесноты связи между переменными используется среднее значение

Таблица 7.5

Числовой пример

Переменные	Факторное отображение в генеральной совокупности		Факторное отображение в выборке		Решение методом главных факторов		Варимакс-решение			Коэффициенты регрессии	
	фактор		фактор		фактор		фактор			фактор	
	1	2	1	2	1	2	1	2	h_i^2	1	2
1	+0,70	—	+0,74	—	+0,63	+0,38	+0,74	—0,01	0,54	+0,24	+0,01
2	—0,70	—	—0,74	—	—0,69	—0,31	—0,73	+0,08	0,53	—0,23	+0,01
3	+0,70	—	+0,73	—	+0,64	+0,36	+0,74	—0,03	0,55	+0,24	+0,01
4	—0,70	—	—0,69	—	—0,64	—0,35	—0,73	+0,04	0,53	—0,23	—0,00
5	+0,70	—	+0,70	—	+0,60	+0,39	+0,71	+0,02	0,51	+0,22	+0,02
6	—	+0,70	—	+0,71	—0,48	+0,57	—0,10	+0,74	0,56	—0,01	+0,27
7	—	—0,70	—	—0,75	+0,41	—0,60	+0,03	—0,72	0,52	—0,01	—0,25
8	—	+0,70	—	+0,63	—0,26	+0,61	+0,10	+0,65	0,44	+0,04	+0,21
9	—	—0,70	—	—0,69	+0,39	—0,53	+0,05	—0,66	0,43	+0,00	—0,20
10	—	+0.70	—	+0,71	—0,42	+0,59	—0,05	+0,73	0,53	+0,00	+0,26

$r_{m1} = 0{,}718$ $r_{m2} = 0{,}697$

Таблица 7.6

Корреляционная матрица для десяти переменных*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,000									
2	—0,531	1,000								
3	0,568	—0,546	1,000							
4	—0,528	0,524	—0,502	1,000						
5	0,482	—0,512	0,507	—0,552	1,000					
6	—0,126	0,125	—0,156	0,059	—0,028	1,000				
7	0,091	—0,047	—0,002	—0,079	—0,009	—0,544	1,000			
8	0,111	0,004	0,050	—0,084	0,018	0,500	—0,419	1,000		
9	0,024	—0,120	0,013	—0,119	0,025	—0,439	0,485	—0,448	1,000	
10	—0,004	0,085	—0,075	0,072	—0,023	0,567	—0,543	0,420	—0,452	1,000

Среднее значение абсолютных величин коэффициентов корреляции между первыми пятью переменными $r_{a1} = 0{,}525$

Среднее значение абсолютных величин коэффициентов корреляции между вторыми пятью переменными $r_{a2} = 0{,}482$

* Значимые коэффициенты корреляции ($\alpha < 0{,}01$) напечатаны жирным шрифтом.

абсолютных величин коэффициентов корреляции. Для первых пяти переменных он обозначен через r_{a1}, для переменных 6—10 — через r_{a2}.

Сравнивая между собой решение, полученное методом главных факторов, и факторное отображение в выборке, можем убедиться, что факторные нагрузки плохо соответствуют друг другу. Прежде всего, имеется целый ряд высоких нагрузок там, где их не должно существовать по заложенным в модели связям, а именно между переменными 1—5 и вторым фактором. Напротив, результат варимакс-вращения хорошо согласуется с факторным отображением в выборке. В последних двух столбцах табл. 7.5 приведены коэффициенты регрессии, вычисленные с применением метода множественной регрессии к данным факторам и переменным.

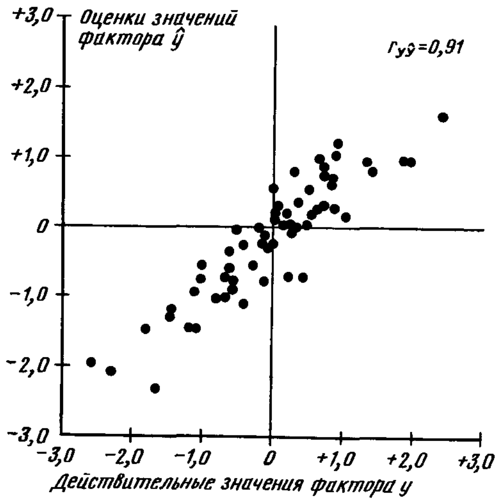


Рис. 7.9. Корреляционная диаграмма, отражающая зависимость между действительными значениями фактора и их оценками

Теперь мы подошли к вопросу о корреляции между действительными значениями фактора в выборке и их оценками. На рис. 7.9 изображена корреляционная диаграмма для первого фактора. При этом на нее нанесены только 60 точек из 200. (Для второго фактора получается идентичная корреляционная диаграмма с $r_{y\hat{y}}=0{,}91$.) Оценка значений факторов в этом примере довольно точная, $r_{y\hat{y}}=0{,}91$. Так как коэффициент корреляции $r_{y\hat{y}}$ определяет тесноту связи между оценками и действительными значениями, он получил название коэффициента достоверности* (см. [108; *2*]). Если оценивать фактор по одной переменной с помощью уравнения регрессии, то для этого примера коэффициент детерминации равен $0{,}70^2 = 0{,}49$. Оценка значений фактора с помощью факторного анализа значительно точнее. Коэффициент множественной детерминации равен в этом случае $0{,}91^2 = 0{,}81$. Это указывает на то, что данная методика позволяет найти группировку взаимосвязанных переменных. Любая перестановка переменных в корреляционной матрице приведет к тому же самому результату.

При предварительном исследовании, на котором мы не имеем возможности остаиовиться подробнее, вначале проверялось, обеспечивает ли программа репрезентативную выборку из генеральной совокупности. Кроме того, выяснилось, что при среднем коэффициенте корреляции между переменными и факторами выше 0,70 точность оценки больше 0,90. Но при среднем коэффициенте корреляции между переменными и факторами, равном 0,20, корреляционная связь между переменными такая слабая, что почти все коэффициенты корреляции меньше их критического значения. Поэтому исследования проводились для зна-

* В психометрических исследованиях его называют коэффициентом валидности и используют для оценки адекватности теста исследуемой проблеме. Он показывает, насколько полученные результаты отражают исследуемый признак. — *Примеч. пер.*

чений ρ в диапазоне от 0,20 до 0,70 при увеличении его каждый раз на 0,1. Объемы выборок при предварительном исследовании были равны: $n = 200$, $n = 100$, $n = 25$. Последовательность рассмотрения факторов не играет роли. Значения второго фактора могут быть определены точно так же, как и значения первого (при прочих равных условиях). Это позволяет сократить объем расчетов при аналогичных исследованиях.

Рассмотрим *зависимость точности оценки от корреляции между переменными и факторами*. Каждой точке на рис. 7.10 соответствует среднее значение результатов факторного анализа, проведенного на 50 выборках из одной и той же генеральной совокупности. По оси абсцисс отложены средние значения коэффициентов корреляции $\bar{r}_m$ между переменными и факторами. По оси ординат отложены средние зна-

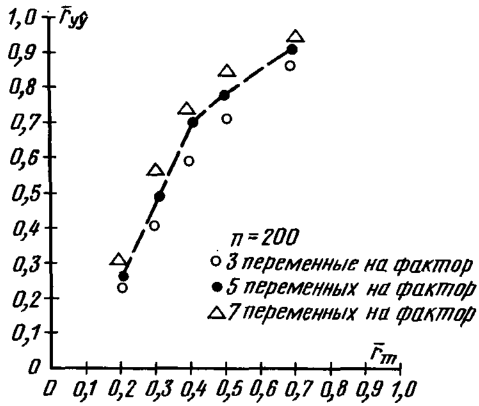


Рис. 7.10. Зависимость точности оценок значений факторов $(\bar{r}_{y\hat{y}})$ от коэффициентов корреляции между переменными и факторами $(\bar{r}_m)$. Каждой точке на графике соответствует среднее значение результатов факторного анализа, проведенного на 50 выборках из одной и той же генеральной совокупности.

чения коэффициентов достоверности оценок значений факторов $\bar{r}_{y\hat{y}}$. Объем выборки при каждом анализе был равен 200. Изменяли только величину корреляции между переменными и факторами в генеральной совокупности и число переменных, связанных с фактором. Существует тесная нелинейная связь между коэффициентами достоверности оценок значений и коэффициентами корреляции между переменными и факторами. Если, например, $\bar{r}_m = 0{,}40$, то $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}70$, когда фактор коррелирует с пятью переменными. Средний коэффициент достоверности всегда больше среднего коэффициента корреляции между переменными и факторами. Итак, факторный анализ увеличивает точность оценок значений факторов.

На точность оценок число переменных, связанных с фактором, не оказывает такого сильного влияния, как теснота связи между переменными и факторами. Прежде всего следует заметить, что при слабой связи между переменными и факторами увеличение числа переменных, приходящихся на фактор, незначительно увеличивает точность оценок. При исследовании число переменных, коррелирующих с фактором, редко превышает семь, а этого явно недостаточно для достижения высокой точности оценок, если связь между переменными и факторами слабая. Высокая точность оценок получается только тогда, когда связь между переменными и факторами достаточно тесная.

По рис. 7.10 можно определить коэффициент достоверности оценок значений фактора по $\bar{r}_m$. Если, например, средний коэффициент корреляций между переменными и факторами равен 0,20 и на фактор приходятся три переменные, то следует ожидать $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}22$. Если средний коэффициент корреляции между переменными и факторами может быть увеличен до 0,40, то коэффициент достоверности увеличивается до 0,58. Если к тому же увеличить число переменных, коррелирующих с факторами, до семи, то коэффициент достоверности достигнет значения 0,73.

Рис. 7.11. Зависимость точности оценок значений факторов ($\bar{r}_{y\hat{y}}$) от коэффициентов корреляции между переменными ($\bar{r}_a$). Каждой точке на графике соответствует среднее значение результатов факторного анализа, проведенного иа 50 выборках из одной и той же генеральной совокупности

Рис. 7.12. Зависимость точности оценок значений факторов ($\bar{r}_{y\bar{y}}$) от коэффициентов корреляции между переменными и фактором ($\bar{r}_m$) при различных объемах выборок. Каждой точке на графике соответствует среднее значение результатов факторного анализа, проведенного на 50 выборках из одной и той же генеральной совокупности

На практике коэффициенты корреляции между переменными и факторами неизвестны. Поэтому использовать график на рис. 7.10 не представляется возможным. На рис. 7.11 по оси абсцисс отложены *средние значения коэффициентов корреляции между переменными* $\bar{r}_a$. График на рис. 7.11 построен по результатам анализа тех же самых 750 выборок, что и график на рис. 7.10. Поразительно то, что уже при небольших средних значениях коэффициентов корреляции между переменными может быть получен значительный коэффициент достоверности. Например, при пяти переменных и $\bar{r}_a = 0{,}15$ значения факторов оцениваются в среднем с точностью 0,70.

На рис. 7.12 приведены результаты моделирования, при котором изменялись *объемы выборок* и теснота связи между переменными и факторами. Но при этом каждый раз с первым и вторым факторами были связаны пять переменных. И на этот раз с увеличением тесноты связи повышается точность оценки. Если $\bar{r}_m = 0{,}20$, т. е. относительно мало,

Таблица 7.7

Средние значения коэффициентов корреляции и их стандартные отклонения, вычисленные по результатам 50 выборок из 25 различных генеральных совокупностей*

Серия опытов	Строка	Фактор	Число переменных на фактор	$\rho=0,20$		$\rho=0,30$		$\rho=0,40$		$\rho=0,50$		$\rho=0,70$	
				r_m	$r_{y\hat{y}}$	r_m	$r_{y\hat{y}}$	r_m	$r_{y\hat{y}}$	r_m	$r_{y\hat{y}}$	r_m	$r_{y\hat{y}}$
I $n=200$	1	1	3	0,207 (0,044)	0,224 (0,114)	0,295 (0,041)	0,402 (0,103)	0,400 (0,038)	0,581 (0,059)	0,504 (0,099)	0,705 (0,042)	0,695 (0,024)	0,855 (0,018)
	2	2	3	0,194 (0,044)	0,200 (0,099)	0,303 (0,032)	0,408 (0,098)	0,398 (0,038)	0,579 (0,057)	0,501 (0,034)	0,705 (0,036)	0,703 (0,029)	0,862 (0,017)
II $n=200$	3	1	5	0,202 (0,035)	0,259 (0,137)	0,309 (0,029)	0,489 (0,139)	0,406 (0,031)	0,693 (0,039)	0,491 (0,026)	0,776 (0,026)	0,699 (0,023)	0,906 (0,012)
	4	2	5	0,196 (0,033)	0,248 (0,105)	0,301 (0,035)	0,476 (0,135)	0,396 (0,031)	0,672 (0,044)	0,500 (0,029)	0,785 (0,027)	0,702 (0,028)	0,909 (0,014)
III $n=200$	5	1	7	0,194 (0,026)	0,306 (0,127)	0,302 (0,027)	0,566 (0,095)	0,390 (0,028)	0,731 (0,046)	0,507 (0,026)	0,837 (0,020)	0,699 (0,024)	0,931 (0,011)
	6	2	3	0,203 (0,034)	0,173 (0,090)	0,303 (0,048)	0,320 (0,165)	0,397 (0,042)	0,534 (0,101)	0,490 (0,038)	0,676 (0,050)	0,699 (0,023)	0,860 (0,017)
IV $n=100$	7	1	3	0,206 (0,049)	0,256 (0,151)	0,303 (0,053)	0,418 (0,191)	0,402 (0,053)	0,644 (0,116)	0,496 (0,043)	0,771 (0,043)	0,690 (0,030)	0,904 (0,013)
	8	2	5	0,198 (0,045)	0,222 (0,133)	0,294 (0,049)	0,425 (0,156)	0,393 (0,048)	0,635 (0,103)	0,502 (0,048)	0,779 (0,051)	0,703 (0,033)	0,904 (0,023)
V $n=25$	9	1	5	0,238 (0,076)	0,258 (0,158)	0,316 (0,078)	0,366 (0,205)	0,412 (0,080)	0,500 (0,202)	0,509 (0,077)	0,693 (0,146)	0,687 (0,075)	0,889 (0,061)
	10	2	5	0,224 (0,061)	0,240 (0,161)	0,304 (0,077)	0,335 (0,185)	0,382 (0,065)	0,479 (0,183)	0,478 (0,063)	0,651 (0,179)	0,692 (0,070)	0,887 (0,054)

* Стандартные отклонения указаны в скобках. Все числа округлены до третьего десятичного знака.

то увеличение объема выборки не вызовет повышения точности, так как точки, соответствующие $n = 200$, $n = 100$ и $n = 25$, лежат вплотную друг к другу. Следовательно, при слабой корреляции точность оценки не повышается с увеличением объема выборки. Тот же самый вывод можно сделать при рассмотрении $\bar{r}_m = 0{,}70$, т. е. при тесной связи между переменными и факторами уменьшение объема выборки не снижает точности оценивания. В промежуточной зоне, которая чаще всего встречается на практике, возможно некоторое повышение точности за счет увеличения объема выборки. Так, при $n = 25$ коэффициент достоверности значительно меньше, чем при $n = 100$.

В табл. 7.7 представлены числовые значения коэффициентов корреляции, по которым строились графики на рис. 7.10—7.12. Было проведено пять серий наблюдений (I—V) с различными объемами выборок и числом переменных, приходящихся на фактор. В заголовке таблицы указаны требуемые коэффициенты корреляции между переменными и факторами, заложенными в генеральную совокупность: $\rho = 0{,}20$; ...; 0,70.

В таблице приведены средние значения и стандартные отклонения коэффициентов корреляции, вычисленных по результатам 50 выборок из соответствующей генеральной совокупности. Как средние значения коэффициентов корреляции $\bar{r}_m$, так и средние коэффициенты достоверности $\bar{r}_{y\hat{y}}$ вычислялись отдельно для каждого фактора. Рассмотрим, например, вторую серию опытов ($n = 200$, каждый фактор связан с пятью переменными и $\rho = 0{,}30$). Для первого фактора $\bar{r}_m = 0{,}309$ и $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}489$, для второго фактора $\bar{r}_m = 0{,}301$ и $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}476$.

Из таблицы видно, что стандартное отклонение коэффициента достоверности $r_{y\hat{y}}$ с увеличением тесноты связи между переменными и факторами уменьшается. Итак, тесная связь между переменными и факторами обусловливает не только высокую точность оценок, но и незначительную вариацию вокруг среднего значения коэффициента достоверности. Сопоставляя строки 3 и 9, а также 4 и 10, можно сделать вывод, что уменьшение объема выборок (от 200 до 25) приводит к увеличению стандартного отклонения коэффициента достоверности для всех ρ.

7.3.2. Точность факторного анализа с неравными нагрузками

При обобщении результатов, полученных выше с помощью моделирования на ЭВМ, может вызвать сомнение тот факт, что рассеяние между абсолютными величинами факторных нагрузок в каждой серии опытов было очень мало, так как для всех переменных в генеральной совокупности каждый раз устанавливалось одно и то же $|\rho|$. Поэтому было проведено исследование для определения влияния величины вариации между факторными нагрузками на точность факторного анализа.

Была выбрана генеральная совокупность, в которой каждый из двух факторов коррелировал с соответствующими пятью переменными. Для них были установлены следующие значения коэффициентов корреляции ρ: + 0,70; —0,55; + 0,40; —0,25; + 0,10. Среднее значение их равно 0,40. Вот почему эту серию опытов можно сравнить с другой, в которой среднее значение также равно 0,40, причем коэффициент корреляции между каждой переменной и фактором устанавливается ±0,40. Итак, разница между обеими сериями опытов заключается в том, что в первой серии по сравнению со второй имеют дело со значительным по сравнению со второй рассеянием факторных нагрузок. Но в обеих сериях средние значения коэффициентов корреляции r_m между переменными и факторами равны.

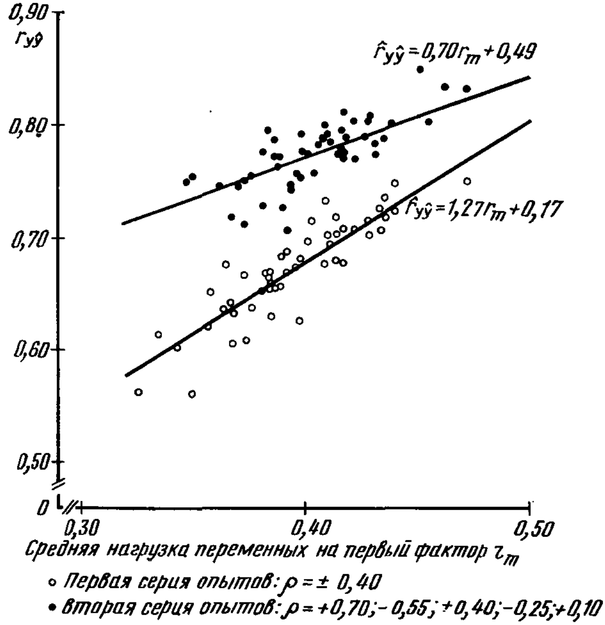


Рис. 7.13. Влияние величины вариации факторных нагрузок на точность оценок значений факторов

Результаты обеих серий опытов приведены на рис. 7.13. Диапазон изменения средних коэффициентов корреляции r_m между переменными и первым фактором для обеих серий опытов примерно одинаковый. Прямая регрессии, вычисленная по результатам опытов первой серии, лежит выше прямой регрессии, соответствующей опытам второй серии. Отсюда можно сделать вывод, что более сильное рассеяние факторных нагрузок при прочих равных условиях способствует увеличению точности оценок значений фактора. Этот вывод можно объяснить следующим образом. Большое рассеяние факторных нагрузок означает, что переменные, слабо коррелирующие с фактором, практически выпадают из анализа. Следовательно, число переменных, приходящихся на фактор, уменьшается. Вес оставшихся переменных, которые сильно коррелируют с фактором, в анализе повышается. Из рис. 7.10 видно, что величина коэффициентов корреляции между переменными и фактором влияет на точность оценки сильнее, чем число переменных, связанных с фактором. Итак, оба вышеназванных эффекта не погашают друг друга. Увеличение в анализе веса переменных, сильно коррелирующих с фактором, приводит к повышению точности оценки.

Здесь следует указать на то, что распределение отдельных факторных нагрузок вокруг среднего значения 0,40 было симметрично. Так как факторные нагрузки в принципе являются коэффициентами корреляции, то их распределение отличается от нормального. Если перевести установленные для генеральной совокупности $|\rho|$ с помощью z-преобразования в нормально распределенные величины, вычислить по ним среднее значение, а затем сделать обратное преобразование, то для первой серии опытов со значительным рассеянием факторных нагрузок получим среднее значение, равное 0,452 (в то время как для другой серии опытов среднее значение равно 0,40). Следовательно, делая вывод о повышении точности оценок с увеличением рассеяния факторных нагрузок, нужно учесть, что распределение факторных нагрузок отличается от нормального. Применение z-преобразования не решит этого вопроса. Пусть для второй серии опытов имеем $r_m = 0{,}45$. Тогда из рис. 7.10 получим, что $r_{y\hat{y}} = 0{,}74$. Фактическое среднее значение коэффициента достоверности для второй серии опытов значительно больше, а именно $r_{y\hat{y}} = 0{,}775$. Если при выборе ρ для отдельных переменных исходить из их z-значений, одинаково удаленных от среднего значения в ту и другую сторону, то получают коэффициенты достоверности, которые лежат между значениями, указанными на рис. 7.10.

Для второго фактора получим те же самые зависимости, что приведены на рис. 7.13. Теперь возникает вопрос, следует ли ожидать повышения точности оценок при увеличении рассеяния между факторными нагрузками и при других значениях средних коэффициентов корреляции. В результате анализа, проведенного 25 раз, со средним значением $\rho = 0{,}70$ и пятью переменными, связанными с фактором[1], получалось среднее значение коэффициента достоверности $r_{y\hat{y}} = 0{,}93$. Из табл. 7.7 видно, что при одном и том же $|\rho| = 0{,}70$ для всех переменных следует ожидать $r_{y\hat{y}} = 0{,}90$. В данном случае сильное рассеяние факторных нагрузок также увеличивает коэффициент достоверности. Тот же самый вывод получим при среднем значении[2] $\rho = 0{,}30$. Увеличение рассеяния приведет к повышению среднего коэффициента достоверности от 0,48 до 0,56.

7.3.3. Точность результатов факторного анализа при альтернативных данных

Не всегда переменные, по которым проводится факторный анализ, могут быть измерены количественно. Имеется целый ряд переменных, например пол, которые обладают только альтернативной вариацией. Некоторые общие положения при работе с качественными признаками приведены в гл. 8.2.

---

[1] В генеральной совокупности были установлены следующие коэффициенты корреляции ρ между переменными и каждым фактором: +0,90; —0,80; +0,70; —0,60; +0,50.

[2] В генеральной совокупности были установлены следующие коэффициенты корреляции ρ между переменными и каждым фактором: +0,50; —0,40; +0,30; —0,20; +0,10.

Используемые нами формула коэффициента корреляции или формула коэффициента ковариации пригодны только для количественных величин. Так как факторный анализ исходит из корреляционной матрицы, то возникает вопрос: каким образом преобразовать альтернативные значения переменных, чтобы по ним можно было выполнить процедуру факторного анализа? Это вызывает большие затруднения. Обычно альтернативным значениям переменной приписывают с помощью факторных нагрузок определенные веса. К каким ошибкам это приводит, неизвестно. Так как альтернативные данные на практике встречаются довольно часто, было проведено исследование результатов факторного анализа с такими данными при моделировании необходимых для этого процедур на ЭВМ. С помощью моделирования было проверено, где происходит потеря информации при переходе к альтернативным данным.

При данном исследовании использовали ту же самую матрицу данных, по которой раньше проводился факторный анализ, т. е. исходили из нормально распределенных случайных величин. Процедура факторного анализа, выполняемая по нормально распределенным случайным величинам, далее будет называться стандартной процедурой. После преобразования этой матрицы в матрицу альтернативных данных по ней строилась корреляционная матрица и проводился факторный анализ. Преобразование матрицы было выполнено двумя способами. При первом способе разделения значений переменных на две альтернативные группы использовалась медиана, т. е. все значения меньше нуля обозначались через 1, все значения больше нуля — через 2. Этот способ классификации данных в дальнейшем будет фигурировать как *способ 1*. При этом в среднем 50% значений переменных приходится на каждую из альтернативных групп. При втором способе классификации в качестве разделяющего элемента использовали значение переменной, равное — 1, т. е. все значения меньше — 1 обозначались через 1, все значения больше — 1 — через 2. Тогда в среднем 84% значений переменных попадало в одну группу, а 16% значений — в другую, так как первоначальная матрица исходных данных содержит значения нормально распределенных стандартизованных переменных. Этот способ классификации в дальнейшем называется *способом 2*.

К одним и тем же выборкам из одной и той же генеральной совокупности была три раза применена процедура факторного анализа, включая вычисление $r_{y\hat{y}}$. Итак, будем различать:

1) стандартную процедуру факторного анализа, примененную к нормально распределенным случайным величинам;

2) процедуру факторного анализа, примененную к данным, полученным способом 1. При этом предполагается, что значения факторов нормально распределены, а переменные обладают альтернативной вариацией, причем при преобразовании переменной в качестве разделяющего элемента использовалась медиана;

3) процедуру факторного анализа, примененную к данным, полученным способом 2. При этом предполагается, что значения факторов нормально распределены, а переменные обладают альтернативной вариацией. В качестве разделяющего элемента при преобразовании переменных служила величина, значительно отличающаяся от медианы. Это было сделано для того, чтобы приблизиться к реальной ситуации, часто возникающей на практике, когда классификация выполняется произвольно.

В качестве показателя связи между альтернативными данными применяется φ-коэффициент (см. Кендэл и Стьюарт [173]), который вычисляется по четырехклеточной (2 × 2) таблице.

$$\begin{array}{cc|c} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ \hline a+c & b+d & n \end{array}$$

$$\varphi=\frac{(ad-bc)}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}. \qquad (7.1)$$

Кроме того, $\chi^2 = n\varphi^2$. Можно показать, что коэффициент φ идентичен обычному коэффициенту ковариации, если его применить к альтернативным данным. Следовательно, к альтернативным данным может быть применена та же самая процедура вычислений, что и к корреляционной матрице.

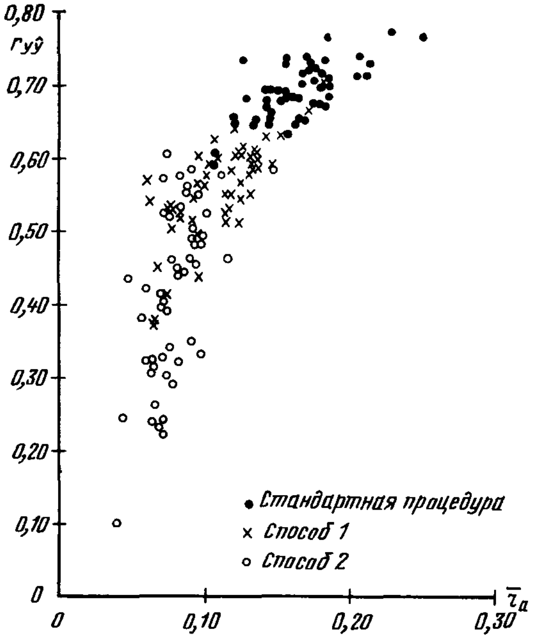


Рис. 7.14. Сравнение точности оценок значений фактора при различных способах образования альтернативных даниых из нормально распределенных случайных переменных

Для исследования была выбрана генеральная совокупность, в которой с каждым из двух факторов были связаны пять переменных. Коэффициент корреляции ρ для каждой переменной устанавливался одинаковым по абсолютной величине (0,40), но с разными знаками. Исследование производилось по 50 выборкам. Коэффициенты корреляции между исходными нормально распределенными случайными величинами оказались больше коэффициентов корреляции, вычисленных по альтернативным данным. Особенно низкие коэффициенты корреляции получились для переменных, преобразованных по способу 2. Таким образом, при переходе к альтернативным данным происходит потеря информации. Уменьшаются также коэффициенты корреляции между переменными и факторами. Для установления связи между коэффициентами достоверности и r_a была построена корреляционная диаграмма, изображенная на рис. 7.14. Коэффициенты достоверности вычислялись по каждой выборке. Диаграмма была построена только для первого фактора, но аналогичная картина получается и для второго.

Каждой точке на рис. 7.14 соответствует результат факторного анализа, примененного к одной и той же матрице исходных данных. Результаты стандартной процедуры факторного анализа отмечены темными точками. Результаты факторного анализа по данным, преобразованным способом 1, отмечены крестиками. Результаты факторного анализа по данным, преобразованным способом 2, отмечены на диаграмме светлыми кружочками. По оси абсцисс отложены средние значения абсолютных величин коэффициентов корреляции между пятью переменными r_a; по оси ординат — значения $r_{y\hat{y}}$. Из рисунка видно, что при переходе к альтернативным данным коэффициенты корреляции в **R** уменьшаются. При стандартной процедуре факторного анализа средний коэффициент корреляции между переменными $\bar{r}_a = 0{,}165$ (стандартное отклонение равно 0,029), средний коэффициент достоверности $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}693$ (стандартное отклонение равно 0,04). Потеря информации при переходе к альтернативным данным приводит к уменьшению соответствующих коэффициентов. Так, при проведении факторного анализа по данным, полученным способом 1, имеем $\bar{r}_a = 0{,}111$ (стандартное отклонение равно 0,028), а $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}562$ (стандартное отклонение равно 0,066). При проведении факторного анализа по альтернативным данным, полученным способом 2, наблюдается дальнейшее уменьшение среднего коэффициента корреляции между переменными и среднего коэффициента достоверности, а именно $\bar{r}_a = 0{,}0805$ (стандартное отклонение равно 0,018) и $\bar{r}_{y\hat{y}} = 0{,}418$ (стандартное отклонение равно 0,119).

Вообще говоря, сравнивать между собой средние значения коэффициентов достоверности не совсем корректно, так как они вычислены по различным матрицам данных. Уже корреляционные матрицы значительно различаются между собой, что видно по значениям $\bar{r}_a$ на рис. 7.14. Потеря информации происходит перед вычислением корреляционной матрицы. Факторный анализ как таковой не может возместить эту потерянную информацию. Если коэффициенты корреляции между переменными с альтернативной вариацией равны коэффициентам корреляции между нормально распределенными переменными, то точность оценок значений факторов будет не хуже. Характер расположения точек на рис. 7.14 приблизительно соответствует кривой, изображенной на рис. 7.11. При $\bar{r}_a = 0{,}10$ и при пяти нормально распределенных переменных следует ожидать значения коэффициента достоверности от 0,40 до 0,50. Если обратиться к рис. 7.14, то можно убедиться, что при $r_a = 0{,}10$ среднее значение коэффициента достоверности для результатов 50 анализов по данным, полученным способом 2, попадает в этот интервал.

Итак, при альтернативных данных коэффициенты корреляции между переменными уменьшаются по сравнению с количественными данными, т. е. связь между переменными ослабевает. Если имеют дело с настоящими альтернативными данными, например, при исследовании такого признака, как пол, то приходится мириться с этим. Если переменные с альтернативной вариацией имеют такую же высокую корреляцию, как и нормально распределенные величины, то, как следует из рис. 7.14 и 7.11, значения факторов будут оценены с не меньшей точностью. Трудность состоит в том, что выделенные факторы всегда являются нормально распределенными величинами. Сразу возникает вопрос, имеет ли это смысл, если исходные переменные по своей природе обладают альтернативной вариацией. Можно, конечно, значения факторов преобразовать в альтернативные величины. Но если исходные переменные представлены в виде результатов количественных измерений, то не нужно приводить их к альтернативной форме, так как исследования на моделях показали, что при этом происходит значительная потеря информации. Если при нормально распределенных переменных коэффициент множественной детерминации будет равен $0{,}693^2 = 0{,}480$, то при преобразовании этих переменных по способу 2 в результате анализа получим коэффициент детерминации $0{,}418^2 = 0{,}174$. Но опыт показывает, что факторное отображение, полученное по альтернативным данным, в принципе согласуется с факторным отображением, полученным по нормально распределенным величинам.

7.3.4. Сравнение точности оценивания в факторном анализе с оцениванием в регрессионном анализе

Факторный анализ позволяет оценить значения переменной, которая непосредственно не измеряется. Что это принципиально возможно, мы уже показали на примерах. Возникает вопрос о точности этой оценки

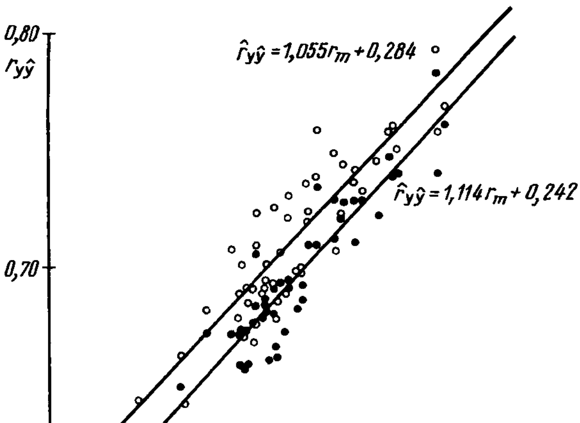


Рис. 7.15. Сравнение точности оценивания, произведенного с помощью факторного анализа и выполненного методом множественной регрессии, при $|\rho| = 0{,}40$

по сравнению с оценкой целевой функции в классическом множественном регрессионном анализе. Уже в 7.2.2 на примере с оценкой числа жителей было показано, что разница в точности оценивания непосредственно измеряемой целевой функции по сравнению с точностью оценивания неизмеряемой переменной в факторном анализе при определенных условиях не очень велика. Более подробно этот вопрос был рассмотрен при моделировании процедур факторного анализа на ЭВМ.

Отправной точкой при моделировании была матрица исходных данных, полученных в результате репрезентативной выборки из генеральной совокупности. К этой матрице применялась стандартная процедура факторного анализа и производилось вычисление коэффициента достоверности оценок значений факторов. Кроме того, по уравнению множественной регрессии, вычисленному по соответствующим переменным и действительным значениям фактора, находились оценки значений фактора и коэффициент корреляции между действительными значениями фактора и их оценками. Этот коэффициент корреляции идентичен коэффициенту множественной корреляции между целевой функ-

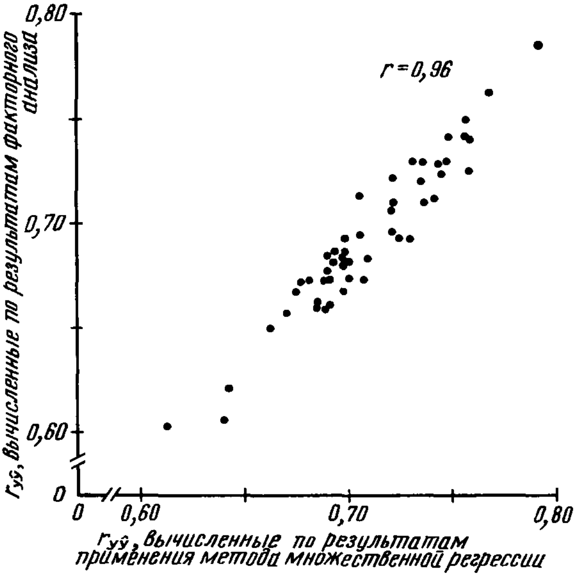


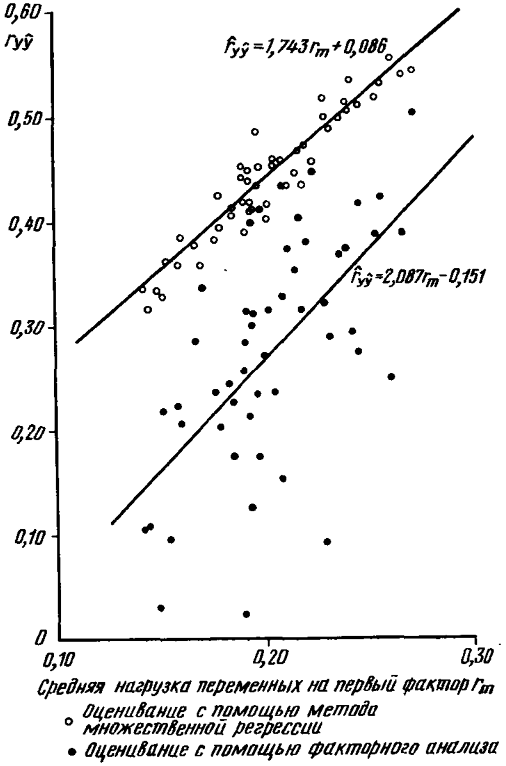
Рис. 7.16. Зависимость между точностью оценивания, произведенного с помощью метода множественной регрессии, и точностью оценивания с помощью факторного анализа при $|\rho|=0{,}40$ по результатам 50 выборок

цией (действительными значениями фактора) и переменными, использованными в регрессионном анализе.

На рис. 7.15 производится сравнение точности оценивания с помощью факторного анализа и метода множественной регрессии, примененных к одной и той же матрице исходных данных. Коэффициенты достоверности вычислялись по 50 выборкам объемом $n=200$. В генеральной совокупности каждый из двух факторов коррелировал с пятью отдельными переменными ($|\rho| = 0{,}40$). Темными кружками отмечены коэффициенты достоверности, вычисленные по результатам факторного анализа. Светлыми кружками отмечены коэффициенты достоверности, вычисленные по результатам применения метода множественной регрессии.

По рисунку видно, что в точности оценивания обоими методами не наблюдается большой разницы. Средние коэффициенты достоверности, вычисленные по результатам применения метода множественной регрессии и факторного анализа, соответственно равны 0,710 и 0,693. Согласно этим значениям разность между коэффициентами множественной детерминации равна: $0{,}710^2 - 0{,}693^2 = 0{,}025$, что составляет 2,5% полной единичной дисперсии переменной. Это незначительное расхождение в точности оценок поразительно. Ни в одной из 50 анализируемых выборок разность между обоими коэффициентами достоверности не была признана статистически значимой. Точность оценок обоих методов тесно взаимосвязана, что видно из рис. 7.16. Чем больше точность оценивания при применении метода множественной регрессии, тем больше точность оценивания при применении факторного анализа по тем же самым исходным данным, и обратно[1].

Во второй серии опытов анализировались выборки из генеральной совокупности, где был установлен коэффициент корреляции между переменными и факторами $|\rho|=0,20$. Прочие условия проведения экспериментов остались без изменения. Связь между переменными и факторами стала слабее. Результаты анализа представлены на рис. 7.17.



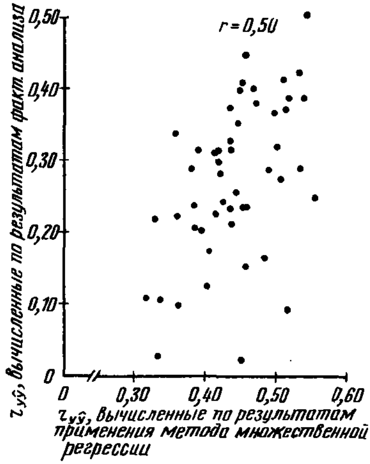


Рис. 7.18. Зависимость между точностью оценивания, произведенного с помощью множественной регрессии, и точностью оценивания с помощью факторного анализа при $|\rho|=0,20$ по результатам 50 выборок

Рис. 7.17. Сравнение точности оценивания, произведенного с помощью факторного анализа и выполненного методом множественной регрессии, при $|\rho|=0,20$

Здесь опять светлыми кружками обозначены коэффициенты достоверности, вычисленные по результатам применения метода множественной регрессии, а темными кружками отмечены коэффициенты достоверности, вычисленные по результатам факторного анализа. На этот раз различие между точностями оценивания ощутимее, а именно точность оценок, полученных методом множественной регрессии, значительно выше точности оценок, полученных с помощью факторного анализа.

[1] Во множественном регрессионном анализе оценки значений результативного признака (целевой функции) соответствуют действительной шкале измерений. Оценки значений неизвестных факторов могут быть получены только в нормированном виде, причем их среднее равно нулю, а дисперсия выражена в единицах измерения данного фактора.

Разность между соответствующими коэффициентами множественной детерминации в среднем равна: $0{,}441^2 - 0{,}273^2 = 0{,}119$, что составляет 11,9% полной единичной дисперсии. Из 50 проанализированных выборок в 11 случаях разность между коэффициентами достоверности, вычисленными по результатам применения обоих методов оценивания, была признана статистически значимой.

Очевидно, расхождение в точности оценивания вызвано уменьшением коэффициента корреляции между переменными и фактором, установленного в генеральной совокупности. При $|\rho| = 0{,}20$ коэффициенты корреляции в **R** изменяются в интервале $0{,}03 \div 0{,}10$. В этом случае, несомненно, метод множественной регрессии дает более точные оценки. При небольших коэффициентах корреляции в **R** связь между точностью обоих методов оценок очень слабая, в чем можно убедиться по рис. 7.18. Установление в генеральной совокупности $|\rho| = 0{,}40$ приводит к увеличению значений коэффициентов корреляции в **R**, а именно они изменяются в интервале $0{,}10 \div 0{,}24$. Из рис. 7.16 видно, что точности оценок обоих методов при $|\rho| = 0{,}40$ тесно коррелируют между собой. Следовательно, оба метода по точности оценок не уступают друг другу. Этот вывод может быть распространен только на данные с четкой структурой переменных, что имело место в описанном случае. Путем вращения достигалось однозначное положение осей координат, которое выявляло простую структуру, заложенную заранее в исходные данные.

7.4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В предыдущих главах на отдельных моделях и экспериментах, имеющих методологический характер, было показано, что факторный анализ может по наблюдаемым переменным обнаружить скрытые за ними, непосредственно не измеряемые величины и дать оценку этих величин (факторов) для отдельного индивидуума. Этот вывод, полученный на основе моделей, не может быть безоговорочно распространен на все случаи. Выявление структуры исходных данных с помощью факторного анализа было продемонстрировано на специально подобранных примерах, но строго не доказано. Поэтому к выводам о точности оценок значений факторов тоже нужно относится критически.

Поиск простой структуры, заранее заложенной в исходные данные моделей, производился по определенной методике, включающей в себя оцеику общностей; как можно более точное определение числа факторов, подлежащих выделению; выделение факторов центроидным методом или методом главных факторов и вращение с целью определения простой структуры. При проведении аналогичного исследования следует иметь в виду, что если не обеспечивается ортогональность факторов, как это выполняется при моделировании на ЭВМ, то необходимо производить вращение осей координат до нахождения косоугольной простой структуры. Факторы, являющиеся значимыми по критерию Баргмана, большей частью содержательно интерпретируются. Нами еще не было проведено исследование на моделях метода максимального правдоподобия.

К сожалению, при решении задачи группировки переменных, кроме концепции простой структуры, не имеется других критериев. Задача группировки переменных заключается в разбиении переменных на такие группы, что переменные, входящие в одну группу, сильно коррелируют между собой, а переменные, входящие в разные группы,— слабо. Вполне допустим такой подбор переменных на моделях или при практических исследованиях, что не может быть найдено однозначного положения системы координат, удовлетворяющего принципу простой структуры. В этом случае число выделенных факторов дает лишь формальное описание размерности исследуемого факторного пространства. Но эти факторы не могут быть содержательно проинтерпретированы и оценки их значений носят произвольный характер. В этом случае нельзя сделать никакого определенного вывода о структуре данных.

С другой стороны, вполне возможно путем вращения обнаружить простую структуру, обеспечивающую наиболее простое описание переменных в терминах факторов, лежащих в основе данного явления. Но в то же время нахождение простой структуры, удовлетворяющей критерию значимости Баргмана, еще не гарантирует, что выделенные факторы существуют реально. Они могут служить лишь основой для первоначальной гипотезы, которая отличается особой простотой, но требует дополнительной проверки. На все это одним из первых указал Оверолл [217; *2*] в своей критике исследований на моделях и привел соответствующие примеры.

Известные до сих пор исследования на моделях показывают принципиальную возможность выявления простой структуры, если она действительно присуща исходным данным. В этом случае размерность исследуемого факторного пространства вполне согласуется с выявленными функциональными единицами, причинно обусловливающими взаимодействие переменных. И это нельзя рассматривать как случайное совпадение, особенно если оно подтверждается дальнейшими исследованиями. Но данный вывод, полученный на основе отдельных экспериментов, к сожалению, не может быть обобщен. Мы можем сослаться только на такие поразительные факты, что результаты факторного анализа, примененного различными исследователями к одним и тем же данным с четкой структурой, совпадают друг с другом. Следовательно, методика факторного анализа позволяет исследователям вслепую обнаружить число и вид независимых функциональных единиц, вызывающих вариацию переменных и действительно присущих данному явлению. Примеры (один из которых приведен Овероллом [217; *2*]), отрицающие эти утверждения, не могут рассматриваться в качестве опровержения объективности процедур факторного анализа, так же как приведенные здесь примеры поиска простой структуры не могут служить доказательством их объективности.

Моделирование на ЭВМ (гл. 7.3) позволяет утверждать, что задача, которая ставится перед факторным анализом, — выявить величины, не поддающиеся непосредственному измерению, и представить их в виде измеренных — вполне разрешима. Факторный анализ в подавляющем большинстве случаев приводит к оценкам значений факторов, которые более тесно коррелируют с действительными их значениями, чем наблюдаемые переменные. Таким образом, объективность процедур факторного анализа эмпирически считается доказанной.

Достоверность оценок значений факторов зависит главным образом от степени связи между переменными и факторами. Чем теснее эта связь, тем больше точность оценки. Число переменных, приходящихся на фактор, также оказывает влияние, но в значительно меньшей степени. Большой точности оценивания можно достигнуть только при тесной корреляционной связи между переменными и факторами. Слабая корреляционная связь не может быть компенсирована увеличением числа переменных, связанных с фактором. Увеличение объема выборки не улучшает точности оценок, если связь между переменными и факторами слабая. Если же эта связь тесная, то уменьшение объема выборки не приводит к резкому снижению точности оценивания. При коэффициентах корреляции, занимающих промежуточное положение между этими крайними случаями, возможно некоторое повышение точности за счет увеличения объема выборки. Более сильное рассеяние факторных нагрузок приводит к увеличению точности оценок. При этом сравнение производится с результатами оценивания при одинаковых факторных нагрузках и при совпадении средних значений нагрузок в обеих сериях опытов. Преобразование нормально распределенных случайных величин в переменные с альтернативной вариацией, особенно при неравномерном распределении значений переменных в альтернативных группах, снижает точность оценивания. Это объясняется тем, что уже перед вычислением корреляционной матрицы происходит потеря информации. Если коэффициенты корреляции между переменными с альтернативной вариацией равны коэффициентам корреляции между нормально распределенными переменными, то точность оценок значений факторов будет не хуже. Точность оценок, полученных методом множественной регрессии, только тогда выше точности оценок, полученных с помощью факторного анализа, когда связь между переменными и факторами слабая.

Эти выводы были получены в результате моделирования процедур факторного анализа на ЭВМ при одном существенном ограничении — факторы не перекрывались. Переменные нагружали либо первый из двух факторов, либо второй, но не оба сразу. В принципе вполне возможно провести аналогичное исследование с перекрывающимися факторами. Опираясь на приобретенный опыт, можно предположить, что точность оценок значений перекрывающихся факторов будет незначительной в случае отсутствия четкой простой структуры.

Приведенные выше выводы справедливы только для той методики факторного анализа, которая была применена при моделировании (в качестве оценок общностей принимались наибольшие значения коэффициентов корреляции в каждом столбце матрицы **R**, использовались метод главных факторов и варимакс-вращение). Эти процедуры факторного анализа наиболее распространены. Как изменяются точности оценок при других методах факторного анализа, не исследовано. Генерируемые на ЭВМ факторы были ортогональны. Поэтому с помощью варимакс-критерия добивались наилучшей ортогональной аппроксимации простой структуры. В силу того что аналитические методы косоугольного вращения не всегда приводят к эффективным результатам, они не привлекались при моделировании на ЭВМ. В исследованиях на модели выделяли два фактора, так как заранее было известно, что корреляция переменных обусловлена именно двумя факторами. На практике число факторов, подлежащих выделению, оценивается заранее одним из разработанных для этого способов. Однако этот вопрос наряду с различными подходами к решению проблемы общностей остался неисследованным при моделировании процедур факторного анализа на ЭВМ.

Итак, хотя ряд частных вопросов еще не решен, в общем можно сделать вывод, что результаты факторного анализа эмпирически подтверждены. Точность метода была изучена при некоторых конкретных условиях. Моделирование на ЭВМ дает возможность получить ответы на вопросы, связанные с применением факторного анализа.

8. ЧАСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

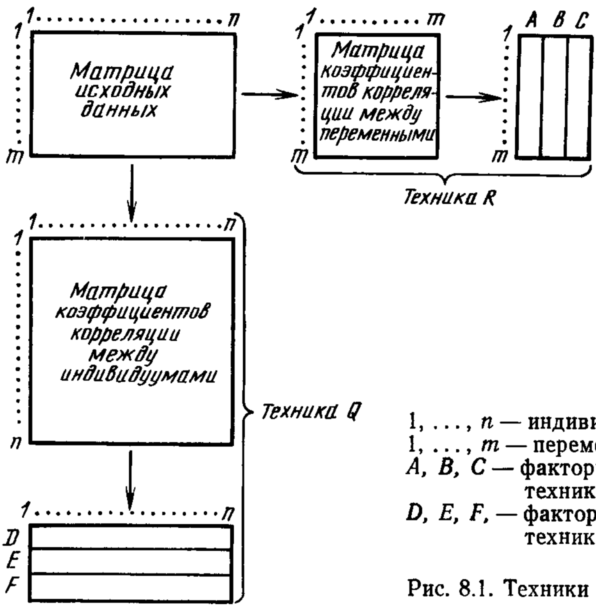
В разделах 3—6 обсуждались отдельные проблемы факторного анализа и указывались методы их решения. При этом ряд вопросов был оставлен без внимания. Теперь, когда мы в целом представляем себе задачи и возможности факторного анализа, можно перейти к рассмотрению некоторых частных вопросов, которые, на наш взгляд, являются наиболее важными. Последующие главы посвящены различным проблемам, но в основном мы ограничиваемся их постановкой, не приводя окончательных решений. Основной целью этого раздела является возбудить интерес читателя к этим проблемам и указать соответствующую литературу.

8.1. РАЗЛИЧНЫЕ ТЕХНИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВИДА МАТРИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Матрицу исходных данных, подвергающуюся факторному анализу, можно рассматривать двояко. До сих пор мы вычисляли корреляцию между строками (переменными). Но можно определять корреляцию и между столбцами (индивидуумами). Таким образом, к одной и той же матрице исходных данных могут быть применены два способа определения корреляций, которые называются «техниками». Между обеими техниками существует взаимосвязь. В отличие от этих двух техник, оперирующих группами индивидуумов, факторный эксперимент может быть построен на совершенно другой основе. Через определенные интервалы времени на одном и том же индивидууме (объекте) осуществляется исследование нескольких параметров (переменных) или можно один и тот же параметр (переменную) измерять на нескольких индивидуумах в различные моменты времени. Полученные таким образом матрицы исходных данных можно также подвергать факторному анализу. Было бы полезно также рассмотреть влияние условий эксперимента на результаты факторного анализа.

Обычная матрица исходных данных содержит наблюдения по m переменным (строки) для n индивидуумов (столбцы). Она изображена в виде прямоугольника слева в верхней части рис. 8.1. Если вычислить коэффициенты корреляции между переменными по группам индивидуумов, то получим корреляционную матрицу, с которой мы все время имели дело. Факторный анализ этой корреляционной матрицы приводит к факторному отображению, указанному в правой части рис. 8.1. При этой технике с помощью факторов выявляется структура переменных. Переменные сосредоточены вокруг тех факторов, которые определяют эти переменные и обусловливают их корреляции. Применение факторного анализа к корреляционной матрице, образованной описанным выше способом, называется техникой R.

Но по той же самой матрице данных можно рассчитать корреляции между индивидуумами и образовать корреляционную матрицу порядка n. На рис. 8.1 она изображена под матрицей исходных данных. В результате факторизации матрицы коэффициентов корреляции между индивидуумами получаем систему факторов D, E и F. Эти факторы выявляют взаимосвязь между индивидуумами, которые разделяются на группы, не похожие друг на друга. Внутри групп существует высокая



1, ..., n — индивидуумы
1, ..., m — переменные
A, B, C — факторы, выделенные с помощью техники R
D, E, F, — факторы, выделенные с помощью техники Q

Рис. 8.1. Техники R и Q

корреляция между индивидуумами. Применение факторного анализа к матрице коэффициентов корреляции между индивидуумами называется техникой Q.

Стефенсон [278] одним из первых рассмотрел два способа определения коэффициентов корреляции по одной и той же матрице исходных данных и сравнил результаты факторного анализа, примененного к двум корреляционным матрицам. Барт [27; 5] еще раньше занимался этим вопросом, и они опубликовали совместную работу [29]. Оба факторных отображения, полученных по одной и той же матрице исходных данных, независимы друг от друга. Собственные значения и собственные векторы одной корреляционной матрицы можно вычислить по собственным значениям и собственным векторам другой. Если оба факторных решения рассматривать с содержательной стороны, то можно заметить, что характер первого общего фактора, определенного с помощью техники Q, будет несколько иным по сравнению с рассчитанным при помощи техники R. Разница между обоими факторными отображениями изучена еще не полностью. С одной стороны, эти решения взаимосвязаны, а с другой стороны, они дают различную информацию о причинах, скрытых за фасадом изучаемого явления. Различие выделенных факторов связано с тем, что в технике R рассматривается корреляция между переменными по выборке индивидуумов, а в технике Q рассматривается корреляция между индивидуумами по выборке переменных. В общем случае нельзя ожидать, что эти факторы будут точно совпадать друг с другом.

Комбинируя описанные выше два способа рассмотрения матрицы исходных данных с различными категориями переменных, можно получить еще ряд техник факторного эксперимента. Каттелл предложил шесть техник, но их число может быть увеличено. На рис. 8.2 представ-

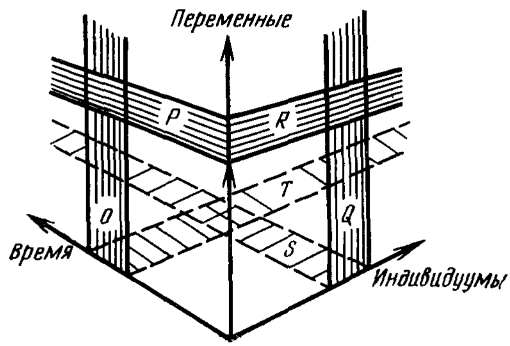


Рис. 8.2. Диаграмма различных техник факторного эксперимента по Каттеллу (*covariation-chart*). Оси соответствуют индивидуумам, переменным и времени. Различные техники факторного эксперимента изображены в соответствующих плоскостях в виде полос. В технике R вычисляют корреляцию между переменными по выборке индивидуумов, в технике Q — корреляцию между индивидуумами по выборке переменных, в технике P — корреляцию между переменными по выборке наблюдений, произведенных в определенные интервалы времени

лена диаграмма «*covariation-chart*», отражающая связь между шестью техниками Каттелла. Он исходил из того, что различные наблюдения можно представить в трех измерениях: относительно индивидуумов, переменных и времени или различных ситуаций при проведении эксперимента. Рассмотрим вначале плоскость, образованную осями «переменные» и «индивидуумы». Если по выборке индивидуумов определяют корреляции между переменными и по ним проводят факторный анализ, то имеют дело с техникой R. Она указана на диаграмме в виде полосы на плоскости, образованной осями «переменные» и «индивидуумы». И наоборот, если факторный анализ применяют к матрице коэффициентов корреляции между индивидуумами, рассчитанных по выборке переменных, то имеют дело с техникой Q, которая изображена на этой же плоскости в виде полосы, параллельной оси переменных. Полосы на плоскости проводятся перпендикулярно к осям, соответствующим величинам, между которыми рассчитываются корреляции. Аналогичным образом можно рассмотреть две другие плоскости с соответствующими техниками факторного эксперимента, между которыми существует такая же связь, как между техниками R и Q.

В плоскости, образованной осями «переменные» и «время», проведена полоса, соответствующая технике P. При этой технике факторного эксперимента через определенные интервалы времени проводятся повторные исследования индивидуумов. Переменными, между которыми определяют корреляцию в данном случае, являются результаты наблюдений в отдельные моменты времени. По корреляционной матрице определяются факторы, которые вызывают вариацию переменных, относящихся к одному и тому же индивидууму.

Не проведена еще четкая граница между техникой P и другими методами анализа временны́х рядов. Техника P имеет много противников. Одно из возражений против ее применения заключается в том, что наблюдения на одном и том же индивидууме независимы друг от друга и это может послужить источником ложной корреляции. Другое возражение касается запаздывания во времени (*time-lag*) одной из взаимосвязанных переменных, из-за чего при обычной технике P корреляция между ними может не выявиться, хотя на самом деле между ними существует тесная зависимость. Это затруднение можно преодолеть, сдвигая по времени обе переменные относительно друг друга и устанавливая, какая величина сдвига приводит к максимальной корреляции между ними. Кроме того, при применении факторного анализа к временны́м рядам нельзя выявить направление изменений факторов. При изменении порядка чередования интервалов времени, в которых производились наблюдения, результат анализа не изменяется. Отдельные высказывания о применении факторного анализа к временным рядам можно найти в работе Андерсона [5; *5*]. Методические указания по применению техники P имеются у Вудбери и Хольцмана. Хотя еще полностью не выявлены границы применения техники P, ясно, что она открывает широкие возможности, особенно при изучении индивидуальных свойств объектов. Кроме работ Каттелла [35; *3*, *5*, *6*, *7*], предложившего технику P, полезно познакомиться с публикациями его последователей (см. также Каттелл и Вильямс [52]).

Логически возможны и другие виды техник факторного эксперимента, которые не нашли отражения на рис. 8.2. Например, если вычислять корреляцию между переменными через определенные интервалы времени, производя измерения каждый раз на другом индивидууме, то получим технику, которая на диаграмме изобразится полосой, проходящей по диагонали между техниками P и R. Хорст [142; *3*] говорит не о различных техниках, а о категориях вариации (*categorial variation*). Здесь нет необходимости увеличивать список терминов для обозначения различных подходов к факторному эксперименту. Судя по доступным в настоящее время материалам, не все техники нашли еще широкое применение. При выборе техники перед анализом выясняется, каким требованиям должны удовлетворять факторы, лежащие в основе матрицы исходных данных.

При обсуждении проблем факторного анализа часто возникает вопрос: можно ли провести факторный анализ по исходным данным, представленным в трехмерном пространстве? Классический факторный анализ ограничивается матрицей порядка ($m \times n$), где m — переменные (признаки), а n — индивидуумы (объекты). Это было бы большим достижением в факторном анализе — создать методику факторного эксперимента для матрицы исходных данных в многомерном пространстве, не представляя ее каждый раз последовательно в двух направлениях, как это обычно делается сейчас (признаки — объекты). Хорст [142; *3*] дал обзор возникающих при этом возможных вариантов. Новейшие работы Тукера, Хорста и Левина посвящены распространению методов факторного анализа на матрицу исходных данных в многомерном пространстве. В настоящее время остается только выжидать, какой из предлагаемых подходов к таким матрицам оправдает себя на практике.

В заключение следует указать на то, что метод факторного анализа можно применить к результатам классического эксперимента. В этом случае в матрицу исходных данных наряду с обычными наблюдаемыми величинами вводят в качестве переменных варьирование условий эксперимента. Каттелл в своей книге [35; *4*] рассмотрел несколько подходов к решению таких задач. Но они не нашли пока практического применения. Теоретически эти подходы также еще не разработаны, на что указал Уолш [300]. В справочнике, изданном под редакцией Каттелла [35; *21*], этот вопрос с указанием примеров затрагивается Фрюхтером. Применение факторного анализа к результатам классического эксперимента, в котором произвольно варьируют факторами, позволит использовать достоинства факторного и дисперсионного анализа. Соединение этих двух методов многомерного статистического анализа вполне возможно и перспективно, хотя еще полностью теоретически не разработано.

8.2. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА К ДАННЫМ, ЯВЛЯЮЩИМСЯ РЕЗУЛЬТАТАМИ ИЗМЕРЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

До сих пор мы имели дело в основном с коэффициентами корреляции между случайными величинами, которые представляли собой количественные характеристики элементов совокупности. Примерами таких величин могут служить длина изделий в сантиметрах или их вес в граммах. Количественные характеристики меняют свои значения при переходе от одного элемента совокупности к другому. Интервал между 1 и 2 равен интервалу между другими значениями элементов, которые отличаются на единицу. Но имеется ряд показателей, которые не обладают этим свойством. Так несопоставимы между собой различия в школьных оценках между 1 и 2, 4 и 5.

Отдельные значения признака можно упорядочить, руководствуясь местом, которое занимает на шкале измерения каждый объект. В зависимости от используемой шкалы оценок различают четыре способа шкалирования (см. Гилфорд [108; *2*]). При применении *номинальной шкалы* каждый объект наблюдения относится к определенной группе, обозначенной соответствующим числом. Мужчины могут, например, относиться к группе с номером 1, женщины — к группе с номером 2, а дети — к группе с номером 3. Последовательность номеров при таком способе шкалирования может быть любой. В качестве меры взаимосвязи двух величин в этом случае служит коэффициент взаимной сопряженности. Если он статистически значим, то делают вывод, что частоты в таблице сопряженности распределены не независимо от значений признака. Но он не обладает одним интересным свойством коэффициента парной корреляции, а именно коэффициент сопряженности не отражает направление связи. При использовании *порядковой шкалы* оценок речь идет о ранжировании, аналогичном проставлению школьных оценок. При этом, например, соблюдается порядок $1<2<3<4<5$.

Знак $<$ означает, что объект с данным рангом является лучше другого в каком-то определенном смысле. Путем сопоставления объектов по какому-либо признаку происходит их упорядочение. В каком направлении устанавливается порядок предпочтения, безразлично. Важно только то, что, например, школьник с оценкой 1 успевает по данному предмету лучше, чем школьник с оценкой 2*. Для проверки степени соответствия между двумя последовательностями порядковых оценок служит коэффициент корреляции рангов Спирмэна. При альтернативных данных, представленных в четырехклеточной таблице, в качестве меры взаимосвязи употребляется указанный ранее φ-коэффициент (формула 7.1). Альтернативные данные получают, когда производится классификация на основании наличия или отсутствия некоторого признака. Например, устанавливая различия по какому-либо признаку между мужчинами и женщинами, одному полу присваивают оценку 1, другому — оценку 2. Использование номинальной шкалы не позволяет произвести такое упорядочение. При *интервальном шкалировании* оценок расстояние на шкале между элементами рассматриваемой совокупности одинаково. Единица измерения не изменяется при переходе из одной области шкалы в другую. Школьные оценки этим свойством не обладают. При интервальном шкалировании связь между двумя величинами оценивается по обычному коэффициенту корреляции. Имеется еще один тип шкал, это так называемая *шкала отношений* (*ratio scale*). Эта шкала редко используется в исследованиях поведения человека. В качестве меры взаимосвязи и здесь служит обычный коэффициент корреляции.

Элементами исходной матрицы в факторном анализе являются парные коэффициенты корреляции, хотя факторный анализ может быть проведен и по другим показателям взаимосвязи (см. Слейтер [267]). Коэффициенты корреляции могут быть вычислены по результатам интервального шкалирования. Однако в большей части исследований, проведенных в настоящее время с помощью факторного анализа, оперировали рангами, примером которых могут служить школьные оценки. Большинство психометрических величин нельзя выразить точнее, так как даже теоретически их трудно количественно измерить. Поэтому по рангам часто определяется обычная корреляционная матрица и по ней проводится факторный анализ. Строго говоря, этого делать нельзя, но практика показывает, что использование вместо ранговых показателей связи обычных парных коэффициентов корреляции приводит к небольшим ошибкам. Вообще порядковую шкалу можно рассматривать как хорошее приближение к интервальной шкале. Какое влияние на результат факторного анализа оказывает переход от интервальной шкалы к порядковой и использование вместо коэффициента корреляции Пирсона коэффициентов корреляции рангов — пока не выяснено.

При применении порядковой шкалы часто классификацию признака производят с помощью решений «да-нет» (наличие некоторого признака обозначают знаком 0, а отсутствие — знаком 1). Затем составляется четырехклеточная таблица и по ней вычисляется φ-коэффициент.

---

* В немецких школах эти оценки соответствуют пятерке и четверке в советских школах. — *Примеч. пер.*

Этот показатель связи только тогда равен единице, когда в качестве разделяющего элемента при разбиении на две группы признаков используется медиана. В качестве первого приближения можно согласиться с тем выводом, полученным в 7.3.3 на моделях, что при четкой структуре данных и тесной связи между переменными переход от количественных измерений к альтернативным данным не окажет сильного влияния на факторное решение. Но необходимо более тщательное изучение этого вопроса при различных структурах данных в генеральной совокупности. Желательно по возможности избегать проведения факторного анализа по данным, классифицированным по номинальной шкале. Коэффициенты сопряженности, которые при таких данных используются как мера связи, не отражают направления этой связи, и все элементы корреляционной матрицы R имеют положительный знак. Слейтер указал метод выделения факторов непосредственно по наблюдаемым частотам четырехклеточной таблицы без вычисления коэффициентов сопряженности. Выделенные факторы получаются в нестандартизованном виде.

Часто не все переменные, включенные в анализ, классифицируются по одной и той же шкале. Часть переменных может быть представлена в виде рангов наподобие школьных оценок, а некоторые — в виде альтернативных данных, например при исследовании пола. Если в анализе преобладают признаки с количественной вариацией, то вполне обоснованно применение в качестве показателя степени тесноты связи коэффициента корреляции Пирсона. Если же больше признаков с качественной вариацией, то вычисляют матрицу коэффициентов корреляции рангов. При этом часть информации, которая содержится в данных, являющихся результатами количественных измерений, теряется. Если в анализе преобладают альтернативные данные, то исходят из матрицы, элементами которой являются φ-коэффициенты. В этом случае при наличии количественных признаков теряется еще больше информации. Вообще влияние на результат факторного анализа различных способов шкалирования оценок пока мало изучено. Но ясно,что корреляционная матрица, по которой производится факторизация, должна состоять из одного вида показателей связи.

Хотя применение факторного анализа к данным, являющимся результатами измерения качественных признаков, связано со многими не решенными еще проблемами, это не означает, что нужно избегать использования таких данных при конкретных исследованиях. Нужно только при интерпретации результатов учитывать, что могут возникнуть дополнительные погрешности, которые могут носить как случайный, так и систематический характер.

8.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

До сих пор мы в факторном анализе исходили из матрицы исходных данных, непосредственно полученных в результате эксперимента. Однако иногда бывает полезно преобразовать исходные данные. Этот вопрос, подобно только что рассмотренному нами в гл. 8.2, еще мало изучен.

К преобразованию исходных данных обычно прибегают для того, чтобы перейти от нелинейной связи между переменными к линейной. Это связано с тем, что коэффициент парной корреляции непригоден для оценки степени тесноты связи между переменными, если связь между ними нелинейная. Путем соответствующих преобразований, например путем логарифмирования, извлечения квадратного корня и т. д., пытаются достигнуть линейной связи между переменными, но это не всегда удается. Трудность заключается в подборе функции преобразования.

Проблема преобразования переменных вызывает много споров. В факторном анализе дело осложняется тем, что нельзя преобразовывать только одну переменную или часть их, так как при таком подходе может возникнуть фактор, обусловленный в основном этим преобразованием. Преобразование же всего набора переменных тоже может вызвать нежелательный эффект. Дело в том, что нередко между частью переменных существует линейная связь. Тогда при линеаризации всего набора первоначальные линейные связи между переменными трансформируются. Вопрос подбора такой функции преобразования, которая бы как можно больше связей между переменными, входящими в корреляционную матрицу, приводила к линейной форме, еще окончательно не решен. В настоящее время при большом числе переменных преобразование чаще всего не приводит к желаемому эффекту, так как больше линейных связей теряют, чем приобретают.

Хорст [142; *3*] дал обзор методов преобразования матрицы исходных данных, когда все переменные подвергаются преобразованию. Этим же вопросом занимался Каттелл [35; *4*, *18*]. Формально способы преобразования разделяются на две группы. В первой группе способов смещается среднее значение (по строкам или столбцам матрицы исходных данных). Во второй группе способов изменяют также стандартное отклонение. Заранее ясно, что преобразование оказывает влияние на результат факторного анализа. Шкалирование величин, т. е. выбор единицы измерения или стандартного отклонения, связано также с проблемой общности. Имеются такие методы факторного анализа, применение которых дает решения, не зависящие от выбранной шкалы оценок значений переменных (например, канонический факторный анализ, см. 3.5.1—3.5.3). Но, к сожалению, это нельзя утверждать относительно самого распространенного метода факторного анализа — метода главных факторов.

Рассмотрим три способа преобразования матрицы исходных данных, заключающиеся в том, что средние значения переменных или средние значения результатов наблюдений над переменными у каждого индивидуума, или и те и другие вместе приводятся к нулю. Это преобразование может применяться к матрицам, у которых переменные соответствуют строкам, а индивидуумы — столбцам, и наоборот.

Преобразование строк матрицы исходных данных. Пусть в матрице $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ строки соответствуют m переменным, а столбцы — n индивидуумам. Чтобы среднее значение каждой переменной было равно нулю, из всех значений элементов строки вычитается соответствующее среднее значение переменной. Это можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Y}_z = \mathbf{Y}\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{11}'}{n}\right). \tag{8.1}$$

В формуле 8.1, $\mathbf{I}$ — тождественная матрица, $\mathbf{1}$ — вектор-столбец, все элементы которого равны единице, а $\mathbf{Y}_z$ — матрица исходных данных, строки которой преобразованы так, что средние значения их элементов равны нулю. Матрица в скобках имеет порядок n. Диагональные элементы ее равны $1 - 1/n$, а внедиагональные — $(-1/n)$. Легко можно убедиться, что матрица $\mathbf{Y}_z$ содержит отклонения отдельных значений от соответствующих средних значений по строкам. Для наглядности запишем (8.1) в более подробном виде:

$$\mathbf{Y}_z = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \cdot \;\cdots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Для первого элемента матрицы $\mathbf{Y}_z$ получим: $y_{11}^{(z)} = y_{11} - y_{11}/n - y_{12}/n \ldots - y_{1n}/n = y_{11} - \bar{y}_1$. Аналогично получаются выражения остальных элементов матрицы, как отклонения значений элементов матрицы $\mathbf{Y}_z$ от средних значений по строкам. Матрицу $\mathbf{Y}_z$ называют центрированной справа матрицей исходных данных, или центрированной по строкам. Хорст [142; *3*] этот способ преобразования называет преобразованием с увеличением (*major transformation*), так как размер матрицы преобразования больше размера матрицы $\mathbf{Y}$. Итак, все переменные стали центрированными величинами, средние значения которых равны нулю. Этот способ преобразования не изменяет величину коэффициента корреляции между переменными. Поэтому можем записать:

$$1/n\, \mathbf{Y}_z \mathbf{Y}_z' = 1/n\, \mathbf{YY}' = \mathbf{R}. \tag{8.2}$$

Следует иметь в виду, что ковариационная матрица при таком преобразовании переменных изменится. Но так как в факторном анализе мы исходим из корреляционной матрицы, переход к центрированным величинам, не окажет влияния на его результат.

Преобразование столбцов матрицы исходных данных. Аналогичным образом можно преобразовать столбцы матрицы исходных данных так, чтобы среднее значение элементов каждого столбца было равно нулю. Для этого матрица исходных данных умножается слева на квадратную матрицу в скобках порядка m:

$$\mathbf{Y}_s = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{11}'}{m}\right)\mathbf{Y}. \tag{8.3}$$

Матрица $\mathbf{Y}_s$ называется центрированной слева или центрированной по столбцам. Хорст [142, *3*] этот способ преобразования называет преобразованием с уменьшением (*minor transformation*). В матрице $\mathbf{Y}_s$ все значения элементов столбцов являются центрированными, т. е. их средние значения равны нулю. Выполнять такое преобразование имеет смысл тогда, когда хотят сравнить различные переменные на одном индивидууме, а различием между индивидуумами не интересуются. Такая задача может возникнуть, например, при изучении мотивов поведения людей, когда всем лицам приписывается одинаковый характер поведения (поэтому средние значения приводятся к нулю), а индивидуальные особенности сильно варьируют. Анализ с такими данными (*ipsatized scores*) проводился многими исследователями (см., например, Каттелла, Максвелла, Лайта и Унгера [45]; Каттелла и Баггалея [36]; Каттелла и Хорна [43], а также Каттелла [35; *18*]). Сравнение результатов факторного анализа, проведенного по обычной матрице исходных данных и по матрице с преобразованными столбцами, показывает, что при этом преобразовании число выделенных факторов уменьшается на один. Соответствующий пример и сравнение двух результатов приведены у Райта [322].

Преобразование столбцов и строк матрицы исходных данных. Оба способа преобразования, описанные выше, можно выполнить последовательно друг за другом на одной и той же матрице исходных данных. В результате получают матрицу, элементы которой по строкам и столбцам имеют средние значения, равные нулю. Такую матрицу называют матрицей с двойным преобразованием, или дважды центрированной. Процесс преобразования можно представить в матричной форме таким образом:

$$\mathbf{Y}_{zs}=\left(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{m}\right)\cdot\mathbf{Y}\cdot\left(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{n}\right). \tag{8.4}$$

Результаты матричного анализа, проведенного по матрице $\mathbf{Y}_{zs}$, будут отличаться от результатов анализа по первичной матрице исходных данных $\mathbf{Y}$. Хорст в своей книге [142; *3*] установил связь между результатами факторных анализов, проведенных по ковариационным матрицам. Ковариационные матрицы были вычислены по матрице исходных данных, подвергнутой преобразованию дважды, а также центрированной справа и отдельно слева. Вопросы эквивалентности и взаимосвязи между факторными решениями при подобного рода преобразованиях еще до конца не изучены.

Возможны и другие преобразования матрицы исходных данных. Очень редко переменные преобразовывают так, что их средние становятся равными не нулю, а каким-то другим определенным значениям. В некоторых случаях матрицу исходных данных нормируют по строкам или столбцам путем деления значений элементов на соответствующие стандартные отклонения. У нормированной таким образом матрицы стандартные отклонения значений элементов по строкам или соответственно по столбцам равны единице. Какое влияние на факторное решение оказывают подобные преобразования матрицы исходных данных, остается пока еще не выясненным.

8.4. ОБЗОР МЕТОДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ НАРЯДУ С ФАКТОРНЫМ АНАЛИЗОМ

Имеется ряд методов, которые более или менее тесно связаны с факторным анализом и используются для решения некоторых специфических задач. Эти методы не изолированы, а проникают и переходят один в другой. Поэтому провести четкие границы между ними очень трудно. Пока также не удалось найти формальных путей перехода от одного к другому. Далее кратко, не останавливаясь на практических приложениях, опишем три таких метода многомерного статистического анализа, ограничившись только принципиальной постановкой вопроса. В гл. 8.6 будут рассмотрены еще несколько методов. Место факторного анализа среди многомерных статистических методов мы уже установили в гл. 2.5.

8.4.1. Кластерный анализ

Задача кластерного анализа (*cluster-analyse*) состоит в разбиении множества точек на кластеры (подмножества, *cluster*) так, чтобы каждая точка принадлежала одному и только одному подмножеству разбиения. При этом в каждом подмножестве разбиения точки лежат плотно друг к другу и являются сходными, в то время как точки, принадлежащие разным подмножествам, являются разнородными. Точки могут быть переменными, индивидуумами и другими величинами, которые содержатся в матрице исходных данных. Трион [289; *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*] ввел определение кластерного анализа и много работал в этой области. В принципе задача кластерного анализа сводится к разработке определенного правила, или алгоритма, с помощью которого можно осуществлять разбиение точек на группы. При этом остается неизвестно, действительно ли найденные группировки являются наилучшими. В кластерном анализе при построении процедуры группировки используется *В-коэффициент*, или *коэффициент принадлежности* (*coefficient of belonging*), вычисляемый по ранее указанной формуле (3.32). При этом не разработано никакого удовлетворительного статистического критерия, который позволял бы оценить проведенное разбиение и принадлежность точки к определенной группе. При проведении кластерного анализа на моделях с четкой структурой отсутствие такого критерия не сказывается на качестве решения, но по данным реального исследования редко можно найти хорошую группировку. Вычислительная процедура кластерного анализа приведена у Фрюхтера [101]. Янг предложил для группировки перемеиных показатель кластеризации «*index of clustering*», который не связан с числом факторов в факторном анализе [326].

На рис. 8.3. сравниваются графически оба метода. Векторы являются переменными в пространстве общих факторов. Двух факторов вполне достаточно для объяснения связей между этими переменными. Задачей кластерного анализа является разбиение переменных на группы, наиболее отдаленные друг от друга. Для случая, изображенного на рис. 8.3, их можно разбить на три кластера. Одной из задач факторного анализа является снижение размерности набора переменных путем выделения скрытых за ними факторов, адекватно описывающих изучаемое явление. При вращении системы координат, осуществляемом при поиске простой структуры, кластеры часто располагаются вблизи гиперплоскостей координат. Кластерный анализ не связан с получением наилучших проекций совокупности точек наблюдения в пространстве меньшей размерности и выделением скрытых, но объективно существующих факторов. Кластерный анализ остается на уровне непосредственно наблюдаемых величин и пытается агрегировать их в определенные группы. Каттелл [35] выступал с критикой этого метода, приводя различную аргументацию. Так, он утверждал, что при переходе от выборки к выборке отдельные группировки переменных различаются между собой больше, чем выделенные факторы. Мы не можем полностью согласиться с этим выводом. Для его подтверждения нужны более обстоятельные исследования. Во всяком случае, число кластеров не связано с числом выделенных факторов, что нашло отражение на рис. 8.3.

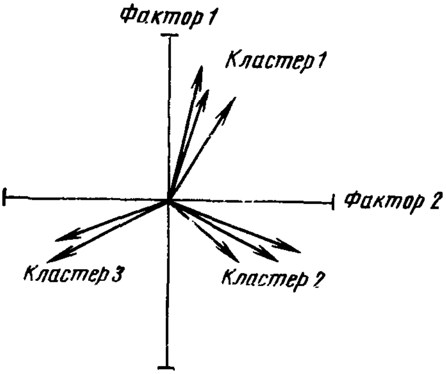


Рис. 8.3. Кластерный и факторный анализ. Число кластеров и число факторов не связаны непосредственно между собой, например кластеров может быть больше, чем факторов

В кластерном анализе отсутствует проблема общности и отпадает необходимость вращения. Трион [289; 2] был против применения факторного анализа и выступал в защиту кластерного. В качестве одного из аргументов он использовал тот недостаток модели факторного анализа, что факторные нагрузки a_{il} принимаются одинаковыми для всех индивидуумов. Это аргумент очень веский, и его невозможно опровергнуть. На основании всех дискуссий по поводу достоинств и недостатков кластерного и факторного анализа между противниками и сторонниками обоих видов анализа пока еще нельзя сформулировать четких правил, когда и какой анализ применять. Можно лишь утверждать, что выбор метода каждый раз зависит от постановки задачи исследования. Если целью исследования является нахождение группировок переменных или индивидуумов без выявления факторов, объясняющих связи между ними, то применяют одну из процедур кластерного анализа. Когда же отыскивается подтверждение наиболее простой гипотезы о факторах, определяющих взаимосвязи между наблюдаемыми переменными, то применяют факторный анализ. Как видно из постановки задач, кластерный анализ занимается классификацией объектов наблюдения или индивидуумов, а факторный анализ занимается исследованием связей между ними, и оба метода не исключают, а дополняют друг друга. Например, можно после решения задач факторного анализа находить в пространстве общих факторов группировки переменных, лежащих близко друг к другу. К сожалению, неизвестны никакие аналитические выражения, устанавливающие возможность перехода от одного метода к другому. Итак, задача кластерного анализа есть, по существу, задача классификации многомерных наблюдений, на которой мы еще подробнее остановимся в гл. 8.5.

8.4.2. Анализ образов

Интересный подход к решению задач факторного анализа предложил Гуттман [112; *5*, *8*]. Он разработал две концепции, которые стимулировали развитие новых направлений в факторном анализе. Первая из них послужила основой развития анализа образов (*image-analyse*), который мы здесь кратко опишем, а вторая явилась основой разработки радекс-теории (*radex*), на которой мы не будем останавливаться, ограничившись только ее названием. Обе концепции вызвали оживленную дискуссию. В анализе образов пытаются найти иерархическую структуру переменных, отличную от структуры, определяемой в факторном анализе.

Первая фундаментальная работа, посвященная анализу образов, принадлежит Гуттману [112, *4*]. Она была опубликована в 1953 г. Гуттман занимался анализом структуры количественных данных и при этом исходил не из частных коэффициентов корреляции, которые приводят к классическому факторному анализу, а из коэффициентов множественной регрессии. Каждую переменную Гуттман предлагает оценивать с помощью метода множественной регрессии по остальным $(m-1)$ переменным. Значения переменной, вычисленные по уравнению множественной регрессии, представляют собой первую часть этой переменной, названную им «образом». Значения «образа-переменной» целиком определяются другими переменными. Дополнение до наблюдаемой переменной является ее «антиобразом». Эта вторая часть переменной полностью независима от других наблюдаемых переменных и обусловлена погрешностями. Обе части переменной, которые могут быть однозначно определены по корреляционной матрице и матрице исходных данных, далее рассматриваются раздельно. Гуттман рекомендует работать дальше с теми значениями переменной, которые были предсказаны по уравнению множественной регрессии, так как только эта часть переменной имеет общую дисперсию с остальными переменными. При оценке значений переменных-образов для отдельных индивидуумов необходимо решать систему из многих уравнений. Поэтому обычно от этого отказываются. Ковариационные матрицы для переменных-образов и переменных-антиобразов легко вычисляются непосредственно по матрице исходных данных. Ковариационная матрица, вычисленная для переменных-антиобразов, тесно связана с матрицей частных коэффициентов корреляций между каждыми двумя переменными при фиксированных значениях остальных. При вычитании матрицы для переменных-антиобразов из ковариационной матрицы для переменных-образов получают обычную корреляционную матрицу. Более подробно с этим методом можно познакомиться у Гуттмана [112; *4*], Каттелла [35; *21*] и Харриса [120; *4*].

Хорст [142; *3*] сопоставил между собой четыре подхода к анализу переменных-образов. Общим для них является то, что анализ начинается с ковариационной матрицы для переменных-образов, оцененных по соответствующим (m — 1) переменным. До настоящего времени известно только несколько работ по анализу переменных-образов. Однако концепция этого анализа заслуживает внимания.

8.4.3. Анализ латентных структур

Анализ латентных структур (*latent structure analysis*) был предложен Лазарсфельдом [1]. Метод разработан для альтернативных данных и решает, какое количество таких данных может перейти приблизительно в измеряемые величины. Из наблюдаемых переменных, которыми могут являться, например, ответы в форме «да-нет» на вопросы анкеты, должна быть построена латентная структура. Она состоит из латентных классов и указания вероятностей положительных ответов на вопрос внутри каждого класса. В основе метода лежит требование, чтобы наблюдаемые индивидуумы разделились на r однородных классов и именно так, чтобы ответы на различные вопросы внутри такого класса не зависели друг от друга. При удовлетворении этого требования можно по данным выделить латентные классы и указать вероятности ответов на поставленные вопросы. Доступное объяснение этого метода содержится в статье Лазарсфельда [185; *2*]. Дальнейшее развитие метода и сопоставление с теорией тестов имеется в его работе [185; *3*].

Анализ латентных структур по сравнению с факторным анализом имеет ряд преимуществ, а именно отпадают проблема общности, проблема вращения, а также требование линейной связи между переменными и факторами. Кроме того, может быть определена точность, с которой найденное решение аппроксимирует данные. Ряд вопросов остается пока не решенным. Грин [107] и Андерсон [5; *3*] указывают методы оценивания латентных параметров, но полученные оценки являются довольно грубыми. Еще недостаточно разработаны вычислительные процедуры и отсутствуют программы для вычисления на ЭВМ. Пока еще мало было проведено исследований с применением метода. Добавление новых переменных оказывает на решение такое же влияние, как и добавление новых переменных на факторное решение. В факторном анализе эффект влияния новых переменных был исследован Дуайером [79], а в латентном анализе — Гибсоном [105; 3]. Гибсон также перенес метод на анализ количественных данных, назвав его латентно-профильным анализом (*latent profile analysis*) [105; *1*].

Кроме трех вышеназванных методов, заслуживает внимания ряд других методов. Макдональд [195; *1*] приводит краткий обзор нелинейных моделей факторного анализа и процедур анализа латентных структур. Он предложил также свой подход к анализу данных при нелинейной связи между наблюдаемыми данными и латентными величинами. Гибсон [105; *2*] также занимался проблемой нелинейности связи в факторном анализе. Установлена тесная зависимость между факторным анализом и многомерным шкалированием (например, Торгерсон [288], Сикстл и Вендер [266], Шепард [262].

8.5. ПРОБЛЕМА НЕОДНОРОДНОСТИ

Известно, что наличие в совокупности двух групп индивидуумов (например, мужчин и женщин), средние значения изучаемых признаков которых различаются между собой, может привести к ложной корреляции. Ложная корреляция возникает тогда, когда неоднородность проявляется по тем признакам, между которыми определяют связь. На проблему неоднородности указывал Коллер [176; *1*, *2*]. Корреляция может быть вызвана, например, различием между полами, хотя при рассмотрении групп, состоящих только из мужчин или из женщин, связь между исследуемыми признаками отсутствует. На рис. 8.4 схематично изображен этот случай. Неоднородность данных может, наоборот, затушевать корреляцию или изменить ее знак. Так как факторный ана-

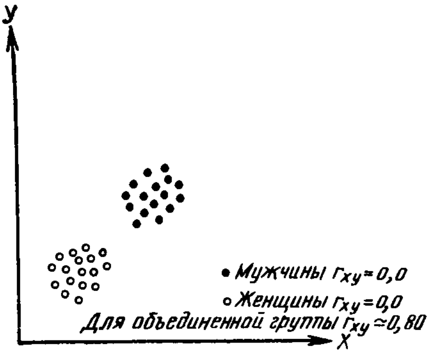


Рис. 8.4. Схематичный пример возникновения корреляции из-за неоднородности данных. Между изучаемыми признаками x и y как для группы мужчин, так и для группы женщин не существует связи. Но так как у группы мужчин все значения признаков x и y больше, чем у женщин, то коэффициент корреляции, вычисленный в целом по обеим группам, получается значительным по величине

лиз исходит из корреляций между переменными, то неоднородность данных оказывает влияние также на факторное решение. На это обращал внимание уже Тэрстоун [286; *3*]. Далее на нескольких примерах, сконструированных как модели, показывается влияние неоднородности на факторную структуру. Для этого привлекается числовой пример, с которым мы уже ранее имели дело (табл. 7.5 и 7.6).

К матрице данных рассмотренного примера[1] добавляется вторая матрица с данными, представляющими результат наблюдения над теми же самыми 10 переменными у 200 индивидуумов. Определяется корреляционная матрица по всем данным. При этом переменные и 2-й группы наблюдений приводятся к стандартной форме. Среднее значение стандартизованных переменных равно нулю, а стандартное отклонение — единице. Коэффициенты корреляции между этими переменными равны коэффициентам корреляции, указанным в табл. 7.6, т. е. факторная структура двух корреляционных матриц известна, и они идентичны. Если ко всем значениям переменных второй группы данных прибавить постоянную величину, то их средние значения станут равными этой постоянной величине. Коэффициенты корреляции между переменными для этой группы данных не изменятся. Если принять эту

[1] В табл. 7.5 и 7.6 приведены матрицы коэффициентов корреляции между 10 переменными, вычисленных по 200 индивидуумам.

постоянную величину a равной 3, то объединенная совокупность данных будет отличаться своей неоднородностью. Можно показать, что если первоначальный коэффициент корреляции между двумя переменными, приидалежащими двум группам данных, равен r_{xy}, то коэффициент корреляции, вычисленный по объедииенной совокупности данных при указанных выше условиях, будет равен [1]:

$$r_{XY} = \frac{r_{xy} + \frac{1}{4}ab}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\left(1+\frac{b^2}{4}\right)}},$$

где a и b являются постоянными, на величину которых смещаются средние значения переменных x и y. Через X и Y обозначены переменные объединенной совокупности данных. Введем новую переменную, обозначив ее через Y. Причем она будет принимать значение, равное нулю, для индивидуума, принадлежащего к первой группе данных, и принимать значение, равное единице, для индивидуума, принадлежащего ко второй группе данных [2]. Коэффициент корреляции между этой иовой переменной Y и переменной X для объединенной совокупности данных равен:

$$r_{XY} = \frac{a}{2\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}}.$$

С помощью этих двух формул были вычислены соответствующие коэффиценты корреляции по элементам корреляционной матрицы, приведенной в табл. 7.6, причем вводились различные условия, вызывающие неоднородность данных. Затем по полученным корреляционным матрицам был проведен факторный анализ, включающий в себя варимакс-вращение, и было проведено сравнение с результатом варимакс-решения в табл. 7.5.

Пример 1. Прибавляем ко всем значениям первой переменной во второй группе данных постоянную $a = +3$. Коэффициенты корреляции между ней и другими переменными изменяются по сравнению со значениями, приведенными в табл. 7.6. В табл. 8.1 представлены лишь те коэффициенты корреляции, величина которых изменилась по сравнению с указанными в табл. 7.6.

Пример 2. Включаем в матрицу данных 11-ю переменную, чтобы проследить влияние неоднородности данных на факторное решение. Маркировочная переменная принимает значение, равное нулю, для индивидуума, принадлежащего к первой группе данных, и значение, равное единице, для индивидуума, принадлежащего ко второй группе данных. Коэффициенты корреляции между этой переменной и осталь-

[1] Формулу можно легко получить, поэтому мы не приводим ее вывода.

[2] Такая переменная является типичным примером маркировочной переменной. Она вводится для выявления фактора, обусловленного неоднородностью данных.

Таблица 8.1

Коэффициенты корреляции, изменившиеся по сравнению с приведенными в табл. 7.6 из-за неоднородности данных

Переменная	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Переменная 1	—0,295	0,315	—0,293	0,267	—0,070	0,050	0,062	0,013	—0,002	0,832
Переменная 11	0,045	0,016	0,004	—0,079	0,030	—0,035	—0,049	—0,057	—0,079	

ными переменными, вычисленными по выборке, состоящей из 400 индивидуумов, также указаны в табл. 8.1. Результаты факторизации корреляционных матриц этих двух примеров с применением варимакс-вращения приведены в табл. 8.4, где они противопоставлены первоначальному факторному решению, полученному по однородным данным. Если причиной неоднородиости является преобразование одной переменной, то факторное отображение изменяется лишь постольку, поскольку общность этой переменной уменьшается. Лишь во втором примере маркировочная переменная 11 вызывает появление третьего фактора, фактора неоднородности, и значительно его нагружает. В то время как отдельные коэффициенты корреляции при введении неоднородности уменьшились, факторное отображение изменилось незначительно. Неоднородность, обусловленная новой переменной, вызвала появление нового фактора.

Пример 3. К значениям первых трех переменных второй матрицы исходных данных прибавляем постоянную $a = 3$, т. е. усиливаем неоднородность данных.

Пример 4. Дополнительно к условиям примера 3 вводим маркировочную переменную 11.

Корреляционная матрица этих двух примеров приведена в нижнем углу табл. 8.2. При сравнении с табл. 7.6. бросается в глаза, что из-за неоднородности данных некоторые коэффициенты корреляции изменяются очень сильно (например, коэффициент корреляции между 2-й и 3-й переменными изменил свое значение — 0,546 на + 0,524!). Несмотря на это, факторное отображение изменилось мало, что видно из табл. 8.4, так как наряду с неоднородностью еще действуют первоначальные связи между переменными и факторами. Но нагрузки переменных 1—3 на первый фактор уменьшились. В обоих последних примерах возникает третий фактор, вызванный неоднородностью данных. Он имеет значительные нагрузки от переменных 1—3, а также 11.

Примеры 5 и 6. К значениям первых пяти переменных прибавляем постоянную величину $a = +3$. Эти переменные нагружают первый фактор. Следовательно, неоднородность присуща тем переменным, которые определяют первый фактор. Такая ситуация осложняет обнаружение влияния неоднородности на этот фактор. В примере 6 дополнительно вводится маркировочная переменная. Корреляционная матрица для этих двух примеров приведена в правом верхнем углу табл. 8.2.

Таблица 8.2

Корреляционные матрицы для примеров 3 и 4 (в нижнем левом углу) и для примеров 5 и 6 (в верхнем правом углу)[1]

		1 +3	2 +3	3 +3	4 +3	5 +3	6 —	7 —	8 —	9 —	10 —	(11) —	a
1	+3		0,530	0,867	0,530	0,847	—0,070	0,050	—0,062	0,013	—0,002	0,832	+3
2	+3	0,530		0,524	0,854	0,535	0,069	—0,026	0,002	—0,007	0,047	0,832	+3
3	+3	0,867	0,524		0,538	0,848	—0,087	—0,001	0,028	0,007	—0,042	0,832	+3
4	—	—0,293	0,291	—0,278		0,522	0,033	—0,044	—0,047	—0,066	0,040	0,832	+3
5	—	0,267	—0,284	0,281	—0,522		—0,016	—0,005	0,010	0,014	—0,013	0,832	+3
6	—	—0,070	0,069	—0,087	0,059	—0,028		0,544	0,500	—0,439	0,567	—0,025	—
7	—	0,050	—0,026	—0,001	—0,079	—0,009	—0,544		0,419	0,485	—0,543	0,003	—
8	—	0,062	0,002	0,028	—0,084	0,018	0,500	—0,419		—0,448	0,420	0,056	—
9	—	0,013	—0,067	0,007	—0,119	0,025	—0,439	0,485	—0,448		—0,452	0,126	—
10	—	—0,002	0,047	—0,042	0,072	—0,023	0,567	—0,543	0,420	—0,452		0,048	—
(11)	—	0,832	0,832	0,832	—0,007	—0,049	0,057	0,080	0,059	0,029	—0,010		—
a		+3	+3	+3		—	—	—	—	—	—		

[1] В таблице указана постоянная a, которая прибавляется к значениям соответствующих переменных. Переменная 11 является маркировочной. Она вводится только в примеры с четными номерами. Коэффициенты корреляции между этой переменной и остальными переменными вычисляются по выборке объемом $n=400$.

Из табл. 8.4 видно, что в результате процедур факторного анализа выделяются три фактора. Третий фактор определяется переменными 1—5 и его появление вызвано введением неоднородности. По сравнению с исходным факторным отображением нагрузки второго фактора остаются практически без изменения, а у некоторых нагрузок первого фактора изменяются знаки. Нагрузки факторов I и III от переменных 1—5 положительны и носят противоположный характер. Содержательная интерпретация первого фактора в данном примере вызвала бы значительные затруднения. Маркировочная переменная в примере 6 показывает, что неоднородность данных сыграла определенную роль в изменении нагрузок первого фактора.

Примеры 7 и 8. К значениям 1-й и 3-й переменных прибавляется постоянная $a = +3$; к значениям 2-й переменной — постоянная $a = -3$. Корреляционная матрица приведена в левом нижнем углу табл. 8.3. Некоторые коэффициенты корреляции в этой матрице значительно изменились по сравнению с элементами исходной матрицы и матрицы примеров 3 и 4. В примере 7 неоднородность данных полностью обусловливает появление третьего фактора, который имеет высокие положительные нагрузки от 1-й и 3-й переменных и высокую отрицательную нагрузку от 2-й переменной. Следовательно, неоднородность здесь выступает как отдельный фактор — фактор неоднородности [1]. Маркировочная переменная показывает, что неоднородность данных почти не повлияла на факторы I и II.

Примеры 9 и 10. К значениям 1, 3 и 5-й переменных прибавляется постоянная $a = +3$, а к значениям 2-й и 4-й переменных — постоянная $a = -3$. Корреляционная матрица приведена в верхнем правом углу табл. 8.3. В этом случае фактор неоднородности совпадает с первым фактором. Следствием этого является усиление связи первых пяти переменных с первым фактором, и его нагрузки от этих переменных увеличиваются по сравнению с исходными. Структура фактора и знаки его нагрузок не изменяются. Факторное решение примера 10 после применения процедуры варимакс-вращения совпадает в основном с факторным решением примера 9 и из-за отсутствия места в таблице не приводится [2].

Приведенные примеры, в которых моделировалась неоднородность, позволяют сделать следующие выводы:

1. Неоднородность данных может привести к появлению фактора, обусловленного только этой неоднородностью [3]. Если он совпадает с каким-либо фактором, то нагрузки этого фактора увеличиваются по

[1] Если к значениям 1-й и 3-й переменных прибавить постоянную $a = -3$, а к значениям 2-й переменной — постоянную $a = +3$, то матрица коэффициентов корреляций между этими переменными совпадает с исходной корреляционной матрицей.

[2] Неоднородность данных может привести к ослаблению как положительных, так и отрицательных снязей между переменными. Следствием этого может явиться исчезновение одного фактора. В наших примерах заданная исходная структура при моделировании различных неоднородностей не привела к такому результату.

[3] По крайней мере некоторым данным должна быть присуща неоднородность, так как иначе не может появиться общий фактор.

Таблица 8.3

Корреляционные матрицы для примеров 7 и 8 (в нижнем левом углу) и для примеров 9 и 10 (в верхнем правом углу)[1]

		1 +3	2 —3	3 +3	4 —3	5 +3	6 —	7 —	8 —	9 —	10 —	(11) —	a
1	+3		—0,856	0,867	—0,855	0,764	—0,070	0,050	0,062	0,013	—0,002	0,832	+3
2	—3	—0,856		—0,860	0,854	—0,850	0,069	—0,026	0,002	—0,067	0,047	0,832	—3
3	+3	0,867	—0,860		—0,847	0,848	—0,087	—0,001	0,028	0,007	—0,042	0,832	+3
4	—	—0,293	0,301	—0,278		—0,862	0,033	—0,044	—0,047	—0,066	0,040	0,832	—3
5	—	0,267	—0,284	0,281	—0,552		—0,016	—0,005	0,010	0,014	—0,013	0,832	+3
6	—	—0,070	0,069	—0,087	0,059	—0,028		—0,544	0,500	—0,439	0,567	0,028	—
7	—	0,050	—0,026	—0,001	—0,079	—0,009	—0,544		—0,419	0,485	—0,543	0,014	—
8	—	0,062	0,002	0,028	—0,084	0,018	0,500	—0,419		—0,448	0,420	—0,026	—
9	—	0,013	—0,067	0,007	—0,119	—0,025	—0,439	0,485	—0,448		—0,452	0,019	—
10	—	—0,002	0,047	—0,042	0,072	—0,023	0,567	—0,543	0,420	—0,452		0,108	—
(11)	—	0,832	0,832	0,832	0,013	—0,069	0,051	0,054	0,057	0,029	—0,122		
a		+3	+3	+3	—	—	—	—	—	—	—		

[1] В таблице указана постоянная, которая прибавляется к значениям соответствующих переменных. Переменная 11 является маркировочной. Она вводится только в примеры с четными номерами. Коэффициенты корреляции между этой переменной и остальными переменными вычисляются по выборке объемом $n=400$.

Таблица 8.4

Варимакс-решения, полученные для различных примеров[1]

	Исходное факторное отображение			Пример 1 $a=+3$ для переменной 1			Пример 2 $a=+3$ для переменной 1			Пример 3 $a=+3$ для переменных 1, 2, 3			Пример 4 $a=+3$ для переменных 1, 2, 3		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	0,74	—0,01		0,41	—0,01		0,35	—0,00	0,89	0,25	—0,01	0,88	0,32	—0,01	0,87
2	—0,74	0,08		—0,71	0,08		—0,72	0,08	—0,04	—0,45	0,05	0,69	—0,48	0,05	0,79
3	0,74	—0,03		0,71	—0,03		0,70	—0,03	0,09	0,25	—0,02	0,88	0,33	—0,02	0,88
4	—0,73	0,04		—0,71	0,04		—0,70	0,04	—0,06	—0,72	0,05	—0,10	—0,70	0,05	—0,07
5	0,71	0,02		0,69	0,01		0,73	0,01	0,00	0,69	0,01	0,09	0,72	0,01	0,05
6	—0,10	0,74		—0,10	0,74		—0,10	+0,74	—0,01	—0,05	+0,73	—0,04	—0,07	0,77	—0,01
7	0,03	—0,72		0,02	—0,71		0,02	—0,72	0,00	0,02	—0,70	0,01	0,01	—0,74	0,04
8	0,10	0,65		0,08	0,63		0,09	0,65	0,00	0,09	0,62	0,03	0,08	0,62	0,04
9	0,05	—0,66		0,06	0,64		0,07	—0,63	—0,04	0,07	—0,67	—0,02	0,06	—0,67	—0,00
10	—0,05	0,73		—0,05	0,70		0,05	0,73	—0,04	—0,04	0,73	—0,00	—0,04	0,72	—0,00
(11)							0,09	—0,00	0,95				—0,11	—0,00	0,98

	Пример 5 $a=+3$ для переменных 1—5			Пример 6 $a=+3$ для переменных 1—5			Пример 7 $a=+3$ для переменных 1 и 3, $a=-3$ для переменной 2			Пример 8[2] $a=+3$ для переменных 1 и 3, $a=-3$ для переменной 2			Пример 9 $a=+3$ для переменных 1, 3, 5, $a=-3$ для переменных 2 и 4		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	0,25	—0,01	0,88	0,24	—0,01	0,90	0,19	—0,01	0,90	0,78	0,01	0,60	0,91	—0,01	
2	0,81	0,03	0,37	0,85	0,03	0,37	—0,20	0,05	—0,89	—1,01	0,01	0,35	—0,95	0,04	
3	0,25	—0,02	0,88	0,24	—0,02	0,90	0,18	0,03	0,92	0,78	0,05	0,60	0,93	—0,02	
4	0,82	0,03	0,36	0,85	0,03	0,36	—0,66	0,05	—0,18	0,47	0,07	0,01	—0,93	0,02	
5	0,26	—0,00	0,86	0,26	—0,00	0,88	0,63	0,00	0,17	0,45	—0,02	0,04	0,90	0,01	
6	0,06	0,74	0,07	0,06	0,75	—0,07	—0,03	0,76	—0,01	—0,03	0,75	—0,00	—0,05	0,74	
7	—0,03	—0,71	—0,02	—0,03	—0,72	0,01	0,03	—0,70	0,02	0,03	—0,73	0,03	0,01	—0,71	
8	—0,08	0,63	—0,07	—0,08	0,65	0,08	0,09	0,63	0,02	0,03	0,65	0,05	0,04	0,63	
9	—0,02	—0,64	—0,00	0,01	—0,65	0,02	0,07	—0,63	0,01	0,06	—0,66	—0,01	0,03	—0,64	
10	0,04	0,71	0,02	0,05	0,73	—0,02	—0,04	0,71	—0,02	—0,03	0,73	—0,06	—0,02	0,71	
(11)				0,62	—0,01	0,74				—0,06	—0,00	1,09			

[1] Маркировочная переменная 11 включалась в анализ в примеры только с четными номерами.
[2] Значения нагрузок и общностей не должны превышать единицы. Если такие значения появились, то речь идет о варианте Хейвуда. В этом случае применяется специальная процедура для получения допустимого решения.

сравнению с исходными. Введение маркировочной переменной помогает выявить влияние фактора неоднородности.

2. Неоднородность данных изменяет факторное отображение. При больших изменениях в корреляционной матрице в факторном отображении совершенно неожиданно могут произойти лишь незначительные изменения. Факторный анализ менее чувствителен к влиянию неоднородности, чем отдельные коэффициенты корреляции, потому что неоднородность может появиться в факторном решении как отдельный фактор и его можно исключить. Но в некоторых случаях фактор неоднородности может совпадать с каким-либо действующим фактором. Тогда отображение этого фактора изменится.

3. Факторы, которые выделяются по матрице коэффициентов корреляций между переменными с помощью техники R, могут являться следствием как корреляции между переменными, так и неоднородностей в материале исследования. Это следует помнить при интерпретации факторов. Итак, имеются два типа факторов: факторы, которые определяются действием связей между переменными, и факторы, причиной которых является неоднородность данных. Кроме того, имеются смешанные факторы. В наших примерах процедуры факторного анализа осуществлялись вслепую, но мы смогли выявить все типы факторов и определить влияние неоднородности в каждом случае.

Если бы анализировались связи между индивидуумами по выборке переменных (т. е. использовалась бы техника Q для определения независимых друг от друга группировок индивидуумов), то результаты были бы аналогичные, а именно получили бы факторы, характеризующие различные группировки, и фактор, вызванный неоднородностью данных. Такой результат не является неожиданным, так как матрица исходных данных для обеих техник одна и та же. В зависимости от постановки задачи неоднородность может рассматриваться как фактор, искажающий результаты исследования, который нужно исключать, либо, наоборот, как фактор, вводимый специально для того, чтобы проследить изменение факторного решения. В любом случае неоднородность в данных не является препятствием проведения факторного анализа. Неоднородность как раз может быть выявлена благодаря факторному анализу и исключена из решения, особенно если для признака неоднородности подобрать маркировочную переменную. В принципе оба типа факторов всегда присутствуют в экспериментальном материале.

8.6. ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ

Применяемая в факторном анализе техника R позволяет выделить группы, внутри которых переменные тесно связаны между собой. Каждая группа характеризует определенный фактор. Если для такого набора переменных существует простая структура, то ранг матрицы частных коэффициентов корреляции между переменными, которые высоко нагружают фактор, при фиксированном значении всех остальных переменных равен единице. Такие переменные тесно связаны между собой. В технике Q исследуются связи между индивидуумами, а именно пытаются найти однородные группы индивидуумов или объектов, которые более тесно связаны между собой, чем с индивидуумами других групп. При такой постановке задачи говорят о классификации, автоматической классификации или группировке. Задачи классификации наблюдений легко формализуются и успешно решаются на ЭВМ. Представляется целесообразным рассмотреть два типа задач.

1. *Классификация при полностью описанных классах* (дискриминантный анализ). Пусть известно о существовании двух или более совокупностей объектов, на которых измерены значения нескольких переменных. Задача заключается в выработке на основе имеющихся данных правила, позволяющего некоторый новый объект отнести к соответствующей совокупности, если заведомо не известно, к какой совокупности он принадлежит. Дискриминантный анализ, идея которого принадлежит Р. А. Фишеру [95; *1*], мы уже рассматривали в гл. 2.5. Дискриминантный анализ тесно связан с проблемами диагностики, возникающими в экономике, промышленности, технике и медицине. Например, имеются группы больных с известными специалисту типами заболеваний. Для каждого больного описаны признаки заболевания, имеются данные лабораторных анализов. При поступлении нового пациента решается вопрос об отнесении его заболевания к уже известному типу на основании результатов обследования (см., например, Коллер [176; *5*]).

2. *Классификация объектов или индивидуумов при неизвестных классах* (классификация без обучения). Задача состоит в разбиении объектов или индивидуумов на классы, столь различные между собой, сколь это возможно. При этом практически отсутствует априорная информация о распределении измерений внутри классов. Алгоритмы и статистические критерии, позволяющие производить оптимальное разбиение на классы, еще недостаточно хорошо разработаны. В таксономии бактерий речь идет о группировках их по видам, подвидам и семействам на основании имеющихся данных. Необходимость разбиения совокупности объектов на однородные группы часто возникает в медицине, антропологии, лингвистике, археологии, документалистике и психологии.

Факторный анализ тесно связан со вторым типом задач. Поэтому мы подробнее остановимся на этом типе.

8.6.1. Техника Q, применяемая для классификации

Техника Q, применяемая в факторном анализе, исходит из матрицы коэффициентов корреляций между индивидуумами. Факторы, которые выделяются с ее помощью, определяют собой группы (классы) индивидуумов. Над этой проблемой работали Ролфс и Сокал [241], а также Драйвер и Шуесслер [78]. Факторный анализ относительно редко применяется к задачам классификации. Если значимая простая структура найдена с помощью техники Q, то можно назвать определенные группы, внутри которых индивидуумы тесно связаны между собой. Если простая структура не найдена, то мы не можем точно указать группы индивидуумов. Следовательно, критерием нахождения групп является простая структура. С помощью техники Q можно указать такие точки в пространстве, для которых матрица частных коэффициентов корреляций при фиксированном положении остальных точек равна единице. Итак, выделенные факторы определяют группы индивидуумов. Процедура нахождения групп переменных, включая вращение и проверку значимости простой структуры (критерий Баргмана), достаточно разработана. При этой процедуре выделенные факторы помогают обнаруживать такие группировки точек, которые лежат сравнительно далеко друг от друга. Как показано на рис. 8.3, число факторов и число групп переменных могут не совпадать. При такой ситуации, когда возникает затруднение в отнесении индивидуумов к определенному классу, рекомендуется вычислять для них значения факторов. Индивидуумы с высоким значением фактора приписывают к группе, определяемой этим фактором.

При решении задачи классификации с помощью Q-техники обычно используют процедуру вращения для определения простой структуры. Чаще всего группировки находят в пространстве общих факторов графическим путем. Факторы выделяются с помощью метода главных факторов.

8.6.2. Другие методы классификации

Из методов классификации многомерных наблюдений уже упоминался *кластерный анализ* (см. 8.4.1). Недостатком его является отсутствие статистического критерия значимости для проверки гипотезы, действительно ли точка принадлежит данной группе. Трудным и мало формализованным в задаче классификации без обучения является пункт, связанный с определением понятия однородности объектов. Применение коэффициента принадлежности (*coefficient of belonging*) или других метрик (или мер близости) только при благоприятных условиях приводит к однозначной группировке объектов. Такими же недостатками обладает *анализ латентных структур*. Возможности этого метода анализа полностью еще не выяснены. Его преимущество заключается в том, что он применим к альтернативным данным. Рао [230; *6*] указал метод нахождения иерархии группировок при условии заданности самих группировок. Айм [152; *1*, *2*] систематизировал методы классификации. Он различал следующие подходы к решению задач классификации: использование модели факторного анализа, задание функции плотности распределения вероятностей генеральной совокупности, к которой принадлежит данная группировка, и приложение метода максимального правдоподобия. Четкие рекомендации, когда, какой подход и при каких данных использовать, пока не разработаны.

Шнелл [258; *1*] исходит при решении задач классификации только из модели факторного анализа. Вначале все точки проецируются в p-мерное пространство, которое натянуто на p собственных векторов. Гипотеза о том, что вся информация при нахождении группировок содержится в пространстве размерностью $p \ll n$, не всегда подтверждается. Внутри p-мерного пространства с помощью определенного алгоритма находят группировки, являющиеся пока еще предварительными оценками классов. Затем к этим группировкам для решения задачи идентификации и окончательного разбиения объектов на классы применяется дискриминантная функция. Данная процедура повторяется до тех пор, пока группировки точек не будут изменяться по сравнению с предыдущим циклом итерации. Остается только показать, при каких условиях осуществляется быстрая сходимость данной итеративной процедуры. Речь при этом идет об интересной комбинации метода главных факторов, дискриминантного анализа и алгоритма нахождения группировок, который ждет еще своего практического опробования. Фабер [87] сравнительно недавно составил программу вычисления для ЭВМ. Интересный подход к решению задач классификации использовал Наус [211]. Он определял вероятность того, что по меньшей мере n точек из имеющихся N попадает в прямоугольник со сторонами u и v. Из такого подхода может быть развита статистическая концепция при решении задачи образования группировок индивидуумов. Мак-Квайти [197; *1*, *2*, *3*, *4*, *5*] занимался *анализом группировок* (*typal analysis*), исходя из коэффициентов корреляции рангов. Ему и принадлежит название метода. Насколько предлагаемый им метод дает однозначное решение, пока остается неизвестным. Не решен также вопрос статистического критерия проверки принадлежности точки к данной группировке. В работе Каттелла и Коултера [38] содержится дальнейшее развитие этого метода.

В области *таксономии*, например, бактерий имеется целый ряд работ, которые связаны с проблемой классификации. Обширная монография по таксономии с подробной библиографией написана Снитом и Сокалом [270]. Часто в качестве меры близости используется величина $S = n_s/(n_s + n_d)$, которая называется коэффициентом сходства (*similarity ratio*), где n_s — число признаков, общих для двух бактерий или элементов; n_d — число индивидуальных признаков, присущих только данному элементу. В данной книге приведен обширный список литературы, посвященной таксономии (Бирз и др. [16], Бирз и Локхарт [17], Колвелл и Листон [59], Ян [155], Лизенко и Снит [192], Роджерс и Танимото [239], Снит [268], Снит и Коуэн [269] и т. д.). Интересный пример применения классификации в области документалистики имеется в работе Борко [25].

Развитие методов классификации обусловлено развитием и внедрением вычислительной техники, так как реализация этих методов невозможна без быстродействующих ЭВМ. Но применение ЭВМ, в свою очередь, требует специальной разработки соответствующего математического обеспечения. Сегодня еще нельзя указать, какой метод классификации, при каких данных и при каких условиях следует предпочитать.

8.7. ПРОВЕРКА ТОЧНОСТИ ФАКТОРНОГО РЕШЕНИЯ ПО МАТРИЦЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В гл. 7.3 было показано, как можно проверить точность результатов факторного анализа путем сравнения действительных значений факторов с их оценками. Критерием качества факторного решения служил коэффициент корреляции между действительными значениями факторов и их оценками. На практике использованный в гл. 7.3 критерий не может быть применен, так как действительные значения факторов неизвестны.

Вычисляемый обычно по формуле (6.25) коэффициент множественной детерминации является критерием только точности оценок, а не достоверности соответствующего факторного решения. Этот коэффициент свидетельствует лишь о том, как точно можно оценить фактор, а не о том, как точно оценка соответствует фактору. При конкретных исследованиях в качестве критерия достоверности факторного решения используются матрица исходных данных и корреляционная матрица. В общем случае удовлетворяются тем, что оценивают согласие между правой и левой частью равенства (2.28). Вычисляемая по (2.20) общность является при этом мерой той доли единичной дисперсии каждой переменной, которая является общей для ряда переменных и может быть приписана влиянию общих факторов.

Вполне естественно перенести на матрицу исходных данных критерий, примененный при моделировании в гл. 7.3. Если определены матрица $\mathbf{A}$ и оценки значений факторов $\hat{\mathbf{P}}$, то можно вычислить оценки значений стандартизованных переменных, т. е. матрицу $\hat{\mathbf{Z}}$ (по равенству (2.13)):

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}. \tag{8.5}$$

Так как действительные значения стандартизованных переменных, т. е. матрица $\mathbf{Z}$, известны, то путем сравнения $\mathbf{Z}$ и $\hat{\mathbf{Z}}$ оценивают качество факторного решения.

Для сравнения лучше всего использовать коэффициенты корреляции $r_{z_i\hat{z}_i}$ между переменными обеих матриц, соответствующими друг другу. Коэффициент $r_{z_i\hat{z}_i}$ указывает на то, как точно могут быть оценены с помощью уравнения множественной регрессии значения переменной, полученной из ортогонального факторного решения, если система факторов была выделена по m переменным. При применении этого критерия мы находимся в порочном кругу, так как сами оцениваемые переменные через факторы входят в свои оценки. Коэффициенты корреляции $r_{z_i\hat{z}_i}$ можно вычислить для всех переменных. В то время как общность h_i^2 является долей дисперсии, общей для переменной i и фактора, $r^2_{z_i\hat{z}_i}$ содержит ту долю дисперсии переменной i, которая воспроизводится с помощью модели факторного анализа. Это не одно и то же, так как в $r^2_{z_i\hat{z}_i}$ вносят свою долю также другие переменные (через факторы), в то время как h_i^2 является долей дисперсии одной переменной.

Из формулы (8.5) для сравнения матриц $\mathbf{Z}$ и $\hat{\mathbf{Z}}$ выведем ряд соотношений, которые затем используем для оценки качества факторного решения. Для ортогональных факторов были выведены следующие равенства: $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{B}'\mathbf{Z}$ (6.16) и $\mathbf{B}' = \mathbf{A}'\mathbf{R}^{-1}$ (6.17). Отсюда следует, что $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{A}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$. Подставляя это выражение в (8.5), получим

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{R}_h^{+}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \tag{8.6}$$

Матрица $\mathbf{R}_h^+ = \mathbf{AA}'$ является матрицей коэффициентов корреляций, воспроизведенных через факторное отображение. При выделении всех m компонент в компонентном анализе $\mathbf{R} = \mathbf{R}_h^+$, т. е. $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$, что соответствует известному факту: главные компоненты могут быть определены очень точно, и они адекватно отражают исходную информацию, но в более компактной форме. Если мы выделяем все главные компоненты, то матрица исходных данных воспроизводится полностью.

Матрица $\mathbf{R}_h^+ \mathbf{R}^{-1}$ в (8.6) преобразует $\mathbf{Z}$ в $\hat{\mathbf{Z}}$. Если ввести обычное обозначение корреляционной матрицы с оценками общностей по диагонали $\mathbf{R}_h$, то $\mathbf{R}_h - \mathbf{R}_h^+ = \mathbf{R}_{\text{ост}}$ является матрицей остатков данного факторного решения. Выразив из последнего равенства $\mathbf{R}_h^+ = \mathbf{R}_h - \mathbf{R}_{\text{ост}}$ и подставив его в (8.6), получим

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\mathbf{R}_h - \mathbf{R}_{\text{ост}})\, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{R}_h\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \qquad (8.7)$$

Теперь можно матрицу $\mathbf{R}_h\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{K}$ выразить по-другому, так как $\mathbf{R}_h = \mathbf{R} - \mathbf{U}^2$, а именно $\mathbf{K} = (\mathbf{R} - \mathbf{U}^2)\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}$. Подставляя последнее выражение в (8.7), получим

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1})\,\mathbf{Z} - \mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}. \qquad (8.8)$$

Из равенства (8.8) следует, что для получения $\hat{\mathbf{Z}}$ нужно вычесть из матрицы исходных данных $\mathbf{Z}$ две матрицы. Матрица $\mathbf{E}_1 = \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$ является матрицей погрешнсстей, входящих во вклады характерных факторов. Матрица $\mathbf{E}_2 = \mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$ является матрицей погрешностей, обусловленных остатками корреляционной матрицы. Если обе матрицы погрешностей вычесть из $\mathbf{Z}$, то получим матрицу оценок исходных данных $\hat{\mathbf{Z}}$.

Равенство (8.8) можно привести к такому виду:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} - (\mathbf{U}^2 + \mathbf{R}_{\text{ост}})\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}, \qquad (8.9)$$

где вычитаемое с правой стороны является суммой двух матриц:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{U}^2 + \mathbf{R}_{\text{ост}})\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Интересно то, что по матрицам $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{Z}$ можно получить соответствующие ковариационные матрицы.

Средние значения переменных, представленных в этих матрицах, равны нулю. Рассмотрим вначале матрицу $\mathbf{E}_1 = \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}$, в которой обозначим произведение $\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}$ через матрицу $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Матрица $\mathbf{Q}$ является симметрической квадратной матрицей. Элементы первой строки, или значения первой переменной матрицы $\mathbf{E}_1$, вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= q_{11}z_{11} + q_{12}z_{21} + \dots + q_{1m}z_{m1}\\
e_{12} &= q_{11}z_{12} + q_{12}z_{22} + \dots + q_{1m}z_{m2}\\
&\vdots\\
e_{1n} &= q_{11}z_{1n} + q_{12}z_{2n} + \dots + q_{1m}z_{mn}
\end{aligned}$$

Итак, значения $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}$ образуют первую вектор-строку матрицы $\mathbf{E}_1$. Слагаемые правой части равенств представляют собой произведения постоянной величины q_i на значения переменных в матрице $\mathbf{Z}$, которые имеют среднее значение, равное нулю. Если просуммировать левые и правые части этих равенств, то получим

$$\sum_i e_{1i} = q_{11} \sum_i z_{1i} + q_{12} \sum_i z_{21} + \ldots + q_{1m} \sum_i z_{mi}.$$

Так как сумма значений стандартизованной величины равна нулю, то $\sum_i e_{1i} = 0$, т. е. среднее значение элементов этого вектора также равно нулю. Аналогичный вывод можно сделать для других переменных, входящих в матрицу $\mathbf{E}_1$, а также в матрицы $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}$. Если переменные, входящие в матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}$, не коррелируют между собой [1] и элементы этих матриц по строкам имеют средние значения, равные нулю, то элементы строк матрицы $\hat{\mathbf{Z}}$, составленной аддитивно из $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}$, тоже имеют средние значения, равные нулю. Благодаря этому упрощается вычисление ковариационных матриц.

Матрицу ковариаций $\mathbf{S}\,(E_1)$ между переменными, входящими в матрицу $\mathbf{E}_1$, пользуясь тем, что средние значения этих перемеиных равны нулю, можно представить в следующем виде: $\mathbf{S}\,(E_1) = \frac{1}{(n-1)}\,\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1'$.

Подставляя в эту формулу выражение $\mathbf{E}_1$, получим

$$\mathbf{S}\,(E_1) = \frac{1}{n-1}(\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})(\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})' = \frac{1}{(n-1)}\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2.$$

Учитывая, что $\frac{1}{(n-1)}\mathbf{Z}\mathbf{Z}' = \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{I}$, имеем

$$\mathbf{S}\,(E_1) = \mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2 = (u_i^2\, u_k^2\, r^{ik}). \tag{8.10}$$

Матрица ковариаций между погрешиостями, входящими во вклады характерных факторов, пропорциональна матрице $\mathbf{R}^{-1}$, элементы которой r^{ik} перемножаются с соответствующими значениями характерностей. Если эти значения равны нулю или очень малы, то ковариационная матрица превращается в нулевую. Но при больших значениях характерностей ковариационная матрица содержит значительные доли дисперсий. Аналогично получается выражение для ковариационной матрицы $\mathbf{S}\,(E_2)$:

$$\mathbf{S}\,(E_2) = \mathbf{R}_{\text{ост}}\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{R}_{\text{ост}}. \tag{8.11}$$

Если элементы матрицы остатков корреляций незначительно отличаются от нуля, то $\mathbf{S}\,(E_2)$ также является практически нулевой матрицей.

---

[1] В общем случае распределение погрешностей имеет среднее значение, равное нулю, и погрешиость не коррелирует с исходными данными. Из равенства (8.17) видно, что корреляция между переменными, входящими в $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}$, зависит от величины остаточных коэффициентов корреляции и долей дисперсии характерных факторов и практически всегда отсутствует.

Ковариационная матрица S (E), учитывающая оба вида погрешностей, определяется по формуле

$$\mathbf{S}(E)=\frac{1}{n-1}[(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}][(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}]'=$$

$$=\frac{1}{n-1}[(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}][\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})]=$$

$$=\frac{1}{n-1}(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}}),$$

$$\mathbf{S}(E)=(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}}). \tag{8.12}$$

Вывод формулы матрицы ковариаций между переменными, входящими в матрицу S ($\hat{\mathbf{Z}}$), производится аналогичным образом. При этом исходят опять из того, что S $(\hat{Z})$ = $\frac{1}{n-1}\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}'$. Подставляя в эту формулу выражение для $\hat{\mathbf{Z}}$, получим

$$\mathbf{S}(\hat{Z})=\frac{1}{n-1}(\mathbf{Z}-\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}-\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})(\mathbf{Z}-\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}-\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})'=$$

$$=\frac{1}{n-1}(\mathbf{Z}-\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}-\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z})(\mathbf{Z}'-\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2-\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}})=$$

$$=\frac{1}{n-1}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}'-\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'-\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'-\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2+$$

$$+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2-\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}+$$

$$+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}).$$

После умножения членов внутри скобок на скаляр имеем

$$\mathbf{S}(\hat{Z})=\mathbf{R}-\mathbf{U}^2-\mathbf{R}_{\text{ост}}-\mathbf{U}^2+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2-$$

$$-\mathbf{R}_{\text{ост}}+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}.$$

При условии, что матрица остатков корреляций является нулевой, получим

$$\mathbf{S}(\hat{Z})=\mathbf{R}-2\,\mathbf{U}^2+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2. \tag{8.13}$$

Если же некоторые из остаточных коэффициентов корреляции значительно отличаются от нуля, то мы не можем считать матрицу остатков корреляций эквивалентной нулевой, и тогда

$$\mathbf{S}(\hat{Z})=\mathbf{R}-2\mathbf{U}^2+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2-2\mathbf{R}_{\text{ост}}+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^2+$$

$$+\mathbf{U}^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}+\mathbf{R}_{\text{ост}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_{\text{ост}}. \tag{8.14}$$

Ковариационную матрицу S $(\hat{Z})$ можно преобразовать в корреляционную, производя соответствующее нормирование ее элементов. Матрица ковариаций между переменными, входящими в матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}_1$, определяется аналогично. Диагональными элементами матрицы S (Z, E_1) являются ковариации между переменными, соответствующими друг другу в матрицах $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}_1$. Внедиагональными элементами являются ковариации между остальными переменными, причем $i \neq k$:

$$\mathrm{S}(Z, E_1) = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}\mathbf{E}_1' = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}(\mathbf{U}^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z})' = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}\mathbf{Z}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^2.$$

Итак,

$$\mathrm{S}(Z, E_1) = \mathbf{U}^2. \tag{8.15}$$

Полученное выражение согласуется с определением характерных факторов. Вполне объяснимый результат получаем также для ковариационной матрицы $\mathrm{S}(Z, E_2)$:

$$\mathrm{S}(Z, E_2) = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}(\mathbf{R}_{\text{ост}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z})' = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}\mathbf{Z}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{\text{ост}} = \mathbf{R}_{\text{ост}}. \tag{8.16}$$

Для матрицы ковариаций между переменными, входящими в матрицу $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{E}$, получаем следующее выражение:

$$\mathrm{S}(E, Z) = \frac{1}{n-1} (\mathbf{U}^2 + \mathbf{R}_{\text{ост}}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}\mathbf{Z}',$$

$$\mathrm{S}(E, Z) = \mathbf{U}^2 + \mathbf{R}_{\text{ост}}. \tag{8.17}$$

Внедиагональными элементами этой матрицы являются остаточные коэффициенты корреляции, которые одновременно являются ковариациями между погрешностями и переменными, входящими в матрицу исходных данных. Так как остатки корреляций большей частью незначительно отличаются от нуля, то и ковариации также очень малы.

Для ковариационной матрицы $\mathrm{S}(Z, \hat{Z})$ получается следующее выражение:

$$\mathrm{S}(Z, \hat{Z}) = \frac{1}{n-1} \mathbf{R}_h^+ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z}\mathbf{Z}' = \mathbf{R}_h^+. \tag{8.18}$$

Последнее равенство позволяет дать новое истолкование известной матрице $\mathbf{R}_h^+$. Матрица $\mathbf{R}_h^+$ является матрицей ковариаций между переменными, значения которых оценены по факторной модели, и действительными переменными. Ковариации, являющиеся диагональными элементами этой матрицы, используются для оценки качества факторного решения. Нормируя ковариации, получаем соответствующие коэффициенты корреляции. Эти коэффициенты корреляции можно вычислять не непосредственно по переменным, а по формуле, полученной из (8.18):

$$r_{z_i \hat{z}_i} = \frac{h_i^{+2}}{\sqrt{s_i \hat{s}_i}},$$

где h_i^{+2} является воспроизведенной общностью; $s_i = 1$, а $\hat{s}_i^2$ можно определить по формуле (8.14). Итак,

$$r_{z_i \hat{z}_i} = \frac{h_i^{+2}}{\sqrt{\begin{array}{c}1 - 2u_i^2 + u_i^4 r^{ii} - 2r_{\text{ост}_{ii}} + \operatorname{diag}(\mathbf{R}_{\text{ост}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}^2) + \operatorname{diag}(\mathbf{U}^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{\text{ост}}) + \\ + \operatorname{diag}(\mathbf{R}_{\text{ост}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_{\text{ост}})\end{array}}}. \tag{8.19}$$

Так как последние три слагаемых в подкоренном выражении знаменателя содержат диагональные элементы матриц, которые при малых остаточных коэффициентах корреляции практически равны нулю, и, кроме того, они имеют знак, обратный по сравнению с $2\, r_{\text{ост}_{ii}}$, то коэффициент корреляции может вычисляться по следующей приближенной формуле:

$$r_{z_i \hat{z}_i} = \frac{h_i^{+2}}{\sqrt{1-2u_i^2+u_i^4 r^{ii}}}. \tag{8.20}$$

Вычисляя $r_{z_i \hat{z}_i}$ непосредственно по переменным либо по формуле (8.19) или по ее аппроксимации (8.20), мы получаем для каждой переменной меру того, как точно она воспроизводится данной моделью факторного анализа.

На величину коэффициента $r_{z_i \hat{z}_i}$ не оказывает влияния вращение координатных осей в пространстве общих факторов. В выражение (8.19) входят только остатки корреляций, $\mathbf{R}^{-1}$ и доли дисперсии характерного фактора. Поэтому коэффициент $r_{z_i \hat{z}_i}$ должен оставаться неизменным после выделения главных факторов и после варимакс-вращения (при том же числе факторов). В таком случае остатки корреляций и доли дисперсий характерных факторов равны. Коэффициент поэтому не пригоден для того, чтобы определять предпочтительные решения в пространстве общих факторов. Он лишь указывает, как точно определенная переменная в целом воспроизводится через факторную модель. Все решения в пространстве общих факторов будут для этой переменной давать одинаковую точность.

При вычислении коэффициента $r_{z_i \hat{z}_i}$ мы попадаем в порочный круг, так как переменная i, являясь вектором в пространстве общих факторов, входит в свою собственную оценку. Особенно осложняется дело при больших значениях общностей, когда действительно хотят оценить переменные по значениям факторов. В таком случае можно применить для оценки равенство (8.5). В принципе $r_{z_i \hat{z}_i}$ применяют тогда, когда хотят охарактеризовать качество точности воспроизведения матрицы исходных данных и сравнить с другими методами анализа. Для таких целей коэффициент $r_{z_i \hat{z}_i}$ вполне пригоден, особенно если не упустить из виду вышеупомянутое замечание о порочном круге. Квадрат этого коэффициента — $r^2_{z_i \hat{z}_i}$ дает наглядную картину качества воспроизведения матрицы исходных данных через модель факторного анализа. При проверке значимости коэффициента корреляции $r_{z_i \hat{z}_i}$ возникают некоторые затруднения, связанные с определением числа степеней свободы и тем, что математическое ожидание этого коэффициента при высоких значениях общностей отлично от нуля. Кроме того, провести проверку значимости для всех переменных одновременно невозможно, так как переменные коррелируют между собой. Рассмотрим конкретный пример.

В левом нижнем углу табл. 8.5 приведена корреляционная матрица, по которой производятся соответствующие вычисления. В правом верхнем углу табл. 8.5 содержится матрица $\mathbf{R}^{-1}$, включая ее диагональные элементы. В последней строке таблицы указаны наибольшие значения элементов каждой строки матрицы $\mathbf{R}$, которые были использованы в качестве оценок общностей. Матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Z}$ известны, так как пример является результатом моделирования на ЭВМ. В табл. 8.6 приведены

Таблица 8.5

Корреляционная матрица и R^{-1}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,140	0,207	−0,122	0,185	−0,100	−0,071	0,021	0,084	0,157	0,079
2	−0,246	1,156	0,260	−0,111	0,022	−0,053	0,101	−0,045	−0,083	0,017
3	0,174	−0,266	1,133	0,089	−0,072	−0,031	−0,017	−0,058	−0,153	0,040
4	−0,206	0,158	−0,153	1,101	0,105	−0,000	−0,029	0,126	0,061	0,044
5	0,129	−0,070	0,107	−0,132	1,051	0,007	0,117	0,080	−0,056	−0,001
6	0,058	0,039	0,012	−0,031	−0,003	1,081	0,083	−0,161	0,102	−0,110
7	−0,013	−0,091	0,030	0,059	−0,080	−0,160	1,184	0,343	−0,128	0,105
8	−0,039	0,059	0,017	−0,105	−0,041	0,200	0,331	1,188	0,097	−0,050
9	−0,119	0,041	0,112	−0,021	0,044	−0,140	0,161	−0,136	1,097	0,066
10	−0,056	0,019	−0,048	−0,036	−0,003	0,135	−0,144	0,116	−0,095	1,050
$\hat{h}_i^2$	0,246	0,266	0,266	0,206	0,132	0,200	0,331	0,331	0,161	0,144

Таблица 8.6

Факторные решения

Переменная	Факторное отображение в выборке		Решение методом главных факторов		Варимакс-решение	
	I	II	I	II	I	II
1	0,44	—	0,07	−0,48	0,48	0,03
2	−0,39	—	0,21	0,46	−0,49	0,11
3	0,45	—	0,17	−0,44	0,46	−0,07
4	−0,39	—	0,03	0,41	−0,40	−0,12
5	0,31	—	0,04	−0,25	0,25	0,02
6	—	0,42	−0,36	−0,12	0,04	0,38
7	—	−0,48	0,55	0,12	−0,00	−0,56
8	—	0,40	−0,54	−0,12	0,01	0,55
9	—	−0,37	0,30	0,08	−0,02	−0,31
10	—	0,38	−0,29	−0,01	−0,05	0,28

действительное факторное отображение в выборке, решение, полученное методом главных факторов и варимакс-решение. Была произведена оценка значений факторов. Коэффициент корреляции между действительными значениями первого фактора и его оценками, полученными в результате расчетов, равен $r_{y\hat{y}} = 0{,}680$. Соответствующий коэффициент корреляции для второго фактора $r_{y\hat{y}} = 0{,}677$. По оценкам значений факторов с помощью равенства (8.5) определяется матрица оценок стандартизованных значений исходных данных $\hat{\mathbf{Z}}$. Переменные, входящие в матрицу $\hat{\mathbf{Z}}$, коррелируют с переменными, входящими в $\mathbf{Z}$. Кроме того, были вычислены коэффициенты корреляции $r_{z\hat{z}}$ по формуле (8.20). Их значения отличаются от $r_{z\hat{z}}$, вычисленных непосредствен-

Таблица 8.7

Сравнение $r^2_{z\hat{z}}$ [1] и h_i^2

Переменная	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{z\hat{z}}$ [1]	0,681	0,665	0,637	0,548	0,327	0,496	0,737	0,730	0,407	0,387
$r^2_{z\hat{z}}$	0,463	0,442	0,406	0,300	0,107	0,246	0,544	0,533	0,165	0,150
h_i^{2+}	0,233	0,255	0,221	0,172	0,064	0,145	0,311	0,305	0,096	0,082

[1] Значения $r_{z\hat{z}}$, вычисленные после выделения системы главных факторов и после процедуры варимакс-вращения, которые здесь и приведены, практически не отличаются друг от друга.

но по переменным, только в третьем знаке после запятой. Значения $r_{z\hat{z}}$ приведены в табл. 8.7. Вычисленные общности h_i^{+2} всегда меньше $r^2_{z\hat{z}}$, так как знаменатель в формуле (8.20) меньше 1. Как видно из табл. 8.5, все переменные слабо связаны между собой (только 5 из 45 коэффициентов корреляции значимы). Тем более удивительно, как хо-

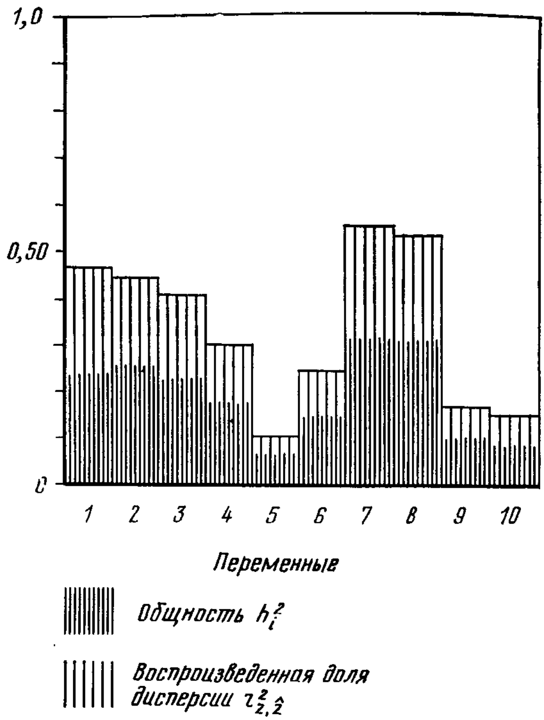


Рис. 8.5. Воспроизведенные доли дисперсии переменных матрицы **Z** (табл. 8.7)

рошо отдельные переменные воспроизводятся через факторную модель. На рис. 8.5 представлены воспроизведенные доли дисперсий переменных, входящих в матрицу Z. Общности, нанесенные на этот рисунок, составляют при этом только часть дисперсий переменных, которые сами вносят их в свои собственные оценки.

Можно провести дальнейшее сравнение между Z и $\hat{Z}$ по их разности. Результирующее распределение остатков матрицы E можно представить раздельно для каждой переменной. Из (8.8) видно, что оно состоит из сумм E_1 и E_2:

$$E = Z - \hat{Z} = E_1 + E_2 = U^2 R^{-1} Z + R_{ост} R^{-1} Z = (U^2 + R_{ост}) R^{-1} Z. \quad (8.21)$$

Средние значения элементов строк матрицы E равны нулю, так как средние значения элементов строк матрицы Z равны нулю. Матрица ковариаций между переменными, входящими в E, вычисляется по формуле (8.12). Ковариационную матрицу $S(E_1, Z)$ получают по формуле (8.17). Она является нулевой, если остатки корреляций равны нулю.

Формулы (8.5) — (8.21) дают нам важнейшие соотношения, позволяющие произвести оценку факторного решения при конкретных исследованиях. Весьма наглядным является изображение долей дисперсий каждой переменной, воспроизведенной через модель факторного анализа.

8.8. ОБРАБОТКА ДАННЫХ НА ЭВМ И ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Внедрение в практику быстродействующих ЭВМ оказало сильное влияние на развитие теории факторного анализа и сделало возможным реализацию метода для очень больших корреляционных матриц. Специалисту, работающему в теоретической области, и практику, применяющему факторный анализ при конкретных исследованиях, приходится использовать ЭВМ. Кайзер [164; *3*] придерживался мнения, что КВМ или средние ЭВМ следует применять лишь на начальных стадиях исследования для тех процедур, которые дают лишь приближенные оценки и представляют собой незаконченные вычислительные «компромиссы» по отношению к более совершенным процедурам. Всем вышесказанным объясняется необходимость рассмотрения вопроса о применении ЭВМ для вычислительных процедур факторного анализа.

Чтобы понять преимущества, которые дает ЭВМ, и уметь пользоваться машинными алгоритмами, нужно разобраться в логике построения ЭВМ и сущности процессов, протекающих в машине. Литература по данному вопросу указана в библиографии (например, Борко [25], Штайнбух [276]). Имеются также соответствующие справочники и техническая документация по эксплуатации ЭВМ. Мы остановимся лишь на некоторых моментах. Дело в том, что многие пользователи ориентируются на стандартные программы факторного анализа, не вникая в суть их алгоритма. Это часто приводит к ошибочным результатам.

8.8.1. Структура и принцип действия ЭВМ

Принцип действия ЭВМ описывается рядом логических преобразований, которые могут быть дополнены различными техническими подробностями. Мы остановимся только на узловых моментах, характеризующих принцип действия ЭВМ. Изложенный здесь материал является частью ранее опубликованной работы Коллера и Иберла [177], а также доклада Гумина [111].

Наибольшее распространение для записи чисел получила десятичная система счисления. В этой системе каждое целое положительное число представляется в виде суммы единиц, десятков, сотен и т. д., т. е. в виде суммы различных степеней числа 10 с коэффициентами, которые могут принимать значения от 0 до 9 включительно. В каждом разряде числа могут стоять цифры от 0 до 9. Числа 10, 20 и т. д. принимаются за единицы следующих разрядов. Имеются два принципиально различных способа технической реализации чисел путем представления их в аналоговой и в цифровой форме (рис. 8.6).

При *аналоговой форме представления* числа отражают какие-то физические величины, например длину, вес, силу тока, напряжение, угловую скорость и т. д. В самом простом случае 0 приблизительно соответствует длине 0 см, число 1 — длине 1 см и т. д. На логарифмической линейке длины отрезков на двух шкалах являются аналогами логарифмов чисел, подлежащих умножению или делению. Сумма двух отрезков является аналогом суммы логарифмов. Подобно этому число 0,5 можно представить, например, через напряжение 0,5 МВ, число 1— через напряжение 1 МВ и т. д. Имеются такие логические ячейки, которые могут складывать или вычитать напряжение, а следовательно, с их помощью можно выполнять операции сложения и вычитания соответствующих чисел. Как и на логарифмической линейке, с помощью логических ячеек можно осуществлять также операции умножения и деления в любой последовательности. Логарифмическая линейка является простейшим примером аналогового вычислительного устройства, и, поскольку ее шкалы проградуированы в антилогарифмах, она работает как аналоговое множительное или делительное устройство с непосредственным отсчетом. Итак, аналоговая вычислительная машина означает устройство, работающее с величинами, являющимися аналогами величин, заданных в исходной задаче, которая должна быть решена. При этом аналоговые величины изменяются так же, как исходные, что позволяет заменить последние соответствующими аналоговыми значениями. Такие аналоговые вычислительные машины оказались эффективными при решении многих задач. Их преимущество заключается в том, что они могут выполнять непрерывные действия, а дифференциальные уравнения решают за один прогон. Существенным недостатком аналоговых машин является ограничение разрядности получаемого результата. Точность аналоговых машин колеблется от 1% до 0,1‰. Эта точность недостаточна при решении многих задач, особенно если приходится делать много шагов при вычислениях. В этом случае погрешность быстро возрастает и уже через несколько шагов достигает верхней границы допустимого значения.

Принципиально иным способом является *представление чисел в цифровой форме*, где каждое число выражается в виде последовательности решений «да-нет». Решение «да» записывается в виде знака *1*, решение «нет» — в виде знака *0*. В двоичной системе счисления, например, числу «нуль» соответствует последовательность *000*, числу «один»

Представление чисел

Аналоговая форма

Физическая величина пропорциональна числу

Например: число	0	соответствует	0 см
»	1	»	1 см
»	2	»	2 см
»	3	»	3 см
»	4	»	4 см
»	5	»	5 см
»	6	»	6 см
»	7	»	7 см
»	8	»	8 см
»	9	»	9 см

Цифровая форма

Последовательность решений «да — нет» представляет число

Например: число	0	соответствует	последовательности	*0 0 0*
»	1	»	»	*0 0 1*
»	2	»	»	*0 1 0*
»	3	»	»	*0 1 1*
»	4	»	»	*1 0 0*
»	5	»	«	*1 0 1*
»	6	»	»	*1 1 0*
»	7	»	»	*1 1 1*

23 22 21 20 19 18	17 16 15 14 13 12	11 10 9 8 7 6	5 4 3 2 1 0
1 1 0 1 1 1	*0 0 1 1 1 0*	*0 1 1 1 1 0*	*1 1 1 0 1 1*

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{символ}}}_{\text{машинное слово}}$$

Рис. 8.6. Схема представления чисел при обработке информации

— последовательность *001*. В то время как при аналоговом представлении числа соответствуют определенным физическим величинам, при цифровой форме они соответствуют последовательностям решений «да — нет». Этим решениям можно противопоставить наличие или отсутствие тока в цепи, намагничивание или размагничивание сердечника электрокатушки. Отдельное такое положение, которое можно принять за решение «да» или «нет», называется термином «бит». Несколько битов могут быть объединены в одну ячейку. Тогда говорят о «слове», которое может, например, состоять из 24 бит. Такое слово делится на части, например на 4 символа по 6 бит каждый. Целесообразно объединять последовательности бит определенной длины в слова или символы, рассматривая эти объединения как единицы, с которыми можно оперировать дальше.

С числами в цифровой форме также можно выполнять вычислительные операции. В противоположность аналоговому цифровое представление чисел имеет то преимущество, что соответствующие физические величины, например напряжение, не должны точно измеряться. Нужно только зафиксировать, есть ли в определенный момент и в определенном месте ток или его нет, намагничивается сердечник электрокатушки или нет. Цифровые системы нечувствительны к помехам. Далее, при цифровом представлении чисел имеется возможность накапливать числа на внешних носителях, например на перфолентах или на перфокартах, причем логическое решение «да» воспроизводится через перфорацию в определенной позиции, логическое решение «нет» — через отсутствие этой перфорации. Проблема точности при цифровом изображении числа практически не возникает, так как эти числа можно представлять во всех позициях. Кодирование можно производить в прямой последовательности в виде букв или служебных символов. Определенная последовательность логических решений «да—нет» соответствует, например, букве А, другая последовательность — букве В и т. д. Далее будем рассматривать обработку данных устройствами, которые работают с цифровым представлением чисел.

Под данными в общем случае понимается любая информация, представленная в виде конечной последовательности цифр, букв или специальных символов. Так, число 19,3, фамилия больного или его год рождения являются отдельными данными. Длина и вес изделий, результаты лабораторных исследований, вся история болезни являются совокупностью данных. Последовательность букв в этой главе можно также рассматривать как совокупность данных.

При цифровом представлении чисел такие данные кодируются с помощью последовательности импульсов тока, а именно путем чередования наличия и отсутствия тока в определенный момент времени в определенном месте. Под обработкой данных понимают преобразование структуры входных данных в структуры выходных данных заранее указанным способом. Это преобразование осуществляется с помощью вычислительного устройства, которое изображается в виде логической схемы. Импульсы, соответствующие входным данным, преобразуются в импульсы, соответствующие выходным данным, с помощью логической схемы. Все вышеуказанное дает общее представление о цифровой обработке данных. Из большого числа типов составления программ для логических схем можно выделить три группы:

1. Составление *программ логических схем с жесткой структурой.* Такие программы создаются для определенных классов задач обработки данных, как, например, сложение и деление. Они преобразуют входные данные определенным и фиксированным образом в выходные данные и не могут применяться для других задач преобразования, так как имеют жесткую структуру. Эта группа программ широко распространена для специальных задач и создания автономных модулей.

2. Составление *заменяемых программных пакетов (досок)* для решения задач, состоящих из отдельных этапов. Рабочие области программного пакета соединяются коммутационными шнурами. Смена пакетов позволяет решать отдельные этапы различных задач и приспосабливать всю систему обработки данных к изменениям в их постановке. Так, например, перфорационная машина, табулятор, представляет собой набор программных пакетов, замена которых дает возможность выполнить специальные функции для решения определенных этапов задач.

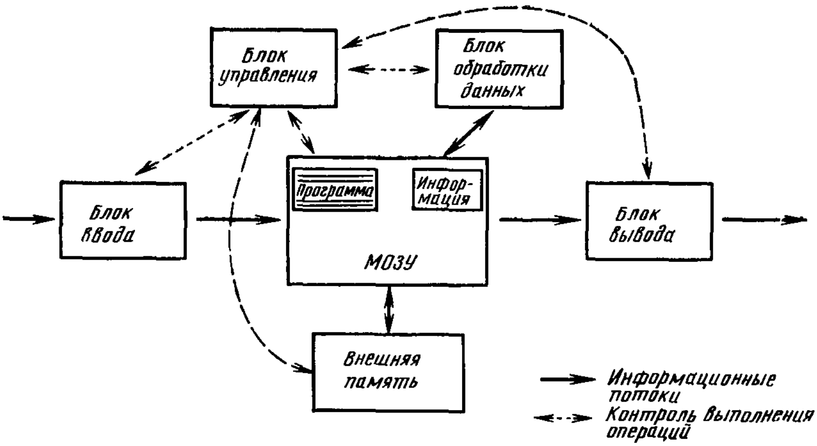


Рис. 8.7. Функциональная схема обработки информации с применением ЭВМ

3. Составление *программ запоминающих устройств ЭВМ.* Эта группа программ позволяет выполнять быструю смену задач обработки данных, так как она размещена в памяти ЭВМ и оттуда управляет этим процессом.

На рис. 8.7 представлена функциональная схема обработки данных с применением ЭВМ. На схеме выделены отдельные функциональные блоки независимо от их технической реализации. Данные вводятся в блок памяти, где они фиксируются. Блок управления выполняет функцию диспетчера над процессом функционирования системы обработки данных. С помощью блока обработки данных выполняется решение задачи. Стрелки, изображенные сплошными линиями, показывают направление движения потока данных через вычислительное устройство, пунктирные стрелки — контроль выполнения операций. На первом этапе работы в память на магнитных носителях записывается управляющая программа, которая в дальнейшем с помощью функциональных блоков запускается для решения задач по обработке данных. Отсутствие управляющей программы делает невозможной обработку данных и выполнение различных логических операций. Лишь ее наличие позволяет решить поставленные задачи. Магнитное оперативное запоминающее устройство (МОЗУ) представляет собой набор магнитных ферритовых ячеек (матриц), на которых можно легко записать и стереть любую информацию. ЭВМ имеет возможность работать сразу по нескольким программам, выполненным в разных режимах, что позволяет производить обработку данных для большого количества задач.

Обратимся теперь к технической реализации функциональных блоков. В качестве блока ввода используют клавиатуру пишущих машинок, устройство ввода с перфокарт или с перфоленты. В качестве блока вывода пользуются алфавитно-цифровым печатающим устройством, ленточным или карточным перфоратором. В качестве блоков памяти применяются магнитные ленты, диски, барабаны и магнитные карты.

Рассмотрим подробнее процесс обработки данных при решении определенной задачи. Блок управления локализует соответствующую программу, накопленную в оперативной памяти в форме отдельных команд (слов). Последовательность этих команд, определяющая порядок выполнения операций при реализации заданного алгоритма, называется программой. Итак, блок управления локализует первую команду программы. Эта команда численно закодирована, т. е. она состоит из определенной последовательности логических решений «да—нет». Эта последовательность распознается блоком управления и влечет за собой выполнение того или иного решения, т. е. читаются нужные данные с запоминающего устройства, переносятся в блок обработки, где выполняются необходимые операции, и результат их выполнения записывается в определенные области внешнего запоминающего устройства. Для этих точно определяемых технических операций, которые выполняются достаточно быстро, укоренился ряд антропоморфных понятий. Например, последовательность двоичных разрядов интерпретируется как команда, чтобы определенная информация сообщалась из одной части устройства в другую; или говорят, что команды выполняются, распознаются и т. д. Блок управления выполняет команды последовательно одну за другой, вызывая их из оперативной памяти и отправляя в блок обработки данных, где выполняются соответствующие операции.

Электронно-вычислительные устройства для обработки данных характеризуются гибкостью, быстрой сменой программ, оперативной скоростью и большим объемом памяти, что позволяет решать сложные задачи. Причем объем информации не должен превышать объем внешней памяти на магнитных носителях, а управляющая программа должна соответствовать объему оперативной памяти.

Команды являются элементарными операциями, которые выполняются вычислительными машинами. Для каждой машины имеется определенное количество команд, которые в принципе составляют систему программирования для различных логических операций. Каждая команда, представляя собой соответствующую последовательность логических решений «да—нет», является указанием, определяющим единичный шаг работы исполнительного устройства вычислительной машины в общем процессе выполнения программы.

Имеются команды ввода и вывода данных; команды, выполняющие обычные вычислительные операции; команды сравнения последовательностей двоичных разрядов и согласованности между ними; команды условных и безусловных переходов. Что касается команд сравнения и согласования, то организация рабочего цикла может быть сделана независимо от того, имеется ли согласование или нет. Это приводит к запланированному заранее логическому решению задачи в машине и к условным и безусловным переходам. Наконец, имеются команды, позволяющие организовать циклы. Все команды гибко связаны с программами.

Используя команды сравнения, можно упорядочивать последовательность чисел или составлять различные таблицы частот, прибавляя в организованном счетчике по единице, когда число попадает в определенный реквизит таблицы. Буквы или слова могут быть отсортированы в алфавитном или в другом каком-либо порядке. Итак, устройства для обработки данных не ограничиваются только выполнением арифметических действий. При привязке соответствующих программ появляются следующие возможности:

1. Хранение, организация, перераспределение и выдача информации;

2. Выполнение сложных вычислительных операций;

3. Принятие различных логических решений, позволяющих обрабатывать информацию в различном запросе;

4. Выполнение операций в быстром режиме и с достаточной точностью.

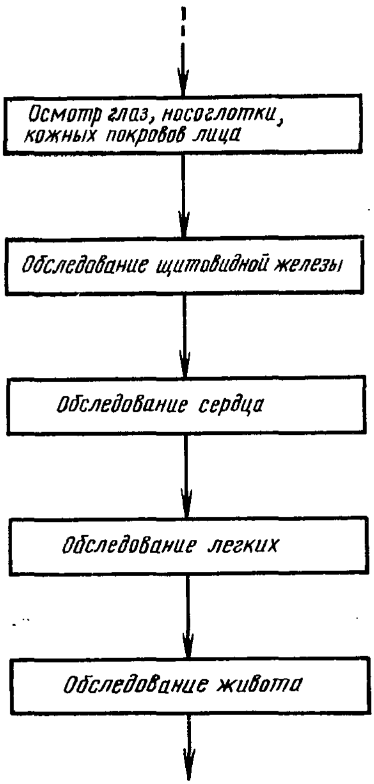


Рис. 8.8. Укрупненная блок-схема медицинского обследовання пациента. Обычно врач пройзводит осмотр пациента в указанном порядке

Задача подготовки программы состоит из двух этапов. На первом этапе создаются алгоритм и блок-схема, детализированная до уровня элементарных операций, которые могут быть выполнены в машине. На втором этапе на основе разработанных алгоритмов происходит написание программы, которая вводится в вычислительную машину.

В качестве примера рассмотрим блок-схему и последовательность шагов решения еще не запрограммированной задачи из области медицины. Представленная на рис. 8.8 блок-схема, состоит из отдельных шагов, на которые можно разбить процесс терапевтического осмотра пациента. На рис. 8.9 изображена детализация второго шага, касающегося обследования щитовидной железы. Из схемы видно, что этот процесс может протекать различными путями, иа которые указывают разветвления и логические связи между детализированными шагами. Такая детализация шагов позволяет учесть все возможности, которые могут встретиться при осмотре щитовидиой железы, независимо от того, в какой последовательиости эта процедура осуществляется. Последняя блок-схема представляет собой алгоритм решения данной задачи. Она устанавливает последовательность выполнения отдельных операций в вычислительной машине. Программисту при взгляде на эту блок-схему становится ясно, какие операции выполнять с помощью ЭВМ, а какие без нее. При программировании применяются алгоритмы, которые однозначно указывают ход выполнения программы. Детализируя укрупненную блок-схему, программист доходит до уровня машинных команд, которые заложены в ЭВМ.

Рассмотрим процесс программирования задачи на простом примере, состоящем в вычислении среднего значения по 10 000 чисел. 10 000 чисел набиваются на перфокарты, одна из которых представлена на рис. 8.10. Данная перфокарта

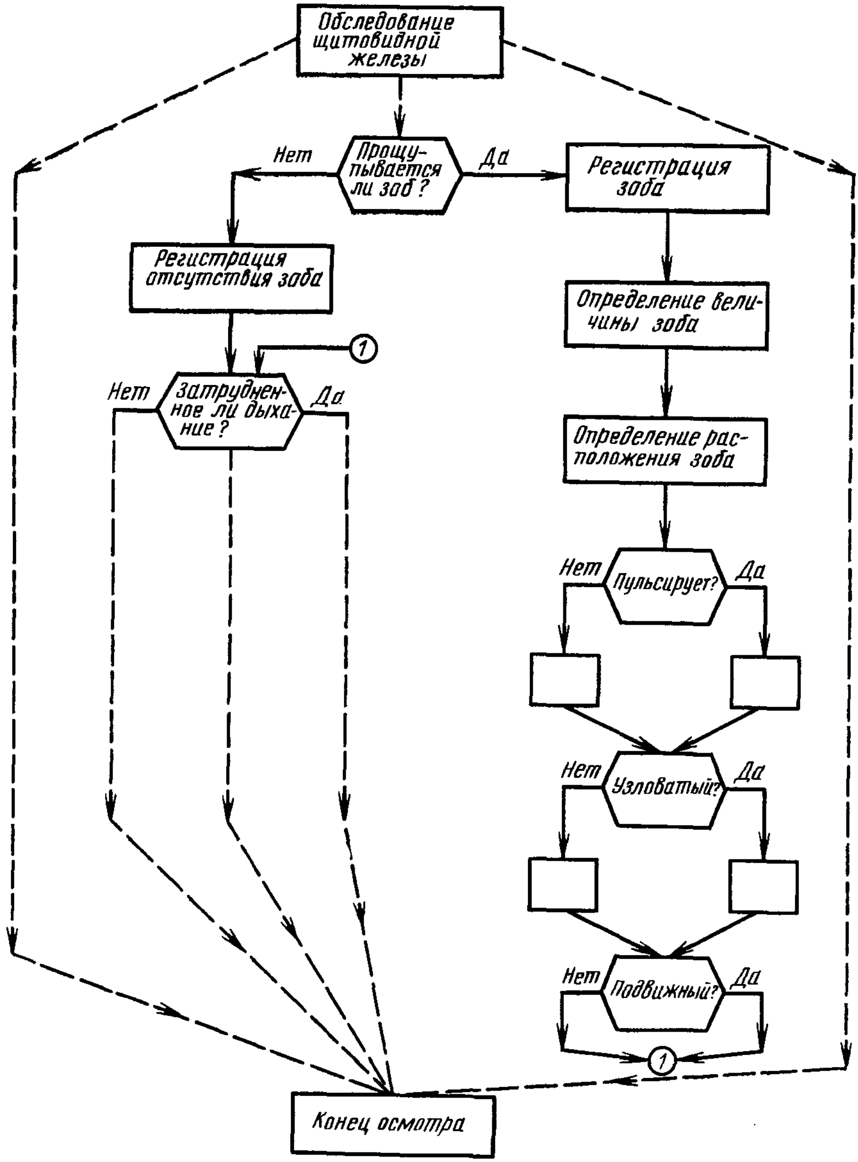


Рис. 8.9. Детализированная блок-схема второго шага укрупненной блок-схемы

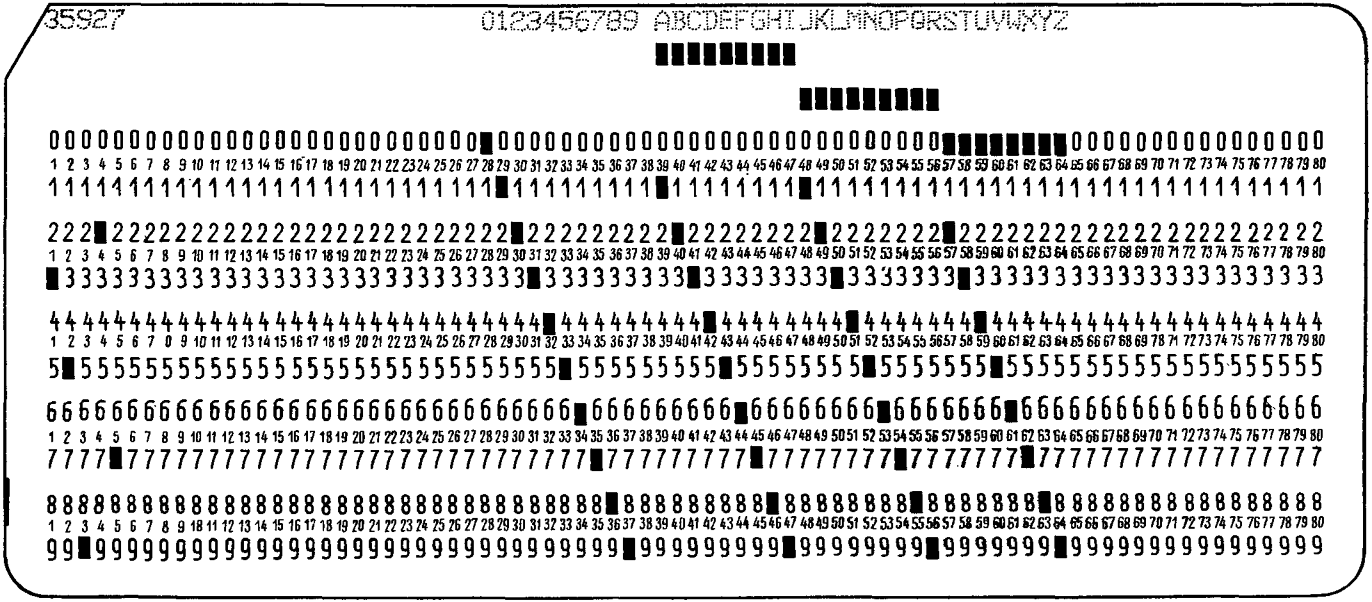
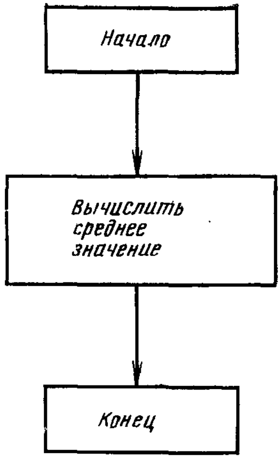


Рис. 8.10. Форма перфокарты, используемой для записи данных путем сквозной пробивки кодовых отверстий, располагаемых в определенных кодовых позициях. Отперфорированиая информацня отражеиа в верхней части перфокарты

Рис. 8.11. Укрупненная блок-схема вычисления среднего значения



имеет 80 колонок и 12 строк с учетом 11-й и 12-й позиций. В первых пяти колонках отперфорировано число 35927. В каждой колонке при набивке цифровой информации перфорируется одно отверстие. Например, отверстие в строке 0 означает число 0, отверстие в строке 1 — число 1 и т. д. При перфорации буквенных символов выполняют сдвоенную пробивку в перфорационных позициях. Например, отверстия в колонке 39 означают букву А, а в колонке 40—букву В. В первых пяти колонках каждой из 10 000 перфокарт перфорируются числа, по которым должно быть вычислено среднее значение. Таким образом осуществляется перфорация данных для дальнейшей обработки ее в машине.

Укрупненная блок-схема этой задачи представлена на рис. 8.11. Так как очередной шаг вычисления средней не детализирован, невозможно запрограммировать данную процедуру. Кроме того, исходные данные не занесены еще в оперативную память машины. Введение шагов ввода и вывода данных в блок-схеме на рис. 8.12 также еще не дает возможности запрограммировать задачу в целом. Окончательный вариант детализированной блок-схемы, которая является основой создания программы на машинном языке, изображен на рис. 8.13. Важным моментом в детализированной блок-схеме является организация цикла разветвления на 10 000 раз.

Блок-схема на рис. 8.13, описывающая задачу в общем виде, в то же время детализирует ее, разбивая на отдельные шаги, представленные в виде предписаний выполнения определенных операций. Эти предписания-команды затем записываются на языке программирования. На рис. 8.14 представлена запись процедуры вычисления среднего по 10 000 чисел на так называемом проблемно-ориентированном языке Фортран. Эта запись в виде нескольких строк позволяет ЭВМ провести действия над 10 000 чисел: сложить, вычислить среднее значение и выдать данные.

Такую программу называют программой на исходном языке. Она перфорируется на перфокарты и тем самым не является программой непосредственной обработки. Следующий этап работы заключается в формировании рабочей программы, а именно в кодировании команд, записанных на Фортране, в последовательности решений «да—нет», которые интерпретируются в ЭВМ как машинные команды. Последняя процедура при ручном выполнении занимает много вре-

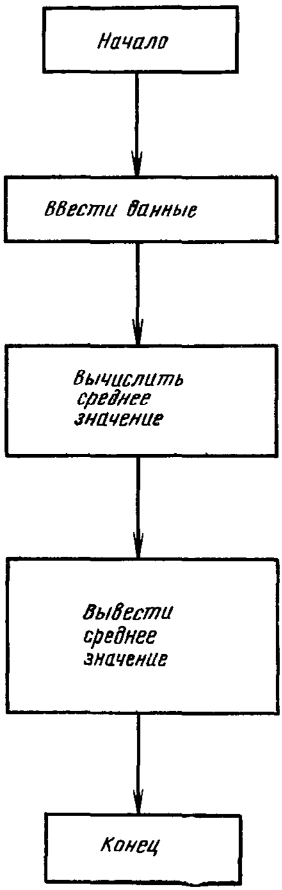


Рис. 8.12. Укрупненная блок-схема вычисления среднего значения с шагами ввода и вывода данных

мени, и исполнитель может допустить ошибки. ЭВМ располагает управляющей программой, или транслятором, который преобразует исходную программу в рабочую (машинную). Эта переведенная с одного языка на другой машинная программа выводится на внешние носители (перфокарты или перфоленты), а затем записывается в МОЗУ. Таким образом, ЭВМ сама выполняет процедуру программирования на понятном для нее языке, т. е. берет на себя ту часть работы, которая наиболее подвержена ошибкам. Программа-транслятор позволяет проверить, в каких областях исходная программа не соответствует правилу кодирования, и выдает диагностические указания по допущенным ошибкам, например отсутствие открывающей или закрывающей скобки, запятой или точки с запятой. В таких условиях определенная команда — переход, передача управления — не может быть выполнена. Диагностика ошибок в разных машинах осуществляется по-разному и является важнейшим вспомогательным средством при программировании. Развитие проблемно-ориентированных языков, а также создание программ управления и трансляторов способствовали еще более широкому применению ЭВМ. Изучение проблемно-ориентированных языков не представляет особой трудности. Программы, написанные для одной ЭВМ, можно переносить на другую, но с определенными ограничениями на уровне проблемно-ориентированных языков. В то же время машинная программа, заложенная в ЭВМ, всегда специфична для нее.

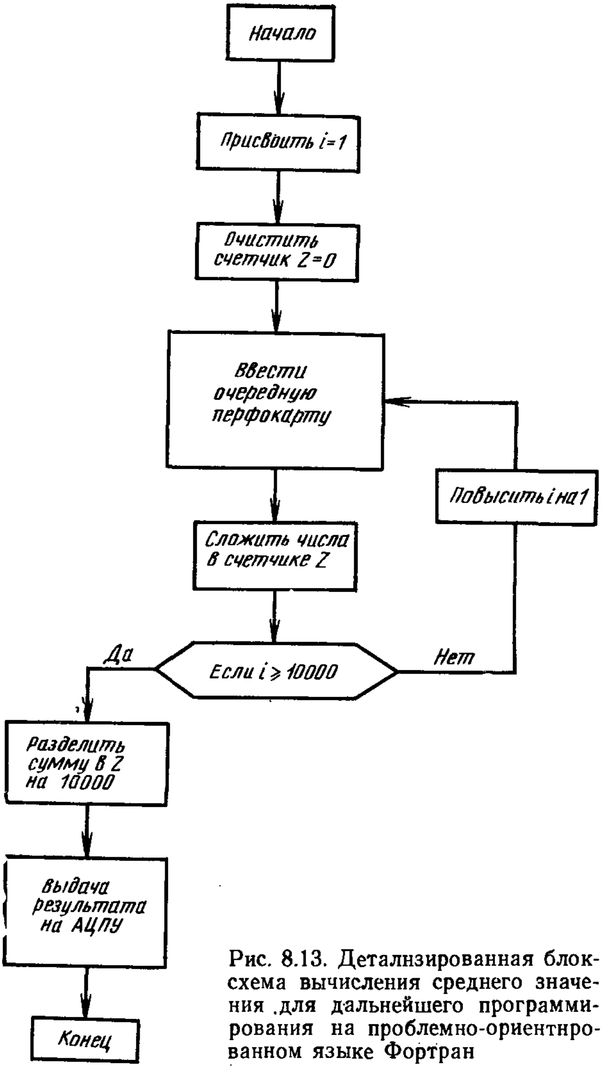


Рис. 8.13. Детализированная блок-схема вычисления среднего значения для дальнейшего программирования на проблемно-ориентированном языке Фортран

Следует различать управляющую программу и подпрограмму, позволяющую выполнять любые сложные часто повторяющиеся операции. Подпрограмма допускает многократное обращение к ней из различных областей управляющей программы.

Для решения задач факторного анализа привлекать большие ЭВМ более целесообразно, чем средние, даже если последние более доступны. Это связано с тем, что средние ЭВМ имеют меньший объем оперативной памяти и у них отсутствуют внешние запоминающие устройства. Одним из достоинств больших ЭВМ является то, что их математическое обеспечение располагает стандартными программами факторного анализа.

```
      Z=0
      DØ 10 I=1,10000
      READ 11,X
10    Z=Z+X
11    FØRMAT (F 5.0)
      X QUER=Z/10000.
      PRINT 12, X QUER
12    FØRMAT (80 X,F 10.3)
      END
```

Рис. 8.14. Исходная программа на Фортране, отражающая детализированную блок-схему на рис. 8.13

8.8.2. Влияние ЭВМ на развитие факторного анализа

Вкратце рассмотрим, какое влияние оказало на развитие факторного анализа применение ЭВМ. Вполне очевидно, что на проведение факторного анализа приходится затрачивать немало сил и времени. Несколько десятилетий назад на решение задачи центроидным методом с последующим вращением уходил целый месяц, а то и больше. На анализ главных факторов при скромном числе переменных (порядка 30) затрачивался год. Эта длительная и утомительная работа имела то преимущество, что ее могли выполнять только те люди, которые разбирались в теоретических вопросах. Они очень долго обдумывали, какие переменные привлекать к анализу, а какие нет, так как каждая дополнительная переменная резко увеличивала объем работ. В настоящее время почти все возможные переменные включаются в анализ. Но это не всегда приносит желаемый эффект в смысле улучшения качества решения. Применение ЭВМ, которое значительно облегчило проведение вычислений, имеет не только положительные стороны. Так, при расчетах на ЭВМ нет возможности тщательно подбирать переменные, исходя из их содержательных особенностей. С увеличением мощностей быстродействующих ЭВМ стало значительно больше, чем раньше, решаться задач с применением методов факторного анализа. До определенной степени использование ЭВМ в таких задачах расценивается как уровень научной подготовки исследователя. Благодаря ЭВМ стало возможным выполнение некоторых новых вычислительных процедур факторного анализа.

Кроме того, ЭВМ оказали несомненное влияние на развитие теории факторного анализа. Так, в настоящее время чаще всего проводится факторный анализ в терминах главных компонент, который обладает определенными преимуществами перед другими методами, но его применение немыслимо без ЭВМ. Центроидный же метод, недавно столь распространенный из-за экономии в объеме вычислительных работ, применяют лишь в особых случаях. Создание новых методов и постановка новых проблем невозможны без ЭВМ. Появление ЭВМ позволило разработать ряд сложных теорий в факторном анализе. Книги таких авторов, как Харман [117] и Хорст [142], никогда бы не были написаны, если бы ЭВМ не дали такой толчок развитию факторного анализа и его применению во многих областях знания. Создание аналитических методов вращения было связано с возможностью составления машинных программ для реализации поиска простой структуры. Аналитические методы вращения, в свою очередь, способствовали объективизации определения простой структуры и развитию новых критериев вращения. Выполнение расчетов на ЭВМ вносит ясность в запутанные проблемы, так как заставляет однозначно формулировать задачу при составлении новых или подборе готовых программ.

Другая область, на которую оказало сильное влияние внедрение ЭВМ,— это статистическое моделирование. Применение моделирования на ЭВМ в факторном анализе подробно обсуждалось в разделе 7. Получение случайных величин на ЭВМ с заранее заданной структурой позволяет проводить эксперимент при помощи машины. Такой метод экспериментирования дает возможность имитировать условия, существующие в реальном мире. Путем моделирования вычисляют, при каких условиях факторы, выделенные по матрице выборочных коэффициентов корреляции, соответствуют факторам, заложенным в генеральной совокупности. Моделирование позволяет установить преимущества и недостатки того или иного метода факторного анализа при различных условиях в генеральной совокупности и установить границы применения этих методов, а также позволяет проверить точность различных вычислительных процедур. С помощью ЭВМ можно опытным путем проверить достоверность результатов факторизации корреляционной матрицы.

Итак, вполне очевидно, что развитие и внедрение в практику быстродействующих ЭВМ оказало влияние на развитие теории факторного анализа, создало возможность контролировать его результаты и проверять точность выводов. Благодаря ЭВМ этот метод стал реализуем для очень больших корреляционных матриц, освободив исследователя от вычислительной работы. А это, в свою очередь, способствовало распространению факторного анализа как метода научного исследования в различных областях знаний.

8.8.3. Пакеты программ факторного анализа

Для факторного анализа желательно иметь ряд программ, на которых мы здесь коротко остановимся. Программы должны разрабатываться как можно более гибкими для осуществления возможности перехода от одной программы к другой без их существенных изменений, например без повторной перфорации промежуточных результатов. Для реализации факторного анализа необходима программа определения корреляционной матрицы. Если факторный анализ ведется в терминах главных факторов, то должна быть предусмотрена программа этого метода с включением итерационной процедуры оценки общностей. По окончании выделения главных факторов вступает в работу программа варимакс-вращения, которую целесообразно объединять с предыдущей, как это, например, сделано в программе PAFA математического обеспечения стандартных программ факторного анализа на вычислительном центре в Дармштадте.

Реализацию математического аппарата факторного анализа в части программирования целесообразно вести отдельными подпрограммами, которые содержат все операции над матрицами. Так как в факторном анализе часто используется процедура обращения матрицы и вычисления собственных векторов и собственных значений, то необходима такая программа, которая выполняла бы эти операции достаточно точно. Кроме программ выполнения операций над матрицами, должен быть в распоряжении датчик случайных чисел для моделирования на ЭВМ различных процедур факторного анализа.

Остановимся более подробно на одной из стандартных программ, которая называется Rotoplot-программой. Она облегчает итеративную процедуру графического метода вращения при поиске простой структуры в соответствующей плоскости и дает графическое изображение факторного отображения. После достижения простой структуры программа обеспечивает распечатку матрицы факторного отображения в первичном решении $\mathbf{V}_{fp}$, полученной по стандартной программе из $\mathbf{V}_{rs}$, а также матрицы факторных корреляций $\mathbf{C}_r$ и матрицы преобразования $\mathbf{T}$. В распоряжении пользователя должна еще иметься программа оценки значений факторов.

8.8.4. Rotoplot-программа

Разработчиками этой программы являются Каттелл и Фостер [41]. В гл. 5.3 уже указывалось на то, что данная программа используется для процедуры вращения при поиске простой структуры. В табл. 8.8. представлена последовательность ввода карт с данными. В этой таблице используется термин «формат». Он указывает содержание информации в соответствующих колонках перфокарты. Программа состоит из трех этапов.

Этап 1. Ввод в память матрицы $\mathbf{V}_0$ и ее графическое изображение.

Этап 2. Считывание матрицы $\mathbf{V}_0$ и первой матрицы поворота. Выполнение первой процедуры вращения. Графическое изображение результата и вывод матрицы преобразования на карточный перфоратор.

Этап 3. Считывание матрицы $\mathbf{V}_0$ и матрицы преобразования предыдущего цикла. Ввод новой матрицы поворота. Переход к выполнению этапа 2.

Подготовка Rotoplot-программы и ее подпрограмм, сформированных для СДС 3300 на вычислительном центре в Майнце [1], представлена в табл. 8.9.

[1] В этом месте следует упомянуть господина Манна, одного из первых пользователей Rotoplot-программы, реализовавшего ее для решения своей задачи

Таблица 8.8

Последовательность ввода карт с данными при работе Rotoplot-программы

Последовательность	Количество карт	Содержание карт	Формат	Примечание
1	1	NF, NV, KENT, NRUN	4I5	NF — число факторов NV — число переменных KENT — этапы (1, 2, 3 см. в тексте) NRUN — номер цикла
2	1	(Указатель формата)	12A6	Формат указывается до 72-й колонки на карте, в которой расположена матрица V_0
3	Массив	Матрица V_0	Считывание формата аналогично пункту 2	Матрица V_0 Считывается число столбцов NF и число переменных NV
4	Массив	Матрица преобразования предыдущего цикла	(10X8F8.4)	Матрица преобразования, отперфорированная на предыдущем цикле (только на этапе 3)
5	1	(Указатель формата)	12A6	Формат, в котором считывается матрица поворота
6	Массив	Матрица поворота	Считывание формата аналогично пункту 5	Матрица поворота (только на этапах 2 и 3)

На рис. 8.15 дано графическое изображение результата отработки Rotoplot-программы полученное на АЦПУ (алфавитно-цифровом печатающем устройстве), а в табл. 8.10 представлена распечатка выходных данных. На первом этапе в качестве первых информационных карт вводится пакет управляющих карт, на которых указаны число переменных, число факторов, этап, а также номер цикла. Затем следуют карта формата матрицы V_0 и сама матрица V_0. На втором этапе присутствует формат матрицы поворота. На третьем этапе происходит считывание матрицы поворота и матрицы преобразования, которая была отперфорирована на предыдущем цикле. В состав управляющей программы входят 5 подпрограмм: MWRITE (распечатывает матрицу данных); CWRITE (распечатывает корреляционную матрицу); HYPCT (подсчитывает число переменных, для которых выполняется условие $|a_{il}/h_i| < 0{,}10$); PUNCH (осуществляет вывод карточной перфорации матрицы преобразования) и PLOT (дает графическое изображение повернутых факторов в соответствующих плоскостях). Написание программы осуществляется с использованием стандартных участков управляющей программы. Исходные данные контрольного примера распечатаны на листинге, содержание которого соответствует структуре табл. 8.8.

Таблица 8.9

Листинги Rotoplot-программы с контрольным примером

```
      PROGRAM  ROTOPLOT
CROTPLOT
      DIMENSION   V(50, 25),C(25, 25),   T(25,25) ,R(25) ,TS(25),RESULT(50, 25),
     1NFORM(18)  ,NFORMA(18),TEXT (18)
      COMMON NF, NV,NRUN,V,C,T
    2 FORMAT(415)
    5 FORMAT(10X,  8F8.4)
   11 FORMAT(1H1,  10X,8HFALL  1      /30X,18A4//)
   12 FORMAT(1H1,  10X,8HFALL  2      /30X,18A4//)
   13 FORMAT(1H1,  10X,8HFALL  3      /30X,18A4//)
   14 FORMAT(1H1)
   15 FORMAT(18A4  )
   20 FORMAT(//10  X,16HKOMMUNALI  TAETEN     )
   21 FORMAT(6X,10F12.5)
   22 FORMAT (///10X,21HSPALTENQUADRATSUMMEN           )
   23 FORMAT(//10X, 28HVARIANZANTEILE  DER  FAKTOREN
 5000 READ               2,NF,NV,KENT, NRUN
      READ  15, (TEXT (I), I=1,18)
      READ        15, (NFORM (I), I=1,18)
      DO 6                I=1,NV
    6 READ        NFORM, (V (I,J)  ,J=1,NF)
      IF (KENT-2)                100, 200, 299
  100 PRINT  11,(TEXT (I) , I=1,18)
      DO 101  K=1,NF
      DO 101  L=1,NF
      C (K,L)=0.
  101 C (K,K)=1.
      GO  TO                    310
  200 PRINT  12, (TEXT (I), I=1,18)
      DO 201  K=1,NF
      DO 201  L=1,NF
      T(K, L)=0.
  201 T(K, K)=1.
      GO TO                     300
  299 PRINT   13, (TEXT (I),I=1,18)
      DO    301          I=1,NF
  301 READ                5, (T (I,J),J=1,NF)
  300 READ          15, (NFORMA(I),I=1,18)
      DO  302         I=1,NF
  302 READ        NFORMA,(C ( I,J),J=1,NF)
      CALL MWRITE(NF,NF,-1)
      DO  304       J=1,NF
      DO  304       I=1,NF
  304 RESULT (J,I)=0.
      DO  305   J=1,NF
      DO  305       K=1,NF
      DO  305      I=1,NF
  305 RESULT (K,J)=RESULT (K,J)+T(K, I) * C (I,J)
      DO      306        J=1,NF
      DO  306       I=1, NF
  306 T (J ,I)=RESULT (J, I )
      DO            401              J=1,NF
  401 TS (J)=0.
      DO  402             J=1,NF
      DO  402          I=1, NF
  402 TS (J)=TS(J)+T (I, J) * * 2
      DO  403          J=1, NF
```

```
403 TS(J)=1./SQRTF(TS(J))
    DO 404       I=1,NF
    DO 404       J=1,NF
404 T(J,I)=T(J,I)*TS(I)
    DO 307  I=1,NF
    DO 307  J=1,NF
    C(I,J)=0.
    DO 307  K=1,NF
307 C(I,J)=C(I,J)+T(K,I)*T(K,J)
    DO 309  I=1,NV
    DO 308  J=1,NF
    R(J)=0.
    DO 308  K=1,NF
308 R(J)=R(J)+V(I,K)*T(K,J)
    DO 309  L=1,NF
309 V(I,L)=R(L)
    PRINT 14
    CALL MWRITE(NF,NF,O)
    CALL PUNCH
    PRINT 14
310 CALL MWRITE(NV,NF,1)
    DO 501       I=1,NV
    DO 501       J=1,NF
501 RESULT(I,J)=V(I,J)*V(I,J)
    DO 503       J=1,NF
503 R(J)=0.
    DO 504       J=1,NF
    DO 504    I=1,NV
504 R(J)=R(J)+RESULT(I,J)
    PRINT 22
    PRINT                  21,(R(J),J=1,NF)
    SUM=0.
    DO 505     J=1,NF
505 SUM=SUM+R(J)
    DO 506       J=1,NF
506 R(J)=R(J)*100./SUM
    PRINT 23
    PRINT                  21,(R(J),J=1,NF)
    DO 502         I=1,NV
502 RESULT(I,1)=0.
    DO 507     I=1,NV
    DO 507   J=1,NF
507 RESULT(I,1)=RESULT  (I,1)+V(I,J)*V(I,J)
    PRINT 20
    PRINT                 30,(RESULT(I,1),I=1,NV)
 30 FORMAT(6X,3F12.5)
    IF(KENT-1)            700,700,699
699 CALL CWRITE(NF)
700 CALL HYPCT(RESULT)
    NFM=NF-1
    DO 311    K=1,NFM
    KP=K+1
    DO 3 11   L=KP,NF
    CALL PL' OT(K,L)
311 CONTINUE
    GO TO 5000
    END
```

```
      SUBROUTINE  PLOT (NF1,NF2)
      COMMON NF,NV,NRUN,V,C,T
      DIMENSION V (50, 25) , C(25,25),T (25,25),MPLOT (61,101),IX (101),IY(101)
      COMMON/DATA/K1,K2,K3, K4,K5,KBLANK,KI,KPLUS ,KMIN
      DATA (K1=4H1    ),(K2=4H2    ),(K3=4H3    ),(K4=4H4    ),(K5=4H5    ),
    1 (KBLANK=4H     ),(KI=4H1    ),(KPLUS=4H+   ), (KMIN=4H-   )
 1001 FORMAT (1H1,50X,I2,50X, 2HR=  F6.3)
 1002 FORMAT (1X,101A1)
 1003 FORMAT (1X,101A1,I5)
      PRINT                  1001,NF1, C(NF1, NF2)
      DO    1          J=1,NV
      IF(V (J,NF1))          101, 102,102
  101 IY (J)=30. *V(J,NF1)-0.1+30.
      GO TO 103
  102 IY (J)=30.*V (J,NF1)+0.1+30.
  103 IF(V (J,NF2) )                  104,105,105
  104 IX  (J)=50.*V(J,NF2)  -0.1+50.
      GO  TO  1
  105 IX  (J)=50.* V(J,NF2)+0.1+50.
    1 CONTINUE
      DO  2         I=1,61
      DO  2            J=1,101
    2 MPLOT (I,J)=0
      DO  3            J=1,NV
      I=IX (J)+1
      K=IY (J)+1
      K=62-K
    3 MPLOT (K,I)=MPLOT (K,I)+1
      DO  30     K=1,101
      DO  30          I=1,61
      IF (MPLOT (I,  K) )           30,30,21
   21 IF (MPLOT (I,  K)-1)                 22,22,23
   22 MPLOT (I,K)=K1
      GO  TO  30
   23 IF (MPLOT (I,K)-2)                     24,24,25
   24 MPLOT(I,K)=K2
      GO  TO  30
   25 IF (MPLOT (I,K)-3)                      26,26,27
   26 MPLOT(I,K)=K3
      GO  TO  30
   27 IF (MPLOT  (I,K)-4)                        28,28,29
   28  MPLOT(I,K)=K4
      GO  TO  30
   29 MPLOT (I,K)=K5
   30 CONTINUE
      MZ=1
      DO  40        J=1,101
      IF (MPLOT  (1, J))                 40,41,40
   41 IF (MZ-J)                    42,42,43
   42 MZ=MZ+5
      MPLOT (1,J)=KPLUS
      GO  TO  40
   43 MPLOT (1,J)=KMIN
   40 CONTINUE
      MR=4
      ML=4
      DO     60   I=2,60
```

```
    IF (MPLOT (I,1))              49,46,49
 46 IF (ML—I)                   47,47,48
 47 ML=ML+3
    MPLOT(I,1)=KMIN
    GO TO 49
 48 MPLOT( I,1)=KI
 49 CONTINUE
    IF (I—31)            55,51,55
 55 IF (MPLOT (I,51))              51,50,51
 50 MPLOT (I,51)=KI
 51 CONTINUE
    IF (MPLOT (I,101))                 60,52,60
 52 IF (MR—I)            53,53,59
 53 MR=MR+3
    MPLOT (I,101)=KMIN
    GO TO 60
 59 MPLOT (I,101)=KI
 60 CONTINUE
    IF (MPLOT (31,51))            62,61,62
 61 MPLOT (31,51)=KPLUS
 62 CONTINUE
    DO 70         J=1,101
    IF (MPLOT (31,J)   )          70,65,70
 65 MPLOT (31,J)=KMIN
 70 CONTINUE
    MZ=1
    DO  80           J=1,101
    IF (MPLOT (61,J))               80,71,80
 71 IF (MZ—J)            72,72,73
 72 MZ=MZ+5
    MPLOT (61,J)=KPLUS
    GO TO 80
 73 MPLOT (61, J) =KMIN
 81 CONTINUE
    DO 90         K=1,61
    DO 90     I=1,101
    IF (MPLOT (K, I))          90,89,90
 89 MPLOT (K,I)=KBLANK
 90 CONTINUE
    DO 500          I=1,30
500 PRINT                      1002,(MPLOT (I,K),K=1,101)
    PRINT                      1003,(MPLOT (31,K),K=1,101),NF2
    DO 501       I=32,61
501 PRINT                      1002,(MPLOT (I,K),K=1,101)
    RETURN
    END
       FINIS

     SUBROUTINE CWRITE (NSP)
     COMMON NF,NV,NRUN,V,C,T
     DIMENSION  V(50, 25),C(25,25), T(25,25)
   1 FORMAT(1X, I 13, 9I 12 //)
1001 FORMAT(1H1,5X, 45HKORRELATIONSMATRIX ZWISCHEN REFERENCE VES-
                                                          TORS///)
```

```
  2 FORMAT (1X,13.10F12.5)
    PRINT  1001
    NPRF=10
 11 IA=NPRF-9
    IF (NSP-BPRF)            12,12,14
 12 PRINT                   1,(J,J=IA,NSP)
    DO 13 I=IA,NSP
 13 PRINT                   2,I,(C(I,J),J=IA,I)
    GO TO                    17
 14 PRINT                   1, (J,J=IA,NPRF)
    DO 15 I=IA,NPRF
 15 PRINT                   2,I,(C(I,J),J=IA,I)
    IZ=NPRF+1
    DO 16 I=IZ,NSP
 16 PRINT                   2,I,(C(I,J),J=IA,NPRF)
    NPRF=NPRF+10
    GO TO                    11
 17 RETURN
    END

    SUBROUTINE PUNCH
    COMMON NF,NV,NRUN,V,C,T
    DIMENSION  V(50, 25) ,C(25,25),T(25,25)
    DO 1              I=1,NV
    NR=0
    IK=1
    KA=1
    KK=8
  2 II=1
    PUNCH                  1001,NRUN,II,IK,(T(I,K),K=KA,KK)
    NR=NR+8
    IF  (NF-NR)           1,1,4
  4 IK= IK+1
    KA=KA+8
    KK=KK+8
    GO  TO    2
  1 CONTINUE
)01 FORMAT (      313,1X,8F8.4)
    RETURN
    END

    SUBROUTINE HYPCT (RESULT)
    COMMON NF,NV,NRUN,V,C,T
    DIMENSION V(50, 25), KT(25),KPROZ(25),C(25,25),T (25, 25),
   1RESULT (50, 25)
 11 FORMAT (1H141HAUSZAEHLUNG DER KOORDINATENHYPEREBENEN //12X)
   116H (BARGMANN-TEST) //1X, 7HFAKTOR
   110X, 6HANZAHL,10X,7HPROZENT     )
 12 FORMAT (1X,I4,I16, I17)
 13 FORMAT (1X, 6HGESAMT,I14, I17)
    DO 50     I  =  1,NV
 50 RESULT (I,I) = SQRTF (RESULT (I,I))
    KSUM=  0
```

```
      DO 20 L = 1,NF
      KT (L)=0
      DO 20 M=1,NV
      IF (ABSF (V (M,L)/RESULT (M,1))-0.1)  19,19,20
   19 KSUM=KSUM+1
      KT (L)=KT (L)+1
   20 CONTINUE
      DO 21 N=1,NF
   21 KPROZ (N)= (100*KT (N))/NV
      IPROZ= (100*KSUM) /(NV*NF)
      PRINT  11
      DO 22  K=1,NF
   22 PRINT                    12,K,KT (K),KPROZ (K)
      PRINT                    13,KSUM,IPROZ
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MWRITE (NZ,NSP,NENT)
      COMMON NF,NV,NRUN,V,C,T
      DIMENSION  V (50, 25), C (25,25), T (25,25),W (50,25)
    6 FORMAT(1X, I 13, 9I12/ / )
    7 FORMAT(1X, I 3,10F12. 5 )
 2001 FORMAT(5X,10HV—MATPIX           13///)
 2002 FORMAT(5X,26H STANDARDISIERTE T-MATRIX        I3///)
 2003 FORMAT(5X,14H SHIFT-MATRIX             I3///)
      IF (NENT)           20, 8, 71
   71 DO 72 J=1,NZ
      DO 72 K=1,NSP
   72 W (J,K)=V(J,K)
      DO TO  50
    8 DO 9 J=1,NZ
      DO 9 K=1,NSP
    9 W (J,K)=T (J,K)
      GO TO  51
   20 DO 21     J=1,NZ
      DO 21      K=1,NSP
   21 W (J,K)= C (J,K)
        GO TO  52
   50 PRINT    2001, NRUN
      GO TO    10
   51 PRINT    2002, NRUN
      GO TO    10
   52 PRINT   2003,NRUN
   10 NPRF=10
   11 JA=NPRF—9
      IF ( NSP—NPRF)             12 ,12,14
   12 PRINT                    6, (J,J=JA,NSP)
      DO 13   I=1,NZ
   13 PRINT                    7, I,(W (I,J ),J=JA,NSP)
      GO TO                        16
   14 PRINT                    6, (J,J=JA,NPRF)
      DO 15   I=1,NZ
   15 PRINT   7,I,(W (I,J),J=  JA,NPRF)
      NPRF=NPRF+10
      GO TO                        11
   16 RETURN
      END
```

```
     2    24     2

 (2F5.2)
      93   23
      24   89
      89   23
      20   92
      89   27
      23   93
      92   29
      26   92
      93   31
      31   92
      94   25
      29   91
      93   27
      30   92
      94   27
      29   91
      94   28
      27   92
      92   29
      25   91
      94   26
      31   91
      94   25
      27   92
 (2F 4.2)
 +100— 28
 — 25+100
```

Таблица 8.10

Распечатка выходных данных

ЭТАП 2
МАТРИЦА ПОВОРОТА 1

	1	2
1	1.00000	—0.28000
2	—0.25000	1.00000

МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ Т 1

	1	2
1	.97014	—0.26963
2	—0.24254	0.96296

V-МАТРИЦА 1

	1	2
1	.84645	−0.02927
2	.01698	.79233
3	.80764	−0.01849
4	−0.02910	.83200
5	.79794	.02003
6	−0.00243	.83354
7	.82220	.03121
8	.02910	.81582
9	.82705	.04776
10	.07761	.80234
11	.85130	−0.01271
12	.06063	.79810
13	.83675	.00924
14	.06791	.80504
15	.84645	.00655
16	0.6063	.79810
17	.84402	.01618
18	.03881	.81313
19	.82220	.03120
20	.02183	.80889
21	.84887	−0.00308
22	.08004	.79271
23	.85130	−0.01271
24	.03881	.81313

СУММА КВАДРАТОВ ЭЛЕМЕНТОВ ПО СТОЛБЦАМ

8.37038 7.85774

ДОЛИ ДИСПЕРСИИ ФАКТОРОВ

51.579646 48.42054

ОБЩНОСТИ

.71733	.62807	.65263
.69307	.63711	.69480
.67698	.66641	.68629
.64978	.72487	.64065
.70023	.65270	.71652
.64065	.71264	.66268
.67698	.65478	.72060
.63480	.72487	.66268

МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ ВТОРИЧНЫМИ ОСЯМИ

	1	2
1	1.00000	
2	−0.49513	1.00000

00000.1

КРИТЕРИЙ БАРГМАНА

ФАКТОР	ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ	ПРОЦЕНТ
1	11	45
2	12	50
ВСЕГО	23	47

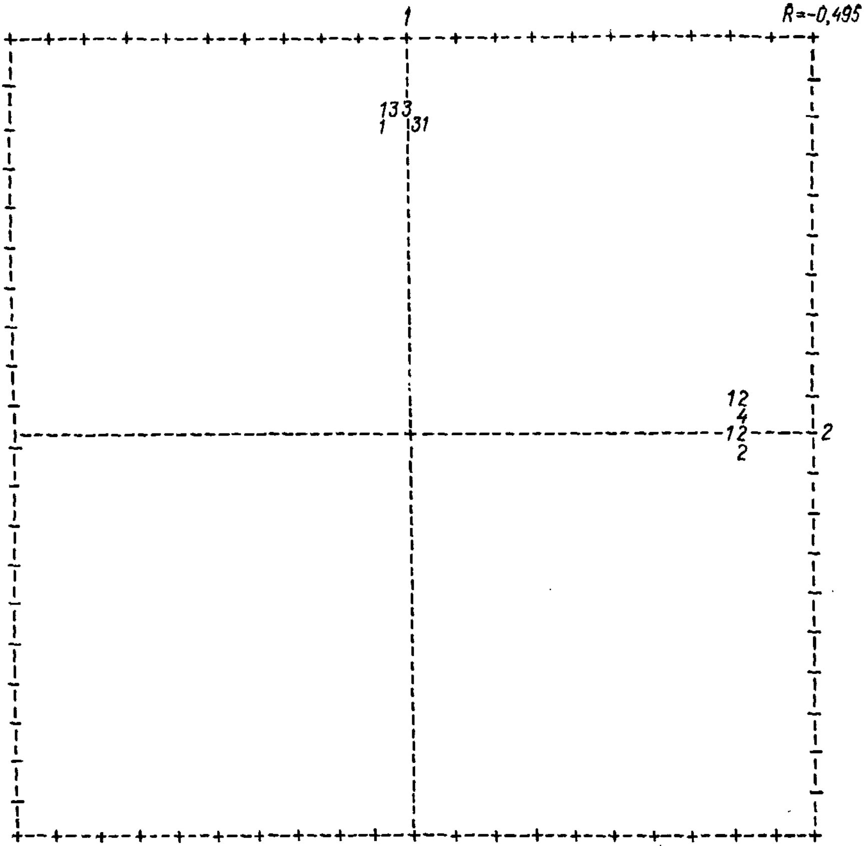


Рис. 8.15. Графическое изображение результата отработки Rotoplot-программы, полученное на АЦПУ (алфавитно-цифровом печатающем устройстве)

8.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Шестьдесят лет спустя после первого применения * факторный анализ еще вызывает много споров. Поэтому в заключение нам хотелось бы сформулировать еще раз рекомендации по его использованию. Это является трудной задачей, так как никакой систематизации в этом направлении до сих пор еще не было проведено, а мнения специалистов по поводу области приложения и эффективности разных процедур очень противоречивы. Далее будем различать четыре области приложения факторного анализа. Разбиение на эти области основано на современном уровне знаний. Не исключено, что в будущем произойдет зна-

* История развития факторного анализа описана в гл. 1.2. Первое издание книги вышло в 1968 г. — *Примеч. пер.*

чительное перераспределение и расширение сфер применения факторного анализа.

1. Методами факторного анализа исследуется *структура малоизвестной области знания*, при этом либо ищется подтверждение существующей гипотезы, либо формируется новая. Это классическая область применения факторного анализа, примером которой может служить исследование интеллектуальных возможностей. Вся область исследования покрывается гипотетическими переменными, отличными друг от друга, из которых затем отбирают типичные (или извлекают репрезентативную выборку). По этим переменным проводят факторный анализ, включая процедуру вращения для поиска простой структуры. Факторы, удовлетворяющие принципу простой структуры, представляют собой гипотезу о группировках наблюдаемых переменных в рассматриваемом пространстве. Все выделенные факторы должны соответствовать реальным факторам, определяющим механизм взаимодействия переменных в изучаемом явлении. Это составляет одну из целей анализа. Факторы можно выделять не только по переменным, но и по индивидуумам. Следует особо подчеркнуть, что факторный анализ применяется для генерирования новых гипотез, которые должны подтвердиться в ходе дальнейших экспериментов. Оценка значений факторов при этом не обязательна. Коэффициент множественной детерминации между переменными и факторами служит критерием оценки значений соответствующего фактора.

2. Факторный анализ может быть применен для *оценки непосредственно не измеримых величин*. По сравнению с предыдущей областью применения это соответствует более глубокому пониманию целей факторного анализа. В этом случае задачей факторного анализа является не только выявление структуры данных, но и определение значений факторов. Такие задачи возникают, например, при биологических исследованиях, когда про некоторую величину заранее известно, что она непосредственно не измерима, но коррелирует с несколькими измеримыми величинами. Оценки значений такой величины, полученные с помощью факторного анализа, являются более точными, чем оценки, полученные по отдельным, коррелированным с ней величинам. Процедура вращения здесь необходима для преобразования первого набора «сырых» факторных нагрузок в такой набор, который наилучшим образом соответствует проблематике изучаемого явления. Примером решения такой задачи является исследование функционального состояния поджелудочной железы, описанное в работе Оверолла и Вильямса [219]. С помощью моделирования на ЭВМ в гл. 7.3 было показано, что оценка значений не известной заранее величины (фактора) производится достаточно точно.

3. Факторный анализ применяется для *снижения размерности исходного набора признаков* без интерпретации выделенных факторов. Эту задачу хорошо выполняет компонентный анализ. Процедура вращения в этом случае отпадает. Факторы являются математическими конструкциями с определенными оптимальными свойствами, которым в реальной действительности большей частью нельзя найти никакого аналога. Для снижения размерности исследуемого факторного прост-

ранства кроме компонентного анализа можно применять и другие методы факторного анализа. При этом не требуется выявления однозначной простой структуры и подбора содержательно интерпретируемых факторов. Обычно при решении этой задачи следят только за соблюдением условия минимально возможной потери информативности исходных признаков. Если подбор переменных осуществляется произвольно, эксперименты не были тщательно подготовлены, имеются сомнения в подборе изучаемых групп при тестировании и присутствуют большие погрешности измерения, то следует отдавать предпочтение компонентному анализу, и при этом, конечно, может быть решена задача только снижения размерности. Если же эксперимент был организован правильно и подбор переменных и исследуемых объектов или индивидуумов заранее обдуман и спланирован для проведения факторного анализа, то можно по полученным данным решать и другие задачи. Снижение размерности факторного пространства достигается легче, чем две вышеназванные задачи факторного анализа.

4. Факторный анализ можно применять для *решения специальных проблем.* Успех при этом чаще всего зависит от интуиции и возможностей исследователя и достигается путем комбинации факторного и дисперсионного анализов, факторного и ковариационного анализов, а также факторного анализа и исследования временных рядов. Применение техники *P* позволяет провести классификацию индивидуумов или объектов, выделяя наиболее типичные их группы. В настоящее время проблеме информативной, непротиворечивой классификации, максимально отвечающей естественной системе индивидуумов и объектов, уделяется большое внимание. Вопросам выделения типичных группировок и описания их целевыми функциями занимался Шеффер [251]. Вудбери и Клевланд [320] применяли факторный анализ для оценки отсутствующих данных в наборе исходных величин.

Из сказанного ясно, что факторный анализ решает разнообразные задачи и в каждой области его приложения приходится преодолевать свои трудности. Полного описания правил, как поступать в различных ситуациях, до сих пор нет. Мы здесь разберем ряд вопросов, связанных с практическим применением факторного анализа. Эти вопросы разбиты на четыре группы и для наглядности оформлены в виде таблицы (см. табл. 8.11). Расположение вопросов в таблице соответствует той последовательности, с которой они возникают при реализации процедур факторного анализа. Положительным ответом на последний вопрос должно заканчиваться правильно организованное исследование методами факторного анализа. Вопросы, представленные в таблице, далее кратко, в той же последовательности обсуждаются в тексте.

I. *Вопросы, решаемые перед началом исследования.*

1. Какова цель проведения факторного анализа? Ответ на этот вопрос связан с одной из названных областей применения факторного анализа: а) изучение структуры малоизвестной области знания; б) оценка непосредственно не измеримой величины; в) снижение размерности исходного набора признаков; г) решение специальных проблем. Цель проведения факторного анализа должна быть заранее сформули-

Таблица 8.11

Вопросы, связанные с применением факторного анализа

I. *Вопросы, решаемые перед началом исследования*	II. *Вопросы, касающиеся технического осуществления факторного анализа*	III. *Вопросы, касающиеся интерпретации факторов*	IV. *Вопросы проверки факторного решения путем проведения дополнительных исследований*
1. Какова цель проведения факториого аиализа? 2. Какие переменные должны включаться в анализ? 3. Имеется ли какая-либо предварительная информация о даниой области исследования? 4. Проверено ли качество исходных даниых? 5. Какова надежность переменных? 6. Обрабатывались ли исходные данные методами одно- и двумериого статистического аиализа? 7. Можио ли вместо факторного анализа примеиить другой метод миогомерной статистикн? 8. Одиороден ли материал?	9. Используется ли обычиая техника факторного анализа? 10. Какова доля дисперсни выделеииых факторов в дисперсии иаблюдаемых переменных? 11. Удовлетворяют ли факторы принципу простой структуры? 12. Как точно можно оценить отдельные значеиия факторов? 13. Как точио воспроизводит полученное факториое решеиие матрицу исходиых данных? 14. Какое влияние на факторное решение оказывает исключение или добавление определеиных переменных? 15. Как измеияются факториые нагрузки от добавлеиия к матрице исходиых даииых матрицы, элементами которой являются случайные числа?	16. Соответствует ли фактор связям между переменными, являющимися некоторыми комбинациями других переменных? 17. Выявляется ли фактор при повторных измерениях одиой или иескольких переменииых, включеиных в анализ? 18. Отражает ли фактор известиую или трнвиальную функцноиальную связь между переменными? 19. Не является ли фактор результатом неоднородности данных? 20. Идеитифицируется ли фактор путем введения маркировочной переменной? 21. Выявлен ли важный фактор, отражающий сущность даиного явлеиия?	22. Воспроизводнтся ли фактор при повторной выборке из той же геиеральной совокупности? 23. Что известно об измененин фактора при различных условиях проведения эксперимента? 24. Можно ли воздействовать на измеиеиие фактора в ходе экспериметта?

ровава и формально отнесена к одной из четырех указанных областей. Четкая формулировка цели исследования является первым накладываемым ограничением.

2. Какие переменные должны включаться в анализ? Это является важным моментом факторного анализа, так как от выбора переменных зависит число, вид факторов и величина их нагрузок по отдельным переменным. Выбор переменных определяется целью анализа. Если изучается структура малоизвестной области и формулируются новые ги-

потезы об этой структуре, то нужно привлекать как можно более разнообразные переменные. Их число должно быть велико, и они должны покрывать своей системой всю область исследования. Причем не следует отдавать предпочтения каким-либо определенным переменным. Если производится оценка непосредственно не измеримой величины, то в анализ включают те переменные, которые связаны в какой-либо мере с этой величиной. Эти связи между переменными заранее анализируются, чтобы исключить появление фактора, обусловленного только методом измерения. Чтобы избежать этого нежелательного эффекта, рекомендуется проводить факторный анализ с различным набором переменных, сравнивая между собой полученные результаты (см. вопрос 14). Можно в анализ вводить также маркировочные переменные или ориентироваться на имеющиеся предположения данной отрасли науки, либо руководствоваться стремлением к согласованности результатов, достигнутых другими методами (см. вопросы 3 и 20). Подбор переменных является серьезной проблемой в факторном анализе, и этой проблеме нужно уделять должное внимание. В настоящее время при практических исследованиях выбор переменных чаще всего зависит от искусства исполнителя.

3. Имеется ли какая-либо предварительная информация о данной области исследования? Что известно о переменных, которые входят в факторный анализ? Четкая формулировка условий эксперимента и наличие предварительной информации о данной области исследования помогают лучше поставить задачу. Результат факторного анализа должен сравниваться с результатами исследований, выполненных другими методами, либо с ожидаемым результатом, который приводится в виде матрицы либо в виде схематического изображения, на котором указывается число факторов и крестиками отмечаются высокие нагрузки.

4. Проверено ли качество исходных данных? Ошибки в измерениях либо ошибки, допущенные при переписке данных, могут привести к искажению факторного решения или даже к появлению фактора, обусловленного только этими ошибками (см. 7.2.1). При практических исследованиях влияние такого типа ошибок часто недооценивается.

5. Какова надежность переменных? В качестве показателя надежности обычно используется квадрат коэффициента корреляции между оценками двух повторных групп измерений. Если надежность высокая, то относительная погрешность измерения (являющаяся дополнением до единицы по формуле (2.22)) низкая, и наоборот. Квадрат коэффициента надежности по формуле (4.2) является верхней границей общности. Таким образом, оценивая надежность каждой переменной перед началом проведения факторного анализа, мы обеспечиваем правильный выбор общности.

6. Обрабатывались ли исходные данные методами одно- и двумерного статистического анализа? Эксперименты должны проводиться так, чтобы их результаты выявляли сущность данного явления. Факторный анализ не должен проводиться без статистического описания всех включенных в него переменных. Должна быть обязательно проведена оценка значимости коэффициентов корреляции. Если распределе-

ние вычисленных коэффициентов корреляции является нормальным со средним значением, равным нулю, и стандартным отклонением, равным $1/\sqrt{n-2}$, то по таким данным нельзя проводить факторный анализ.

7. Можно ли вместо факторного анализа применить другой метод многомерной статистики? Часто при соответствующих постановках задачи другие методы многомерного статистического анализа оказываются значительно эффективнее, чем факторный анализ. К этим методам относятся дисперсионный, ковариационный, дискриминантный анализ, множественный регрессионный анализ, использование частных коэффициентов корреляции. Поскольку факторный анализ по сравнению со всеми перечисленными является наиболее трудоемким, исследователь должен каждый раз четко представить себе задачу и серьезно обдумать, действительно ли для ее решения ему необходим математический аппарат факторного анализа.

8. Однороден ли материал? В гл. 8.5 на примерах было показано, что неоднородность может выявиться как отдельный фактор или в наиболее неблагоприятных случаях изменить факторную структуру. Если одна или несколько переменных замеряются у различных групп индивидуумов, то такие группы нужно анализировать отдельно либо включать в факторный анализ в качестве отдельного признака.

II. *Вопросы, касающиеся технического осуществления факторного анализа.*

9. Используется ли обычная техника факторного анализа? (Техника R; исходные данные являются количественными величинами, причем объем выборки должен быть больше числа переменных не менее чем в три раза; оценка общностей с помощью квадрата коэффициента множественной корреляции; выделение факторов методом главных факторов; определение числа факторов (см. 3.3.6); процедура вращения (см. гл. 5.3), обычно варимакс-вращение.) Если используется другая техника, то нужно проявлять осторожность при интерпретации результатов.

10. Какова доля дисперсии выделенных факторов в полной дисперсии наблюдаемых переменных? Какова доля дисперсии каждого фактора по сравнению с другими? Как велика относительная суммарная общность? (см. гл. 3.3.1 и 3.3.6)

11. Удовлетворяют ли факторы принципу простой структуры? Какие факторы являются значимыми по критерию Баргмана? Ответы на эти вопросы не всегда могут быть однозначными, но все равно их надо ставить. Факторы, не удовлетворяющие принципу простой структуры, не должны интерпретироваться за исключением частных случаев (такой пример приведен в гл. 7.2.2).

12. Как точно можно оценить отдельные значения факторов? В качестве критерия точности оценок значений факторов используется коэффициент множественной детерминации (см. (6.25)). Если коэффициент множественной корреляции окажется меньше критического значения на выбранных уровнях значимости, то следует отказаться от его со-

держательной интерпретации. (В табл. Б приложения приведены критические значения этого коэффициента на уровне значимости 1 и 5%).

13. Как точно воспроизводит полученное факторное решение матрицу исходных данных? По формуле (8.19) или (8.20), а еще лучше непосредственно по значениям переменных вычислить коэффициент корреляции между действительными переменными и воспроизведенными через факторную модель. Плохое воспроизведение матрицы исходных данных свидетельствует о том, что выбранная модель неадекватно отражает действительные взаимосвязи между переменными.

14. Какое влияние на факторное решение оказывает исключение или добавление определенных переменных? В гл. 8.5 на примерах было показано, что добавление переменной может углубить наши знания о структуре данных. Такую процедуру можно моделировать на ЭВМ.

15. Как изменяются факторные нагрузки от добавления к матрице исходных данных матрицы, элементами которой являются случайные числа? Такое добавление иногда полезно рассматривать, так как можно проанализировать стабильность результатов и выявить границы применения метода. Но нужно учитывать, что эта процедура обладает ограниченными возможностями.

III. *Вопросы, касающиеся интерпретации факторов.*

16. Соответствует ли фактор связям между переменными, являющимися некоторыми комбинациями других переменных? Если, например, в анализ включены переменные, аддитивно составленные из других переменных, то можно получить фактор, отражающий эти связи. При интерпретации таких факторов нужно соответствующим образом учитывать эти связи переменных.

17. Выявляется ли фактор при повторных измерениях одной или нескольких переменных, включенных в анализ? На примере повторных измерений систолического и диастолического кровяного давления у группы студентов была продемонстрирована возможность выявления общих факторов (см. раздел 7.2.1).

18. Отражает ли фактор известную или тривиальную функциональную связь между переменными? Примером может служить выявление фактора, характеризующего вес и размер индивидуумов, если в анализ включены переменные, отражающие эти признаки. Такой фактор не представляет интереса для исследователя.

19. Не является ли фактор результатом неоднородности данных? При интерпретации должна учитываться возможность появления такого фактора. Неоднородность данных может привести не к появлению дополнительного фактора, а к искажению факторного отображения.

20. Идентифицируется ли фактор путем введения маркировочной переменной? В качестве маркировочной переменной выбирается такая переменная, которая в ранее выполненных аналогичных исследованиях высоко нагружала определенный фактор. Маркировочная переменная вводится для выявления фактора такого же типа в новых условиях эксперимента.

21. Выявлен ли важный фактор, отражающий сущность данного явления? Если исключается возможность такой интерпретации фактора, как указано в пунктах 16—19, и факторное отображение удовлетворяет критериям, приведенным в пунктах 10—15, то это означает, что выявлен важный фактор, отражающий сущность данного явления. Часто несколько предложений лучше описывают природу данного фактора, чем отдельный термин или название, которое обычно трудно подбирается. При подборе подходящего названия исследователь должен руководствоваться значениями факторных весов. Интерпретируя фактор, лучше всего пользоваться сослагательным наклонением, пока природа фактора не подтверждена последующими исследованиями.

IV. *Вопросы проверки факторного решения путем проведения дополнительных исследований.*

22. Воспроизводится ли фактор при повторной выборке из той же генеральной совокупности? Воспроизводимость является одним из условий интерпретации фактора. Проведение факторного анализа по результатам только одного исследования недостаточно для доказательства существования фактора. Правда, идентифицирование фактора путем проведения нескольких исследований тоже является недостаточным условием существования фактора. Для подтверждения объективного его существования полезно анализировать результаты экспериментов, выполненных в разных условиях, а именно: проводят два эксперимента с одними и теми же индивидуумами, но различными переменными либо с одними и теми же переменными, значения которых измеряются у различных индивидуумов. На практике обычно эксперименты бывают смешанного типа. Идентифицирование фактора на основе одинаковой или похожей интерпретации факторов не всегда правомерно. Необходима по крайней мере некоторая аналогия в нагрузках факторов, подлежащих идентифицированию (см. работы Амаваары [3], Барлоу и Барта [14], Каттелла [35; *15*], Каттелла и Баггалея [36; *2*] Харли и Каттелла [149], Фишера и Ропперта [94], Мозье [209; *2*] и Верделина [307].

23. Что известно об изменении фактора при различных условиях проведения эксперимента? Например, можно ожидать, что на биологические факторы оказывают влияние изменение в рационе питания, время года, время суток, возраст, пол. Колебание значений фактора в различных условиях эксперимента позволяет проверить гипотезу о наличии этого фактора в исследуемой области.

24. Можно ли воздействовать на изменение фактора в ходе эксперимента? Если условия эксперимента позволяют это осуществить, то исследователь еще больше приближается к окончательной интерпретации фактора. Однако с помощью только одного факторного анализа нельзя выявить причинную обусловленность фактора.

Будущее покажет, насколько приведенная система вопросов является всеобъемлющей. Основное затруднение при применении факторного анализа заключается в недостатке знаний о границах методов. Такие знания могут быть получены только путем накопления опыта. Особенно это необходимо при решении частных проблем факторного анализа.

Уровень знаний исследователя оказывает влияние на качество результатов факторного анализа. Как показывает опыт, факторный анализ часто проводится без глубокого усвоения теории и без достаточного проникновения в сущность изучаемого явления, чему способствует наличие готовых программ на ЭВМ. Пока это происходит на стадии обучения и знакомства с библиотекой программ по факторному анализу, еще можно удовлетвориться хаотически собранным исходным материалом. В руках специалиста, накопившего большой практический опыт применения методов и одновременно знающего данную область исследования, факторный анализ превращается в очень чувствительное и мощное средство познания действительности. Отсутствие глубоких знаний характерных свойств отдельных методов факторного анализа приводит к неправильному их использованию и в итоге — к ошибочным методам, что не раз являлось источником разногласий между представителями различных школ.

Статистикам, занимающимся исследованием закономерностей в медицине, биологии, психологии и в других отраслях знаний, факторный анализ открывает новые возможности в постановках и решении задач. Факторный анализ позволяет определить структуру данной области исследования и представить наблюдаемые переменные в виде линейной комбинации факторов. В ходе дальнейших экспериментов такие гипотезы должны быть подтверждены и модифицированы. Факторный анализ нельзя рассматривать изолированно. Он является одним из методов многомерного статистического анализа. Применение факторного анализа немыслимо в настоящее время без использования ЭВМ, что значительно расширило возможности статистической техники оценивания. Факторный анализ дает возможность совместно с другими методами многомерного статистического анализа создать комплексную модель исследуемого явления. Метод оказался особенно эффективным при большом наборе переменных.

● ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица A

Проверка существенности корреляционной связи[1]

ν \ 2α	0,1	0,05	0,01	0,001	ν \ 2α	0,1	0,05	0,01	0,001
					50	0,2306	0,2732	0,3541	0,4433
1	0,9877	0,9969	0,9999	1,0000	51	2284	2706	3509	4393
2	9000	9500	9900	0,9990	52	2262	2681	3477	4355
3	8054	8783	9587	9911	53	2241	2656	3445	4317
4	7293	8114	9172	9741	54	2221	2632	3415	4281
5	0,6694	0,7545	0,8745	0,9509	55	0,2201	0,2609	0,3385	0,4245
6	6215	7067	8343	9249	56	2181	2586	3357	4210
7	5822	6664	7977	8983	57	2162	2564	3329	4176
8	5494	6319	7646	8721	58	2144	2542	3301	4143
9	5214	6021	7348	8471	59	2126	2521	3274	4111
10	0,4973	0,5760	0,7079	0,8233	60	0,2108	0,2500	0,3248	0,4079
11	4762	5529	6835	8010	61	2091	2480	3223	4048
12	4575	5324	6614	7800	62	2075	2461	3198	4018
13	4409	5139	6411	7604	63	2058	2442	3174	3988
14	4259	4973	6226	7419	64	2042	2423	3150	3959
15	0,4124	0,4821	0,6055	0,7247	65	0,2027	0,2405	0,3127	0,3931
16	4000	4683	5897	7084	66	2012	2387	3104	3904
17	3887	4555	5751	6932	67	1997	2369	3081	3877
18	3783	4438	5614	6788	68	1982	2352	3060	3850
19	3687	4329	5487	6652	69	1968	2335	3038	3824
20	0,3598	0,4227	0,5368	0,6524	70	0,1954	0,2319	0,3017	0,3798
21	3515	4132	5256	6402	71	1940	2303	2997	3773
22	3438	4044	5151	6287	72	1927	2287	2977	3749
23	3365	3961	5052	6177	73	1914	2272	2957	3725
24	3297	3882	4958	6073	74	1901	2257	2938	3701
25	0,3233	0,3809	0,4869	0,5974	75	0,1889	0,2242	0,2919	0,3678
26	3172	3739	4785	5880	76	1876	2227	2900	3655
27	3115	3673	4705	5790	77	1864	2213	2882	3633
28	3061	3610	4629	5703	78	1852	2199	2864	3611
29	3009	3550	4556	5620	79	1841	2185	2847	3590
30	0,2960	0,3494	0,4487	0,5541	80	0,1829	0,2172	0,2830	0,3569
31	2913	3440	4421	5465	81	1818	2159	2813	3548
32	2869	3388	4357	5392	82	1807	2146	2796	3527
33	2826	3338	4297	5322	83	1796	2133	2780	3507
34	2785	3291	4238	5255	84	1786	2120	2764	3488
35	0,2746	0,3246	0,4182	0,5189	85	0,1775	0,2108	0,2748	0,3468
36	2709	3202	4128	5126	86	1765	2096	2733	3449
37	2673	3160	4076	5066	87	1755	2084	2717	3430
38	2638	3120	4026	5007	88	1745	2072	2702	3412
39	2605	3081	3978	4951	89	1735	2061	2688	3394
40	0,2573	0,3044	0,3932	0,4896	90	0,1726	0,2050	0,2673	0,3376
41	2542	3008	3887	4843	91	1716	2039	2659	3358
42	2512	2973	3843	4792	92	1707	2028	2645	3341
43	2483	2940	3802	4742	93	1698	2017	2631	3324
44	2455	2907	3761	4694	94	1689	2006	2617	3307
45	0,2428	0,2875	0,3721	0,4647	95	0,1680	0,1996	0,2604	0,3291
46	2403	2845	3683	4602	96	1671	1986	2591	3274
47	2377	2816	3646	4558	97	1663	1976	2578	3258
48	2353	2787	3610	4515	98	1654	1966	2565	3242
49	2329	2759	3575	4473	99	1646	1956	2552	3227
					100	0,1638	0,1946	0,2540	0,3211

Перепечатано с разрешения издательства из: Documenta Geigy, Wissenschaftliche Tabellen 6. Aufl. Basel, S. 61.

[1] Уровень значимости указан для двусторонней критической области. В первом столбце таблицы приведены числа степеней свободы $\nu=n-2$, где n — объем выборки. Таблица содержит критические значения коэффициента корреляции Пирсона в предположении отсутствия корреляционной связи в генеральной совокупности ($\rho=0$). Например, если $r=0{,}41$, то при $\nu=39$ он попадает в область между значениями 0,3978 и 0,4951, соответствующими уровням значимости 1 и 0,1%. Следовательно, на уровне значимости $\alpha\leqslant 0{,}01$ можем говорить о существенной значимости этой корреляционной связи. При $\nu=20$ $r=0{,}41$ не превосходит критического значения на уровне значимости 5%.

ν	2α 0,1	0,05	0,01	0,001
101	0,1630	0,1937	0,2528	0,3196
102	1622	1927	2515	3181
103	1614	1918	2504	3166
104	1606	1909	2492	3152
105	0,1599	0,1900	0,2480	0,3138
106	1591	1891	2469	3123
107	1584	1882	2458	3109
108	1577	1874	2447	3095
109	1569	1865	2436	3082
110	0,1562	0,1857	0,2425	0,3069
111	1555	1848	2414	3055
112	1548	1840	2404	3042
113	1542	1832	2393	3029
114	1535	1824	2383	3017
115	0,1528	0,1816	0,2373	0,3004
116	1522	1809	2363	2992
117	1515	1801	2353	2979
118	1509	1793	2343	2967
119	1502	1786	2334	2955
120	0,1496	0,1779	0,2324	0,2943
121	1490	1771	2315	2932
122	1484	1764	2305	2920
123	1478	1757	2296	2909
124	1472	1750	2287	2897
125	0,1466	0,1743	0,2278	0,2886
126	1460	1736	2269	2875
127	1455	1730	2261	2864
128	1449	1723	2252	2854
129	1443	1716	2243	2843
130	0,1438	0,1710	0,2235	0,2832
131	1432	1703	2226	2822
132	1427	1697	2218	2812
133	1422	1690	2210	2801
134	1416	1684	2202	2791
135	0,1411	0,1678	0,2194	0,2781
136	1406	1672	2186	2771
137	1401	1666	2178	2762
138	1396	1660	2170	2752
139	1391	1654	2163	2742
140	0,1386	0,1648	0,2155	0,2733
141	1381	1642	2148	2724
142	1376	1637	2140	2714
143	1371	1631	2133	2705
144	1367	1625	2126	2696
145	0,1362	0,1620	0,2118	0,2687
146	1357	1614	2111	2678
147	1353	1609	2104	2669
148	1348	1603	2097	2660
149	1344	1598	2090	2652
150	0,1339	0,1593	0,2083	0,2643
151	1335	1587	2077	2635
152	1330	1582	2070	2626
153	1326	1577	2063	2618
154	1322	1572	2057	2610
155	0,1318	0,1567	0,2050	0,2602
156	1313	1562	2044	2594
157	1309	1557	2037	2586
158	1305	1552	2031	2578
159	1301	1547	2025	2570
160	0,1297	0,1543	0,2019	0,2562
161	1293	1538	2012	2554
162	1289	1533	2006	2547
163	1285	1529	2000	2539
164	1281	1524	1994	2532
165	0,1277	0,1519	0,1988	0,2524
166	1273	1515	1982	2517
167	1270	1510	1977	2510
168	1266	1506	1971	2502
169	1262	1501	1965	2495
170	0,1258	0,1497	0,1959	0,2488
171	1255	1493	1954	2481
172	1251	1488	1948	2474
173	1248	1484	1943	2467
174	1244	1480	1937	2460
175	0,1240	0,1476	0,1932	0,2453
176	1237	1471	1926	2446
177	1233	1467	1921	2440
178	1230	1463	1915	2433
179	1227	1459	1910	2426
180	0,1223	0,1455	0,1905	0,2420
181	1220	1451	1900	2413
182	1216	1447	1895	2407
183	1213	1443	1890	2400
184	1210	1439	1885	2394
185	0,1207	0,1435	0,1880	0,2388
186	1203	1432	1874	2381
187	1200	1428	1870	2375
188	1197	1424	1865	2369
189	1194	1420	1860	2363
190	0,1191	0,1417	0,1855	0,2357
191	1188	1413	1850	2351
192	1184	1409	1845	2345
193	1181	1406	1841	2339
194	1178	1402	1836	2333
195	0,1175	0,1399	0,1831	0,2327
196	1172	1395	1827	2321
197	1169	1391	1822	2316
198	1166	1388	1818	2310
199	1164	1384	1813	2304
200	0,1161	0,1381	0,1809	0,2299

Критические значения коэффициента множественной корреляции, $\alpha \leqslant 0{,}01$ **Таблица Б.1**

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50
10	,708	,776	,814	,840	,859	,874	,886	,895	,904	,911	,916	,922	,926	,930	,934	,937	,940	,943	,945	,948	,952	,955	,958	,961	,963	,971	,977
11	,684	,753	,793	,821	,841	,857	,870	,880	,889	,897	,904	,910	,915	,919	,923	,927	,931	,934	,936	,939	,944	,947	,951	,954	,956	,966	,972
12	,661	,732	,773	,802	,824	,841	,855	,865	,876	,884	,891	,898	,903	,908	,913	,917	,921	,924	,927	,930	,935	,940	,944	,947	,950	,961	,968
13	,641	,712	,755	,785	,807	,825	,840	,852	,862	,871	,879	,886	,892	,898	,903	,907	,911	,915	,918	,922	,927	,932	,936	,940	,943	,956	,964
14	,623	,694	,737	,768	,791	,810	,826	,838	,849	,859	,867	,875	,881	,887	,893	,897	,902	,906	,910	,913	,919	,924	,929	,933	,937	,950	,959
15	,605	,677	,721	,752	,777	,796	,812	,825	,837	,847	,856	,864	,871	,877	,882	,888	,892	,897	,901	,904	,911	,917	,922	,926	,930	,945	,955
16	,590	,662	,706	,737	,762	,782	,799	,813	,825	,835	,845	,853	,860	,867	,873	,878	,883	,888	,892	,896	,903	,909	,915	,919	,924	,940	,950
17	,575	,647	,691	,724	,749	,769	,786	,800	,813	,824	,834	,842	,850	,857	,863	,869	,874	,879	,883	,888	,895	,902	,907	,913	,917	,934	,946
18	,562	,633	,677	,710	,736	,756	,774	,789	,802	,813	,823	,832	,840	,847	,854	,860	,865	,871	,875	,880	,887	,894	,901	,906	,911	,929	,941
19	,549	,620	,665	,697	,723	,745	,762	,777	,791	,802	,813	,822	,830	,838	,845	,851	,857	,862	,867	,871	,880	,887	,893	,899	,904	,924	,936
20	,537	,608	,652	,685	,711	,733	,751	,766	,780	,792	,803	,812	,821	,829	,836	,842	,848	,854	,859	,864	,873	,880	,887	,893	,898	,918	,932
21	,526	,596	,641	,674	,700	,722	,740	,756	,770	,782	,793	,803	,812	,820	,827	,834	,840	,846	,851	,856	,865	,873	,880	,886	,892	,913	,927
22	,515	,585	,630	,663	,690	,712	,730	,746	,760	,773	,784	,794	,803	,811	,819	,825	,832	,838	,843	,849	,858	,866	,873	,880	,886	,908	,923
23	,505	,574	,619	,652	,679	,701	,720	,737	,751	,763	,775	,785	,794	,802	,810	,817	,824	,830	,836	,841	,851	,859	,867	,873	,880	,903	,918
24	,496	,564	,609	,643	,670	,692	,711	,727	,742	,754	,766	,776	,786	,794	,802	,809	,816	,823	,828	,834	,844	,853	,860	,867	,874	,898	,914
25	,487	,555	,600	,633	,660	,682	,701	,718	,733	,746	,758	,768	,778	,786	,794	,802	,809	,815	,821	,827	,837	,846	,854	,861	,868	,893	,910
26	,478	,546	,591	,624	,651	,673	,692	,709	,724	,737	,749	,760	,769	,779	,787	,794	,801	,808	,814	,820	,830	,839	,848	,855	,862	,888	,905
27	,471	,538	,582	,615	,642	,665	,684	,701	,716	,729	,741	,752	,762	,771	,779	,787	,794	,801	,807	,813	,824	,833	,842	,849	,856	,883	,901
28	,463	,529	,573	,606	,633	,656	,676	,693	,708	,721	,733	,744	,754	,763	,772	,780	,787	,794	,801	,806	,817	,827	,836	,843	,850	,878	,897
29	,456	,522	,565	,598	,626	,648	,668	,685	,700	,713	,726	,737	,747	,756	,765	,773	,781	,787	,794	,800	,811	,821	,829	,838	,845	,873	,892
30	,449	,514	,558	,591	,618	,640	,660	,677	,692	,706	,718	,729	,740	,749	,758	,766	,774	,781	,787	,793	,805	,815	,824	,832	,840	,868	,889
32	,436	,500	,543	,576	,603	,626	,645	,663	,678	,691	,704	,716	,726	,736	,745	,753	,760	,768	,775	,781	,793	,803	,812	,821	,829	,859	,880
34	,424	,487	,530	,562	,589	,612	,631	,649	,664	,678	,691	,702	,713	,723	,732	,741	,749	,755	,763	,769	,781	,792	,802	,810	,818	,850	,872
36	,413	,475	,517	,549	,576	,599	,618	,636	,652	,665	,678	,690	,701	,710	,720	,728	,736	,744	,751	,758	,770	,781	,791	,800	,808	,841	,864
38	,403	,464	,505	,538	,564	,586	,606	,623	,639	,653	,666	,678	,689	,699	,708	,717	,725	,733	,740	,747	,759	,771	,781	,790	,799	,832	,856
40	,393	,454	,494	,526	,552	,575	,594	,612	,628	,642	,655	,666	,677	,687	,697	,706	,714	,722	,729	,736	,749	,761	,771	,781	,789	,824	,849
42	,384	,444	,484	,515	,542	,564	,584	,601	,616	,631	,644	,656	,667	,677	,687	,696	,704	,712	,719	,726	,739	,751	,762	,771	,780	,816	,841
44	,376	,435	,474	,506	,532	,554	,573	,591	,606	,620	,633	,646	,656	,667	,676	,686	,694	,702	,710	,716	,730	,742	,753	,762	,771	,807	,834
46	,368	,426	,465	,496	,522	,544	,564	,581	,596	,610	,624	,636	,646	,657	,666	,676	,684	,692	,700	,707	,721	,733	,744	,754	,763	,800	,827
48	,361	,418	,457	,487	,513	,535	,554	,571	,587	,601	,614	,626	,638	,648	,658	,667	,676	,683	,691	,698	,712	,724	,735	,745	,755	,792	,820
50	,354	,410	,449	,479	,504	,526	,545	,562	,578	,592	,605	,617	,628	,639	,649	,658	,666	,675	,682	,690	,703	,715	,727	,737	,747	,785	,813
55	,339	,393	,430	,459	,484	,506	,524	,541	,557	,571	,584	,596	,607	,617	,627	,636	,645	,654	,661	,669	,683	,696	,707	,717	,727	,767	,797
60	,325	,377	,414	,442	,467	,488	,506	,523	,538	,552	,565	,577	,588	,598	,608	,617	,626	,635	,642	,650	,664	,677	,689	,699	,710	,751	,781
70	,302	,351	,386	,413	,436	,456	,475	,491	,506	,520	,532	,544	,555	,565	,575	,584	,593	,601	,610	,617	,631	,644	,656	,668	,678	,721	,753
80	,283	,330	,363	,389	,411	,441	,448	,464	,479	,492	,504	,516	,526	,537	,546	,555	,564	,573	,580	,589	,602	,615	,628	,639	,649	,693	,727
90	,267	,312	,343	,369	,390	,409	,425	,441	,455	,468	,480	,492	,502	,513	,521	,531	,539	,547	,555	,563	,577	,590	,602	,614	,625	,669	,703
100	,254	,297	,327	,351	,372	,390	,406	,421	,435	,447	,459	,471	,481	,490	,500	,509	,517	,526	,533	,541	,555	,568	,579	,591	,602	,647	,681
125	,228	,267	,294	,316	,335	,352	,368	,381	,394	,406	,417	,428	,438	,447	,456	,465	,472	,480	,487	,495	,508	,521	,533	,544	,555	,600	,635
150	,208	,244	,270	,290	,308	,323	,338	,351	,363	,374	,385	,395	,404	,413	,421	,429	,438	,445	,452	,459	,473	,485	,496	,507	,518	,562	,597
200	,181	,212	,235	,253	,269	,282	,235	,307	,318	,328	,338	,346	,355	,363	,371	,378	,386	,392	,400	,406	,418	,430	,440	,451	,460	,503	,538
300	,148	,174	,193	,208	,221	,233	,223	,253	,263	,271	,279	,287	,294	,801	,308	,315	,321	,327	,333	,338	,349	,359	,369	,378	,387	,426	,458
500	,115	,135	,150	,162	,172	,182	,190	,198	,205	,212	,219	,225	,231	,237	,242	,248	,252	,257	,262	,267	,276	,284	,292	,300	,307	,340	,367
1000	,081	,096	,106	,115	,122	,129	,135	,111	,146	,151	,156	,169	,165	,169	,173	,177	,180	,184	,188	,191	,198	,204	,210	,216	,222	,246	,267

В этой таблице ν_1 — число независимых переменных, ν_2 — число степеней свободы ($\nu_2 = n - \gamma_1 - 1$, где n — объем выборки). Если вычисленный коэффициент множественной корреляции превосходит величину, указанную в таблице, то его истинное значение отлично от нуля.

Таблица составлялась с использованием формулы $\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{\nu_2}{\nu_1 \cdot F(\nu_1, \nu_2)}}}$

Таблица Б.2

Критические значения коэффициента множественной корреляции, $\alpha \leqslant 0{,}05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50
10	,576	,671	,726	,763	,790	,812	,829	,843	,855	,865	,874	,882	,889	,895	,900	,905	,909	,913	,917	,920	,926	,932	,936	,940	,943	,956	,964
11	,553	,648	,703	,742	,770	,792	,811	,826	,839	,849	,859	,868	,875	,882	,887	,893	,898	,902	,906	,910	,917	,922	,927	,932	,935	,950	,959
12	,533	,627	,683	,722	,751	,775	,793	,809	,823	,834	,845	,854	,862	,869	,875	,881	,886	,891	,896	,899	,907	,913	,918	,923	,928	,943	,953
13	,514	,608	,664	,703	,734	,758	,777	,794	,808	,820	,831	,840	,849	,856	,863	,869	,875	,880	,885	,889	,897	,904	,910	,915	,920	,937	,948
14	,497	,590	,646	,686	,717	,742	,761	,779	,794	,806	,818	,827	,837	,844	,851	,858	,864	,869	,875	,879	,888	,895	,901	,907	,912	,931	,943
15	,482	,574	,630	,670	,701	,726	,747	,765	,780	,793	,805	,815	,825	,833	,840	,847	,854	,859	,865	,870	,879	,886	,893	,899	,905	,924	,938
16	,468	,559	,615	,655	,686	,712	,733	,751	,767	,780	,793	,803	,813	,821	,829	,836	,843	,849	,855	,860	,869	,878	,885	,891	,897	,918	,932
17	,455	,545	,601	,641	,673	,699	,720	,739	,754	,768	,781	,792	,802	,811	,819	,826	,833	,840	,845	,851	,861	,869	,877	,884	,890	,912	,927
18	,444	,532	,587	,628	,659	,686	,708	,726	,743	,757	,769	,781	,791	,800	,809	,816	,823	,830	,836	,842	,852	,861	,869	,876	,882	,906	,922
19	,433	,520	,575	,616	,647	,674	,695	,715	,731	,746	,759	,770	,781	,790	,799	,807	,814	,821	,827	,833	,844	,853	,861	,868	,875	,900	,917
20	,423	,509	,563	,604	,636	,662	,684	,704	,720	,735	,748	,760	,771	,780	,789	,797	,805	,812	,819	,824	,835	,845	,854	,861	,868	,894	,912
21	,413	,498	,552	,592	,624	,651	,673	,693	,710	,724	,738	,750	,761	,771	,780	,789	,796	,803	,810	,816	,827	,837	,846	,854	,861	,888	,907
22	,404	,488	,542	,582	,614	,640	,663	,683	,699	,715	,728	,741	,752	,762	,771	,780	,787	,795	,801	,808	,820	,830	,839	,847	,854	,883	,902
23	,396	,479	,532	,572	,604	,631	,653	,672	,690	,705	,718	,731	,743	,753	,763	,771	,779	,786	,794	,800	,812	,822	,332	,840	,848	,877	,896
24	,388	,470	,523	,563	,594	,621	,643	,664	,681	,696	,709	,722	,733	,744	,754	,768	,771	,778	,786	,793	,804	,815	,825	,833	,841	,871	,892
25	,381	,462	,514	,553	,585	,612	,634	,654	,671	,687	,701	,713	,726	,736	,746	,755	,763	,771	,778	,785	,797	,808	,818	,827	,835	,866	,887
26	,374	,454	,506	,545	,577	,603	,626	,645	,663	,679	,693	,706	,717	,728	,738	,747	,755	,764	,771	,778	,791	,802	,812	,820	,829	,860	,882
27	,367	,446	,497	,537	,568	,595	,617	,637	,655	,670	,685	,697	,709	,720	,731	,740	,748	,756	,764	,770	,783	,795	,805	,814	,822	,855	,878
28	,361	,439	,490	,528	,560	,587	,609	,629	,647	,662	,677	,690	,702	,712	,723	,732	,741	,749	,756	,764	,776	,788	,799	,808	,817	,850	,873
29	,355	,432	,482	,521	,553	,578	,602	,621	,639	,655	,669	,682	,695	,705	,716	,725	,734	,742	,750	,756	,770	,782	,792	,802	,810	,845	,868
30	,349	,426	,475	,514	,545	,571	,593	,614	,631	,647	,662	,675	,687	,698	,708	,718	,727	,735	,743	,750	,764	,776	,786	,796	,805	,839	,864
32	,339	,413	,462	,500	,531	,557	,579	,599	,617	,633	,647	,661	,673	,684	,695	,704	,713	,722	,730	,738	,751	,763	,775	,785	,794	,830	,855
34	,329	,402	,450	,488	,518	,544	,566	,587	,604	,620	,634	,648	,660	,671	,682	,692	,701	,710	,718	,726	,739	,752	,763	,773	,783	,820	,846
36	,320	,392	,439	,476	,506	,531	,554	,574	,591	,608	,622	,635	,648	,660	,670	,680	,690	,698	,706	,714	,728	,740	,753	,763	,773	,811	,837
38	,312	,382	,429	,465	,495	,520	,542	,562	,680	,596	,610	,624	,636	,648	,659	,669	,678	,686	,695	,702	,717	,730	,742	,752	,763	,802	,830
40	,304	,373	,419	,455	,484	,510	,532	,551	,568	,585	,599	,612	,625	,637	,647	,657	,667	,676	,684	,692	,706	,720	,731	,743	,752	,793	,821
42	,297	,365	,410	,445	,474	,499	,521	,541	,558	,574	,589	,602	,614	,626	,637	,647	,656	,666	,674	,682	,697	,710	,722	,733	,743	,784	,814
44	,291	,357	,402	,436	,465	,489	,512	,531	,548	,564	,578	,592	,605	,616	,627	,637	,647	,655	,664	,672	,687	,701	,713	,724	,735	,776	,806
46	,284	,349	,394	,427	,456	,480	,503	,522	,539	,554	,569	,583	,595	,606	,617	,628	,637	,646	,655	,663	,678	,692	,704	,715	,726	,768	,799
48	,279	,343	,386	,420	,448	,472	,494	,513	,530	,545	,560	,573	,586	,597	,608	,619	,628	,637	,646	,654	,669	,683	,696	,707	,718	,760	,791
50	,273	,336	,379	,412	,440	,464	,485	,504	,521	,537	,552	,565	,577	,588	,599	,610	,619	,628	,637	,645	,661	,675	,687	,698	,710	,752	,784
60	,250	,308	,348	,380	,406	,429	,449	,468	,484	,499	,513	,527	,539	,550	,561	,572	,581	,590	,598	,607	,622	,636	,649	,661	,672	,717	,752
70	,232	,287	,324	,354	,379	,401	,420	,437	,454	,469	,482	,495	,507	,519	,529	,539	,548	,557	,566	,574	,590	,603	,616	,629	,640	,688	,723
80	,217	,269	,304	,333	,357	,377	,396	,413	,429	,443	,456	,469	,480	,491	,501	,511	,521	,529	,539	,556	,562	,575	,588	,602	,612	,660	,697
90	,205	,254	,288	,315	,338	,358	,375	,392	,407	,421	,434	,446	,457	,468	,478	,488	,497	,506	,514	,523	,537	,552	,565	,576	,589	,636	,673
100	,195	,241	,274	,299	,322	,341	,358	,374	,388	,402	,415	,426	,437	,448	,458	,468	,477	,485	,493	,501	,516	,530	,543	,555	,566	,615	,652
125	,174	,216	,246	,269	,290	,307	,323	,338	,352	,364	,376	,387	,397	,407	,417	,425	,433	,442	,450	,457	,472	,485	,497	,510	,521	,568	,606
150	,159	,198	,225	,247	,265	,282	,297	,310	,323	,335	,346	,357	,366	,376	,384	,393	,401	,409	,417	,424	,437	,450	,463	,474	,484	,532	,569
200	,138	,172	,196	,215	,231	,245	,259	,271	,283	,293	,303	,312	,321	,330	,338	,345	,353	,361	,367	,373	,387	,398	,410	,420	,431	,475	,511
300	,113	,141	,160	,176	,190	,202	,213	,223	,233	,242	,250	,258	,265	,273	,280	,287	,293	,299	,305	,311	,322	,332	,342	,351	,361	,400	,434
500	,088	,109	,124	,137	,148	,158	,166	,174	,182	,189	,196	,202	,208	,214	,220	,225	,230	,235	,240	,245	,253	,262	,271	,278	,286	,319	,348
1000	,062	,077	,088	,097	,105	,112	,118	,124	,129	,134	,139	,144	,148	,152	,157	,160	,164	,168	,172	,175	,182	,188	,194	,200	,206	,231	,252

В этой таблице ν_1 — число независимых переменных, ν_2 — число степеней свободы ($\nu_2 = n - \nu_1 - 1$, где n — объем выборки). Если вычисленный коэффициент множественной корреляции превосходит величину, указанную в таблице, то его истинное значение отлично от нуля при $\alpha \leqslant 0{,}05$.

Преобразование Фишера (z-преобразование коэффициента корреляции)[1]

r	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,000	0,00000	0,00100	0,00200	0,00300	0,00400	0,00500	0,00600	0,00700	0,00800	0,00900
010	01000	01100	01200	01300	01400	01500	01600	01700	01800	01900
020	02000	02100	02200	02300	02400	02501	02601	02701	02801	02901
030	03001	03101	03201	03301	03401	03501	03602	03702	03802	03902
040	04002	04102	04202	04303	04403	04503	04603	04703	04804	04904
0,050	0,05004	0,05104	0,05205	0,05305	0,05405	0,05506	0,05606	0,05706	0,05806	0,05907
060	06007	06108	06208	06308	06409	06509	06610	06710	06810	06911
070	07011	07112	07212	07313	07414	07514	07615	07715	07816	07916
080	08017	08118	08218	08319	08420	08521	08621	08722	08823	08924
090	09024	09125	09226	09327	09428	09529	09630	09731	09832	09933
0,100	0,10034	0,10135	0,10236	0,10337	0,10438	0,10539	0,10640	0,10741	0,10842	0,10943
110	11045	11146	11247	11348	11450	11551	11652	11754	11865	11957
120	12058	12160	12261	12363	12464	12566	12667	12769	12871	12972
130	13074	13176	13277	13379	13481	13583	13685	13787	13889	13991
140	14093	14195	14297	14399	14501	14603	14705	14807	14910	15012
0,150	0,15114	0,15216	0,15319	0,15421	0,15524	0,15626	0,15728	0,15831	0,15934	0,16036
160	16139	16241	16344	16447	16549	16652	16755	16858	16961	17064
170	17167	17270	17373	17476	17579	17682	17765	17888	17992	18095
180	18198	18302	18405	18509	18612	18716	18819	18923	19026	19130
190	19234	19338	19441	19545	19649	19753	19857	19961	20065	20169
0,200	0,20273	0,20377	0,20482	0,20586	0,20690	0,20795	0,20899	0,21004	0,21108	0,21213
210	21317	21422	21526	21631	21736	21841	21946	22051	22156	22261
220	22366	22471	22576	22681	22786	22892	22997	23102	23208	23313
230	23419	23525	23630	23736	23842	23948	24053	24159	24265	24371
240	24477	24584	24690	24796	24902	25009	25115	25222	25328	25435
0,250	0,25541	0,25648	0,25755	0,25862	0,25968	0,26075	0,26182	0,26289	0,26396	0,26504
260	26611	26718	26825	26933	27040	27148	27255	27363	27471	27579
270	27686	27794	27902	28010	28118	28226	28335	28443	28551	28660
280	28768	28877	28985	29094	29203	29312	29420	29529	29638	29747
290	29857	29966	30075	30184	30294	30403	30513	30623	30732	30842
0,300	0,30952	0,31062	0,31172	0,31282	0,31392	0,31502	0,31613	0,31723	0,31833	0,31944
310	32055	32165	32276	32387	32498	32609	32720	32831	32942	33053
320	33165	33276	33388	33499	33611	33723	33835	33947	34059	34171
330	34283	34395	34507	34620	34732	34845	34958	35070	35183	35296
340	35409	35522	35636	35749	35862	35976	36089	36203	36317	36430
0,350	0,36544	0,36658	0,35772	0,36887	0,37001	0,37115	0,37230	0,37344	0,37459	0,37574
360	37689	37804	37919	38034	38149	38264	38380	38495	38611	38726
370	38842	38958	39074	39190	39307	39423	39539	39656	39772	39889
380	40006	40123	40240	40357	40474	40592	40709	40827	40944	41062
390	41180	41298	41416	41634	41653	41771	41890	42008	42127	42246
0,400	0,42365	0,42484	0,42603	0,42723	0,42842	0,42962	0,43081	0,43201	0,43321	0,43441
410	43561	43681	43802	43922	44043	44164	44284	44405	44527	44648
420	44769	44891	45012	45134	45256	45378	45500	45622	45745	45867
430	45990	46112	46235	46358	46481	46605	46728	46852	46975	47099
440	47223	47347	47471	47596	47720	47845	47970	48094	48220	48345
0,450	0,48470	0,48595	0,48721	0,48847	0,48973	0,49099	0,49225	0,49351	0,49478	0,49604
460	49731	49858	49985	50112	50240	50367	50495	50623	50751	50879
470	51007	51135	51264	51393	51522	51651	51780	51909	52039	52169
480	52298	52428	52559	52689	52819	52950	53081	53212	53343	53475
490	53606	53738	63870	54002	54134	54266	54399	54531	54664	54797

Перепечатано с разрешения издательства из: Documenta Geigy, Wissenschaftliche Tabellen 6. Aufl. Basel, S. 62.

[1] Таблица содержит значения z, полученные путем преобразования коэффициента корреляции по формуле $z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$ (см. гл. 1.3). В первом столбце и в первой строке таблицы указаны значения r.

r	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,500	0,54931	0,55064	0,55198	0,55331	0,55465	0,55600	0,55734	0,55868	0,56003	0,56138
510	56273	56408	56544	56679	56615	56951	57087	57224	57360	57497
520	57634	57771	57908	58046	58184	58322	66460	58598	58737	58876
530	59015	59154	59293	59433	59572	59712	59853	59993	60134	60274
540	60416	60557	60698	60840	60982	61124	61266	61409	61552	61695
0,550	0,61838	0,61982	0,62125	0,62269	0,62413	0,62558	0,62702	0,62847	0,62992	0,63138
560	63283	63429	63575	63721	63868	64015	64162	64309	64457	64604
570	64752	64901	65049	65198	65347	65496	65646	65795	65945	66096
580	66246	66397	66548	66700	66851	67003	67155	67308	67460	67613
590	67767	67920	68074	68228	68382	68537	68692	68847	69003	69159
0,600	0,69315	0,69471	0,69628	0,69785	0,69942	0,70100	0,70258	0,70416	0,70574	0,70733
610	70892	71062	71211	71371	71532	71692	71853	72015	72176	72338
620	72500	72663	72826	72989	73163	73317	73481	73646	73811	73976
630	74142	74308	74474	74641	74808	74975	75143	75311	75479	75648
640	75817	75987	76157	76327	76498	76669	76840	77012	77184	77357
0,650	0,77530	0,77703	0,77877	0,78051	0,78226	0,78401	0,78576	0,78752	0,78928	0,79104
660	79281	79459	79637	79815	79993	80172	80352	80532	80712	80893
670	81074	81256	81438	81621	81804	81987	82171	82355	82540	82726
680	82911	83098	83284	83472	83659	83847	84036	84225	84415	84605
690	84796	84987	85178	85370	65563	85756	85950	86144	86339	86534
0,700	0,86730	0,86926	0,87123	0,87321	0,87519	0,87717	0,87916	0,88116	0,88316	0,88517
710	88718	88920	89123	89326	89530	89734	89939	90144	90350	90557
720	90765	90972	91181	91390	91600	91811	92022	92233	92446	92659
730	92873	93087	93302	93518	93735	93952	94169	94388	94607	94827
740	95048	95269	95491	95714	95938	96162	96387	96613	96840	97067
0,750	0,97296	0,97524	0,97754	0,97985	0,98216	0,98448	0,98681	0,98915	0,99150	0,99385
760	99622	99859	1,00097	1,00336	1,00575	1,00816	1,01058	1,01300	1,01543	1,01788
770	1,02033	1,02279	02526	02774	03023	03273	03524	03775	04028	04282
780	04537	04793	05050	05308	05567	05827	06088	06350	06613	06878
790	07143	07410	07677	07946	08216	08488	08760	09033	09308	09584
0,800	1,09861	1,10140	1,10419	1,10700	1,10982	1,11266	1,11551	1,11837	1,12124	1,12413
810	12703	12994	13287	13581	13877	14174	14473	14773	15074	15377
820	15682	15988	16295	16604	16915	17227	17541	17857	18174	18493
830	18814	19136	19460	19786	20113	20443	20774	21107	21442	21779
840	22117	22458	22801	23145	23492	23840	24191	24544	24899	25266
0,850	1,25615	1,25977	1,26340	1,26706	1,27075	1,27445	1,27818	1,28194	1,28571	1,28952
860	29334	29720	30108	30498	30891	31287	31686	32087	32491	32898
870	33308	33721	34137	34555	34977	36403	35831	36262	36697	37135
880	37577	38022	38470	38922	39378	39838	40301	40768	41239	41714
890	42193	42676	43163	43654	44150	44651	45156	45665	46179	46698
0,900	1,47222	1,47751	1,48285	1,48824	1,49368	1,49918	1,50473	1,51034	1,51601	1,52174
910	52752	53337	53928	54526	55130	55741	56359	56984	57616	58256
920	58903	59558	60221	60892	61571	62260	62957	63663	64379	65104
930	65839	66584	67340	68107	68885	69674	70475	71288	72114	72953
940	73805	74671	75552	76447	77358	78284	79227	80188	81166	82162
0,950	1,83178	1,84214	1,85270	1,86349	1,87450	1,88574	1,89723	1,90898	1,92100	1,93331
960	94591	95882	97207	98566	99961	2,01395	2,02870	2,04388	2,06952	2,07565
970	2,09230	2,10950	2,12730	2,14574	2,16486	18472	20539	22692	24940	27291
980	29756	32346	35075	37958	41014	44266	47741	51472	55499	59875
990	64665	69958	75873	82574	90307	99448	3,10630	3,25039	3,45338	3,80020

Пояснение к табл. Г1, Г2, Г3

(таблицы заимствованы в несколько измененном виде
из работы Баргмана [12,*2*]
с разрешения автора и издательства)

В таблицах при определенном числе исходных переменных и числе выделенных факторов указываются критические значения числа переменных, удовлетворяющих условию $\left|\frac{a}{h}\right| \leqslant 0{,}10$. Эти критические значения могут быть случайно достигнуты в 1% всех случаев. Если число переменных с $\left|\frac{a}{h}\right| \leqslant 0{,}10$, определяющих один фактор, превысит значение, указанное в таблице, то этот фактор можно содержательно интерпретировать. Числа, напечатанные жирным шрифтом, соответствуют точным критическим значениям. Числа, напечатанные курсивом, свидетельствуют о том, что критические значения еще не достигнуты.

Таблица Г.1

Критерий Баргмана для $\alpha \leqslant 0{,}01$

Число переменных	Число факторов										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	3										
6	4	5									
7	4	5									
8	4	6									
9	4	6									
10	5	6	7	8							
11	5	6	7	8							
12	5	6	8	9	10						
13	5	7	8	9	10						
14	5	7	8	9	10						
15	5	7	8	9	11	12	13	13			
16	5	7	9	10	11	12	13	14			
17	6	7	9	10	11	12	13	14			
18	6	7	9	10	11	13	13	14	15	16	
19	6	8	9	11	12	13	14	15	16	16	
20	6	8	10	11	12	13	14	15	16	17	17
21	6	8	10	11	12	14	14	15	16	17	18
22	6	8	10	11	13	14	15	16	17	18	18
23	6	8	10	12	13	14	15	16	17	18	19
24	6	9	10	12	13	14	15	16	17	18	19
25	7	9	11	12	13	15	16	17	18	19	19
26	7	9	11	12	14	15	16	17	18	19	20
27	7	9	11	13	14	15	16	17	18	19	20
28	7	9	11	13	14	15	17	18	19	20	21
29	7	9	11	13	14	16	17	18	19	20	21
30	7	10	12	13	15	16	17	18	19	20	21
31		10	12	13	15	16	18	19	20	21	22
32		10	12	14	15	17	18	19	20	21	22
33		10	12	14	15	17	18	19	20	21	22
34			13	14	16	17	19	20	21	22	23
35			13	14	16	17	19	20	21	22	23
36			13	15	16	18	19	20	21	23	24
37			13	15	16	18	19	21	22	23	24
38			13	15	17	18	20	21	22	23	24
39			13	15	17	18	20	21	22	24	25
40			14	15	17	19	20	21	23	24	25
41			14	16	17	19	21	22	23	24	25
42			14	16	18	19	21	22	23	25	26
43			14	16	18	20	21	22	24	25	26
44			14	16	18	20	21	23	24	25	26
45			15	17	18	20	22	23	24	26	27
46				17	19	20	22	23	25	26	27
47				17	19	21	22	24	25	26	27
48				17	19	21	22	24	25	27	28
49				17	19	21	23	24	26	27	28
50				18	20	21	23	24	26	27	28
51				18	20	22	23	25	26	28	29
52				18	20	22	24	25	27	28	29
53				18	20	22	24	25	27	28	29
54				18	20	22	24	26	27	29	30
55				19	21	23	24	26	27	29	30
56					21	23	25	26	28	29	30
57					21	23	25	27	28	30	31
58					21	23	25	27	28	30	31
59					22	24	25	27	29	30	31
60					22	24	26	27	29	30	32
61						24	26	28	29	31	32
62						24	26	28	30	31	32
63						25	27	28	30	31	33
64						25	27	29	30	32	33
65						25	27	29	30	32	33
66									31	32	34
67									31	33	34
68									31	33	34
69									32	33	35
70									32	33	35

Таблица Г.2

Критерий Баргмана для $\alpha \leqslant 0{,}05$

Число переменных	Число факторов										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	3										
6	3	4									
7	3	5									
8	4	5									
9	4	5									
10	4	5	6	7							
11	4	5	7	8							
12	4	6	7	8	9						
13	4	6	7	8	9						
14	4	6	7	8	9						
15	4	6	7	9	10	11	12	12			
16	5	6	8	9	10	11	12	13			
17	5	6	8	9	10	11	12	13			
18	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
19	5	7	8	10	11	12	13	14	15	15	
20	5	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17
21	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	17
22	5	7	9	10	11	13	14	15	16	16	17
23	5	7	9	10	12	13	14	15	16	17	18
24	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	18
25	6	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18
26	6	8	10	11	12	14	15	16	17	18	19
27	6	8	10	11	13	14	15	16	17	18	19
28	6	8	10	11	13	14	15	16	17	18	19
29	6	8	10	12	13	14	16	17	18	19	20
30	6	8	10	12	13	15	16	17	18	19	20
31		9	11	12	14	15	16	17	18	19	20
32		9	11	12	14	15	16	17	19	20	21
33		9	11	12	14	15	17	18	19	20	21
34			11	13	14	16	17	18	19	20	21
35			11	13	14	16	17	18	20	21	22
36			11	13	15	16	17	19	20	21	22
37			11	13	15	16	18	19	20	21	22
38			12	13	15	17	18	19	20	22	23
39			12	14	15	17	18	20	21	22	23
40			12	14	16	17	19	20	21	22	23
41			12	14	16	17	19	20	21	23	24
42			12	14	16	18	19	20	22	23	24
43			12	14	16	18	19	21	22	23	24
44			13	15	16	18	20	21	22	23	25
45			13	15	17	18	20	21	23	24	25
46				15	17	19	20	21	23	24	25
47				15	17	19	20	22	23	24	26
48				15	17	19	21	22	23	25	26
49				16	18	19	21	22	24	25	26
50				16	18	20	21	23	24	25	26
51				16	18	20	21	23	24	26	27
52				16	18	20	22	23	25	26	27
53				16	18	20	22	23	25	26	27
54				17	19	20	22	24	25	26	28
55				17	19	21	22	24	25	27	28
56					19	21	23	24	26	27	28
57					19	21	23	24	26	27	29
58					19	21	23	25	26	28	29
59					20	22	23	25	26	28	29
60					20	22	24	25	27	28	30
61						22	24	25	27	29	30
62						22	24	26	27	29	30
63						23	24	26	28	29	30
64						23	25	26	28	29	31
65						23	25	27	28	30	31
66									28	30	31
67									29	30	32
68									29	31	32
69									29	31	32
70									29	31	33

Таблица Г8

Критерий Баргмана для $\alpha \leqslant 0,25$

Число переменных	Число факторов 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	2										
6	2	4									
7	3	4									
8	3	4									
9	3	4									
10	3	4	5	6							
11	3	4	5	7							
12	3	4	6	7	8						
13	3	5	6	7	8						
14	3	5	6	7	8						
15	3	5	6	7	8	9	10	11			
16	3	5	6	7	8	9	10	11			
17	3	5	6	8	9	10	11	12			
18	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	
19	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	
20	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
21	4	5	7	8	10	11	12	13	14	15	15
22	4	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16
23	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16
24	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16
25	4	6	8	9	10	11	13	14	15	16	17
26	4	6	8	9	11	12	13	14	15	16	17
27	4	6	8	9	11	12	13	14	15	16	17
28	4	6	8	9	11	12	13	14	16	16	17
29	4	6	8	10	11	12	14	15	16	17	18
30	4	7	8	10	11	13	14	15	16	17	18
31		7	8	10	11	13	14	15	16	17	18
32		7	9	10	12	13	14	15	17	18	19
33		7	9	10	12	13	14	16	17	18	19
34			9	11	12	13	15	16	17	18	19
35			9	11	12	14	15	16	17	18	19
36			9	11	12	14	15	16	18	19	20
37			9	11	12	14	15	17	18	19	20
38			9	11	13	14	16	17	18	19	20
39			10	11	13	14	16	17	18	19	21
40			10	12	13	15	16	17	19	20	21
41			10	12	13	15	16	18	19	20	21
42			10	12	14	15	17	18	19	20	21
43			10	12	14	15	17	18	19	21	22
44			10	12	14	15	17	18	20	21	22
45			10	12	14	16	17	19	20	21	22
46				12	14	16	17	19	20	21	23
47				13	14	16	18	19	20	22	23
48				13	15	16	18	19	21	22	23
49				13	15	17	18	20	21	22	23
50				13	15	17	18	20	21	22	24
51				13	15	17	19	20	21	23	24
52				13	15	17	19	20	22	23	24
53				14	16	17	19	20	22	23	25
54				14	16	18	19	21	22	23	25
55				14	16	18	19	21	22	24	25
56					16	18	20	21	23	24	25
57					16	18	20	21	23	24	26
58					16	18	20	22	23	25	26
59					17	19	20	22	23	25	26
60					17	19	21	22	24	25	26
61						19	21	22	24	25	27
62						19	21	23	24	26	27
63						19	21	23	24	26	27
64						20	21	23	25	26	28
65						20	22	23	25	26	28
66									25	27	28
67									25	27	28
68									26	27	29
69									26	27	29
70									26	28	29

● БИБЛИОГРАФИЯ

1. A d a m A., F. F e r s c h l, A. K l a m e c k e r, A. K l i n g s t et. al. Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme. 2. Aufl. Würzburg, 1963.
2. A d c o c k C. J. [1] Higher-order factors. Brit. J. statist. Psychol. 17, 153—160 (1964); — [2] A comparison of the concepts of Cattell and Eysenck. Brit. J. educ. Psychol. 35, 90—97 (1965).
3. A h m a v a a r a Y. The mathematical theory of factorial invariance under selection. Psychometrika 19, 27—38 (1954).
4. A l b e r t A. A. [1] The matrices of factor analysis. Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.) 30, 90—95 (1944); — [2] The minimum rank of a correlation matrix. Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.) 30, 144—146 (1944).
5. A n d e r s o n T. W. [1] The asymptotic distributions of the roots of certain determinantal equations. J. roy. statist. Soc. B 10, 132—139 (1948); — [2] Classification by multivariate analysis. Psychometrika 16, 31—50 (1951); — [3] On estimation of parameters in latent structure analysis. Psychometrika 19, 1—10 (1954); — [4] An introduction to multivariate statistical analysis. N. Y., 1958. Русский перевод: А н д е р с о н Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963;— [5] The use of factor analysis in the statistical analysis of multiple time series. Psychometrika 28, 1—25 (1963).
6. A n d e r s o n T. W. and T. A. B a n c r o f t. Statistical theory in research. N. Y., 1955.
7. A n d e r s o n T. W. and H. R u b i n. Statistical inference in factor analysis. Proc. 3rd Berkeley Symp. on math. Statistics and Probability, Ed. J. Neyman, vol. 5, p. 111—150. Berkeley, 1956.
8. B a e h r M. E. A comparison of graphic and analytic solutions for both oblique and orthogonal simple structures for factors of employee morale. Psychometrika 28, 199—209 (1963).
9. B a g g a l e y A. R. Intermediate correlational methods. N. Y., 1964.
10. B a g g a l e y A. R. and R. B. C a t t e l l. A comparison of exact and approximate linear function estimates of oblique factor scores. Brit. J. statist. Psychol. 9, 83—86 (1956).
11. B a n k s C. The factorial analysis of crop productivity. J. roy. statist. Soc. B 16, 100—111 (1954).
12. B a r g m a n n R. [1] The statistical significance of simple structure in factor analysis. 13 p. Frankfurt/M. Hochschule f. internat. pädag. Forschung, 1954; — [2] Signifikanzuntersuchungen der einfachen Struktur in der Faktoren-Analyse. Mitt. math. Statist. 7, 1—24 (1955).
13. B a r k e r D. G. The factor structure of major league baseball records. Res. Quart. Amer. Ass. Hlth phys. Educ. 35, 75—79 (1964).
14. Barlow J. A. and C. Burt. The identification of factors from different experiments. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 7, 52—53, (1954).
15. B a r t l e t t M. S. [1] Multivariate analysis. J. roy. statist. Soc. B 9, 176—190 (1947); — [2] Internal and external factor analysis. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 1, 73—81 (1948); — [3] Tests for significance in factor analysis. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 3, 77—85 (1950); —[4] A further note on tests of significance in factor analysis. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 4, 1—2 (1951); — [5] Factor analysis in psychology as a statistician sees it. Uppsala Symposium on psychological factor analysis. Nord. psychol. Monogr. 3, 23—34

(1953); — [6] A note on the multiplying factor for various χ^2 approximations. J. Roy. stat. Soc. B 16, 296—298 (1954).
16. Beers R. J., Fisher S., Megraw S. and Lockhard W. R. A comparison of methodes for computer taxonomy. J. gen. Microbiol. 28, 641—652 (1962).
17. Beers R. J. and Lockhart W. R. Experimental methods in computer taxonomy. J. gen. Microbiol. 28, 633—640 (1962).
18. Bennett C. A. and Franklin N. L. Statistical analysis in chemistry and the chemical industry. N. Y., 1954.
19. Bochnik H. J. Multifaktorielle statistische Analysen, Verbundforschung und Klinikorganisation. Nervenarzt 34, 430—437 (1963).
20. Bochnik H. J., Aksoy F., Barrios P., Behnisch G., Broczio E. et al. Ein Analysemodell für klinische Verbundforschung. Multifaktorielle Untersuchung der Pyrithioxinwirkung nach Schlafentzug bei gesunden Studenten. Forschr. Neurol. Psychiat. 32, 400—425 (1964).
21. Bochnik H. J. und Legewie H. Multifaktorielle klinische Forschung Statistische Methoden mit einer Faktorenanalyse bei progressiver Paralyse. Stuttgart, 1964.
22. Bochnik H. J., Legewie H., Otto P. und Wüster G. Tat—Täter—Zurechnungsfähigkeit. Stuttgart, 1965.
23. Bojalil L. F., Cerbon J. and Trujillo A. Adansonian classification of mycobacteria. J. gen. Microbiol. 28, 333—346 (1962).
24. Borgatta E. F. Difficulty factors and the use of r_φ. J. gen. Psychol. 73, 321—337 (1965).
25. Borko H. (Ed.). [1] Computer applications in the behavioral sciences. Englewood Cliffs. N. J., 1962;— [2] A factor analytically derived classification system for psychological reports. Percept. and mot. Skills 20, 393—406 (1965).
26. Brownlee K. A. Statistical theory and methodology in science and engineering. N. Y., 1961. Русский перевод: Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. М., Наука, 1977.
27. Burt C. [1] The factors of the mind. An introduction to factor analysis in psychology. N.Y., 1941;—[2] A comparison of factor analysis and analysis of variance. Brit. J. Psychol Statist. Sect. 1, 3—26 (1948);—[3] Factor analysis and canonical correlations. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 1, 95—106 (1948);—[4] The two-factor theory. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 1, 151—179 (1948);—[5] Alternative methods of factor analysis and their relations to Pearson's method of «principal axes». Brit.J. Psychol., Statist. Sect. 2, 98—121 (1949);—[6] The factorial analysis of qualitative data. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 3, 166—185 (1950); — [7] Tests of significance in factor analysis. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 5, 109—133 (1952);— [8] Test reliability estimated by analysis of variance. Brit. J. statist. Psychol. 8, 103—118 (1955); — [9] The stability of factors. Brit. J. statist. Psychol. 17, 177—180 (1964);—[10] The early history of multivariate techniques in psychological research. Multivar. behav. Res. 1, 24—42 (1966).
28. Burt C. and Banks Ch. A factor analysis of body measurements for British adult males. Ann. Eugen. 13, 238—256 (1947).
29. Burt C. and Stephenson W. Alternative views on correlations between persons. Psychometrika 4, 269—281 (1939).
30. Butler J. M. Simplest data factors and simple structure in factor analysis. Educ. psychol. Meas. 24, 755—763 (1964).
31. Cady L. D., Woodbury M. A. and Gertler M. M. The dimensions of coronary heart disease. Proc. 2nd IBM Medical Symposium, Endicott, N. Y., Sept. 28—30, 1960; 379—384. White Plains, N. Y., 1961.
32. Carroll J. B. An analytical solution for approximating simple structure in factor analysis. Psychometrika 18, 23—37 (1953).
33. Cartwright D. S. [1] A misapplication of factor analysis. Amer. sociol. Rev. 30, 249—251 (1965);— [2] A note on some modifications of latent roots and vectors. Psychometrika 30, 319—322 (1965).
34. Cartwright D. S. and Kirtner W. L. Method factors in changes associated with psyhotherapy. J. abnorm. soc. Psychol. 66, 164—175 (1963).

35. Cattell R. B. [1] «Parallel proportional profiles» and other principles for determining the choice of factors by rotation. Psychometrika 9, 267—283 (1944); — [2] A note on factor invariance and the indentification of factors. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 2, 134—139 (1949); — [3] P-technique, a new method for analyzing the structure of personal motivation. Trans. N. Y. Acad. Sci., Sect. Psychol., ser. 2, 14, 29—34 (1951); — [4] Factor analysis. N. Y., 1952; — [5] P-technique factorization. Progr. clin. Psychol. 8, 536—544 (1953); —[6] A quantitave analysis of the changes in the culture pattern of Great Britain 1837—1937 by P-technique. Acta psychol. (Amst.) 9, 99—121 (1953); — [7] The chief invariant psychological and psychophysiological functional unities found by P-technique. J. clin. Psychol. 21, 319—343 (1955); —[8] Personality and motivations, structure and measuremlnt. N. Y., 1957; — [9] Formulae and tables for obtaining validities and reliabilities of extended factor scales. Educ. psychol. Meas. 17, 491—498 (1957); — [10] Extracting the correct number of factors in factor analysis. Educ. psychol. Meas. 17, 791—838 (1958); — [11] The dynamic calculus: concepts and crucial experiments. Nebraska Symp. on Motivation,, 1959. Ed. M. R. Jones, p. 84—134, Lincoln. Neb., 1959; —[12] Evaluating interaction and non-linear relations by factor analysis. Psychol. Rep. 7, 69—70 (1960); — [13] Theory of situational, instrument, second order, and refraction factors in personality structure research. Psychol. Bull. 58, 160—174 (1961); — [14] Group theory, personality and role: a model for experimental researches. In: Geldard F. A. (Ed.): Defence Psychology, Oxford, 1961, p. 209—259; — [15] The basis of recognition and interpretation of factors. Educ. psychol. Meas. 22, 667—697 (1962); — [16] Psychological measurement of anxiety and depression: a quantitative approach. Canad. psychiat. Ass. J. 7, Spec. Suppl. 11—23 (1962); — [17] The structuring of change by P-technique and incremental R-technique. In: Harris C. W. (Ed.): Problems in measuring change, p. 167—198. Madison, Wis, 1963; — [18] The theoretical distinction of motivation components and dynamic structure. Wich a note on ipsatizing and total interest. Laboratory of Personality Assessment and Group Behaviour. 907 S. Sixth Street, Champaing Ill., 1963 (Stencilmade); — [19] Factor analysis: an introduction to essentials. Biometrics 21, 190—215, 405—435 (1965); — [20] The scree test the number of factors. Multivar. behav. Res. 1, 245—276 (1966); — (Ed.) [21] Handbook of multivariate experimental psychology. Chicago, 1966; — [22] Evaluating therapy as total personality change: theory and available instruments. Am. J. Psychother. 20, 69—88 (1966).

36. Cattell R. B. and Baggaley A. R. [1] The objective measurement of attitude motivation I: Development and evaluation of principles and devices. J. Personality 24, 401—423 (1956); — [2] The salient variable similarity index for factor matching. Brit. J. statist. Psychol. 13, 33—46 (1960).

37. Cattell R. B. and Cattell A. K. S. Factor rotation for proportional profiles: analytical solution and an example. Brit. J. statlst. Psychol. 8, 83—92 (1955).

38. Cattell R. B. and Coulter M. A. Principles of behavioral taxonomy and the mathematical basis of the taxonome computer program. Brit. J. math. statist. Psychol. 19, 237—269 (1966).

39. Cattell R. B. and Dickman K. A dynamic model of physical influences demonstrating the necessity of oblique simple structure. Psychol. Bull. 59, 389—400 (1962).

40. Cattell R. B. and Eber H. W. The sixteen personality factor questionnaire test. Rev. ed. Institute for Personality and Ability Testing, Champaign, Ill., 1966.

41. Cattell R. B. and Foster M. J. The Rotoplot program for multiple single-plane, visually guided rotation. Behav. Sci. 8, 156—165 (1963).

42. Cattell R. B. and Gorsuch R. L. The uniqueness and significance of simple structure demonstrated by contrasting organic «natural structure» and «random structure» data. Psychometrika 28, 55—67 (1963).

43. Cattell R. B. and Horn I. An integrating study of the factor structure of adult attitude-interests. Genet. Psychol. Monogr. 67, 89—149 (1963).

44. C a t t e l l R. B. and J a s p e r s J. A general plasmode (№ 30—10—5—2) for factor analytic exercises and research. Multiv. behav. Res. Mon. 3 (1967).
45. C a t t e l l R. B. M a x w e l l E. F., L i g h t B. H. and U n g e r M. P. The objective measurements of attitudes. Brit. J. Psychol. 40, 81—90 (1949).
46. C a t t e l l R. B. and M u e r l e J. L. The «Maxplane» program for factor rotation to oblique simple structure. Educ. psychol. Meas. 20, 569—590 (1960).
47. C a t t e l l R. B. and R a d c l i f f e J. A. Reliabilities and validities of simple and extended weighted and buffered unifactor scales. Brit. J. statist. Psychol. 15, 113—128 (1962).
48. C a t t e l l R. B. und S a u n d e r s D. R. Beiträge zur Faktorenanalyse der Persönlichkeit. Z. exp. angew. Psychol. 2, 325—357 (1954).
49. C a t t e l l R. B. and S c h e i e r I. H. The meaning and measurement of neuroticism and anxiety. N. Y, 1961.
50. C a t t e l l R. B. and S u l l i v a n W. The scientific natire of factors: a demonstration by cups of coffee. Behav. Sci. 7, 184—193 (1962).
51. C a t t e l l R. B. and T s u j i o k a B. The importance of factor-trueness and validity, versus homogeneity and orthogonality, in test scales. Educ. psychol. Meas. 24, 3—30 (1964).
52. C a t t e l l R. B. and W i l l i a m s H. *P*-technique: a new statistical device for analysing functional unities in the intact organism. Brit. J. prev. soc. Med. 7, 141—153 (1953).
53. C h r i s t e n s o n P. R. and G u i l f o r d J. P. An experimental study of verbal fluency factors. Brit. J. statist. Psychol. 16, 1—26 (1963).
54. C h r i s t i a n P. Risikofaktoren und Risikopersönlichkeit beim Herzinfarkt. Institut für allgemeine klinische Medizin der Universität Heidelberg. Vortrag in Bad Nauheim, 1965.
55. C h r i s t i a n P., K r o p f R. und K u r t h H. Eine Faktorenanalyse der subjektiven Sumptomatik vegetativer Herz-und Kreislaufstörungen. Arch. Kreisl.-Forsch. 45, 171—194 (1965).
56. C l i f f N. [1] Analytic rotation to a functional relationship. Psychometrika 27, 283—296 (1962);— [2] Orthogonal rotation to congruence. Psychometrika 31, 33—42 (1966).
57. C o a n R. W. Facts, factors and artifacts: The quest for psychological meaning. Psychol. Rev. 71, 123—140 (1964).
58. C o c h r a n W. and H o p k i n s C. E. Some classification problems with multivariate qualitative data. Biometrics 17, 10—32 (1961).
59. C o l w e l l R. R. and L i s t o n J. Taxonomic analysis with the electronic computer of some xanthomonas and pseudomonas species. J. Bacteriol. 82, 913—919 (1961).
60. C o m r e y A. L. The minimum residual method of factor analysis. Psychol. Rep. 11, 15—18 (1962).
61. C o m r e y A. L. and A h u m a d a A. An improved procedure and program for minimum residual factor analysis. Psychol. Rep. 15, 91—96 (1964).
62. C o o l e y W. W. and L o h n e s P. R. Multivariate procedures for the behavioral sciences. N. Y., 1965.
63. C o o m b s C. H. A criterion for significant common factor variance. Psychometrika 6, 267—272 (1941).
64. C o o m b s C. H. and K a o R. C. On a connection between factor analysis and multidimensional unfolding. Psychometrika 25, 219—231 (1960).
65. C o x G. M. The multiple factor theory in terms of common elements. Psychometrika 4, 59—68 (1939).
66. C r a e g e r J. A. General resolution of correlation matrices into components and its utilisation in multiple and partial regression. Psychometrika 23, 1—8 (1958).
67. C r a m é r H. Mathematical methods of statictics. Princeton, N. Y., 1961. Русский перевод: К р а м е р Г. Математические методы статистики. М., Мир, 1975.
68. C r e a s y M. A. Analysis of variance as an alternative to factor analysis. J. roy. statist. Soc. B 19, 318—325 (1957).

69. Cronbach L. J., Rajaratnam N. and Gleser G. C. Theory of generalizability: a liberalization of reliability theory. Brit. J. statist. Psychol. 16, 137—163 (1963).
70. Cureton T. K. [1] Physical fitness appraisal and guidance. St. Louis; 1951; — [2] Comparison of various factor analyses of cardiovascular-respiratory test variables. Paper presented to Research Section, American Association for Health, Physical Education and Recreation annual meeting, Minneapolis, Minn., May 1963 (Mimeorg.).
71. Cureton T. K. and Sterling L. F. Factor analyses of cardiovascular test variables. J. Sports Med. phys. fitness (Torino) 4, 1—24 (1964).
72. Darroch J. N. A set of inequalities in factor analysis. Psychometrika 30, 449—453 (1965).
73. Das R. S. An application of factor and canonical analysis to multivariate data. Brit. J. math. statist. Psychol. 18, 57—67 (1965).
74. Digman J. M. The procrustes class of factor-analytic transformations. Multivar. behav. Res. 2, 89—94 (1967).
75. Dingman H. F., Miller C. R. and Eyman R. K. A comparison between two analytic rotational solutions where the number of factors is indeterminate. Behav. Sci. 9, 76—80 (1964).
76. Dixon W. I. and Massey F. I. Introduction to statistical analysis. N. Y., 1957.
77. Dodd S. C. The theory of factors I and II. Psychol. Rev. 35, 211—234, 261—279 (1928).
78. Driver H. E. and Schuessler F. K. Factor analysis of ethnographic data. Amer. Anthropol. 59, 655—663 (1957).
79. Dwyer P. S. [1] The determination of the factor loadings of given test from the known factor loadings of other tests. Psychometrika 2, 173—178 (1937); — [2] The contribution of an orthogonal multiple factor solution to multiple correlation. Psychometrika 4, 163—171 (1939); —[3] The evaluation of miltiple and partial correlation coefficients from the factorial matrix. Psychometrika 5, 211—232 (1940); — [4] A matrix presentation of least squares and correlation theory with matrix justofication of improved methods of solution. Ann. math. Statist. 15, 82—89 (1944).
80. Dwyer P. S. and Macphail M. S. Symbolic matrix derivatives. Ann. math. Statist. 19, 528—534 (1948).
81. Eber H. W. [1] Toward oblique simple structure: maxplane. Multivar. behav. Res. 1, 112—125 (1966); — [2] Multivariate analysis of a vocational rehabilitation system. Multivar. behav. Res. Monogr. 1, 1—52 (1966).
82. Eckart C. and Young G. The approximation of one matrix by another of lower rank. Psychometrika 1, 211—218 (1936).
83. Eisler H. Measurement of perceived acoustic quality of sound-reproducing systems by means of factor analysis. J. acoust. Soc. Amer. 39, 484—492 (1966).
84. Emmet W. G. Factor analysis by Lawley's method of maximum likelihood. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 2, 90—97 (1949).
85. Eyferth K. und Sixtl F. Bemerkungen zu einem Verfahren zur maximalen Annäherung zweier Faktorenstrukturen aneinander. Arch. ges. Psychol. 117, 131—138 (1965).
86. Eysenck H. J. [1] Types of personality: a factorial study of seven hundred neurotics. J. ment. Sci. 90, 851—861 (1944); — [2] Criterion analysis — an application of the hypothetico-deductive method to factor analysis. Psychol. Rev. 57, 38—53 (1950); — [3] The structure of human personality. L., 1953; — [4] Uses and abuses of factor analysis. Appl. Statist. 1,45—49 (1952); — [5] The logical basis of factor analysis. Amer. Psychol. 8, 105—113 (1953); — [6] The questionnaire measurement of neuroticism and extraversion. Riv. Psicol. 50, 113—140 (1956).
87. Faber E. Automatische Klassifikation von Stichproben mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. Vortr. 15. Biom. Koll. Hannover, 1968.
88. Fahrenberg J. Ein itemanalysierter Fragebogen funktionell-körperlicher Beschwerden (VELA). Diagnostica 11, 141—153 (1965).

89. Fahrenberg J. und Delius L. Eine Faktorenanalyse psychischer und vegetativer Regulationsdaten. Nervenarzt 34, 437—443 (1963).
90. Falk S. Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation. Z. angew. Math. Mech. 31, 152—153 (1951).
91. Falls H. B., Ismail A. H. and McLeod O. F. Development of physical fitness test batteries by factor analysis technique. J. Sports Med. phys. fitness (Torino) 5, 185—197 (1965).
92. Ferguson G. A. The concept of parsimony in factor analysis. Psychometrika 19, 281—289 (1954).
93. Fischer G. H. [1] Zum Problem der Interpretation faktorenanalytischer Ergebnisse. Psychol. Beitr. 10, 122—135 (1967); — [2] Zu Tucher's Methode der Faktorenanalyse von Lerndaten. Psychol. Beitr. 10, 136—146 (1967).
94. Fischer G. und Roppert J. Bemerkungen zu einem Verfahren der Transformationsanalyse. Arch. ges. Psychol. 116, 98—100 (1964).
95. Ficher R. A. [1] The use of multiple measurements in taxonomic problems. Ann. Eugen. (L.) 7, 179—188 (1936);— [2] Statistical methods for research workers. 13 th ed. Edinburgh, 1958. Русский перевод: Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М., Госстатиздат, 1958.
96. Fleishman E. A. Factor analysis of physical fitness tests. Educ. psychol. Meas. 13, 647—661 (1963).
97. Floodgate G. D. and Hayes P. R. The Adansonian taxonomy of some yellow pigmented marine bacteria. J. gen. Microbiol. 30, 237—244 (1963).
98. Flowers N. C., Horan L. G. and Brody D. A. Evaluation of multipolar effects in the high-fidelity standard electrocardiogram by means of factors analysis, Circulation 32, 273—280 (1965).
99. Flugel J. C. A hundred years of psychology. 2nd ed. L., 1951.
100. Foa U. G. New developments in facet design and analysis. Psychol. Rev. 72, 262—274 (1965).
101. Fruchter B. Introduction to factor analysis. Princeton, N. J., 1954.
102. Fuller L. E. Basic matrix theory. Englewood Cliffs, N. J., 1962.
103. Gebhardt F. On the similarity of factor matrices. European Meeting of Statisticians, L., Sept. 5—10, 1966 (Mimeogr.).
104. Gebhardt F. und Schnell P. Einige Bemerkungen zur Faktorenanalyse. Tagung der experimentell arbeitenden Psychologen, 5.4. 1966, München, 2 S. (Masch.-Schr. vervielf.).
105. Gibson W. A. [1] Three multivariate models: factor analysis, latent structure analysis and latent profile analysis. Psychometrika 24, 229—252 (1959);— — [2] Nonlinear factor analysis in two dimensions. Psychometrika 25, 381—392 (1960); — [3] Extending latent class solutions to other variables. Psychometrika 27, 73—81 (1962); — [4] Latent structure and positive manifold. Brit. J. statist. Psychol. 15, 149—159 (1962); — [5] On the least-squares orthogonalization of an oblique transformation. Psychometrika 27, 193—195 (1962);— [6] Factoring the circumplex. Psychometrika 28, 87—92 (1963);— [7] On the symmetric treatment of an asymmetric approach to factor analyses. Psychometrika 28, 423—426 (1963).
106. Gleser G. C., Cronbach L. J. and Rajaratnam N. Generalizability of scores influences by multiple sources of variance, Psychometrika 30, 395—418 (1965).
107. Green B. [1] A general solution for the latent class model of latent structure analysis. Psychometrika 16, 151—166 (1951); — [2] Latent structure analysis and its relation to factor analysis. J. Amer. statist. Ass. 47, 71—76 (1952).
108. Guilford J. P. [1] When not to factor analyse. Psychol. Bull. 49, 26—37 (1952); — [2] Psychometric methods. N. Y., 1954; — [3] Preparation of item scores for the correlations between persons in a Q factor analysis. Educ. psychol. Meas. 23, 13—22 (1963).
109. Guilford J. P. and Zimmermann W. S. Some variable-sampling problems in the rotation of axes in factor analysis. Psychol. Bull. 60, 289—301 (1963).
110. Gulliksen H. Theory of mental tests. N. Y., 1950.

111. G u m i n H. Struktur und Programmierung in der Datenverarbeitung. Vortrag auf der Fachtagung Elektronik. Hannover, 1967.
112. G u t t m a n L. [1] Multiple rectilinear prediction and the resolution into components I. Psychometrika 5, 75—99 (1940); — [2] General theory and methods for matrix factoring. Psychometrika 9, 1—16 (1944); — [3] Multiple group methods for common-factor analysis: their basis, computation and interpretation. Psychometrika 17, 209—223 (1952);— [4] Image theory for the structure of quantitative variates. Psychometrika 18, 277—296 (1953); — [5] A new approach to factor analysis: the radex. In: L a z a r s f e l d P. F. (Ed.). Mathematical thinking in the Social Sciences, p. 258—348. N. Y., 1953;— [6] Some necessary conditions for common-factor analysis. Psychometrika 19, 149—161 (1954);—[7] The determinancy of factor score matrices with implication for five other basic problems of common-factor theory. Brit. J. statist. Psychol. 8, 65—81 (1955);—[8] A generalized simlex for factor analysis. Psychometrika 20, 173—191 (1955); — [9] A necessary and sufficient formula for matrix factoring. Psychometrika 22, 79—81 (1957);— [10] Simple proofs of relations between the communality problem and multiple correlation. Psychometrika 22, 147—157 (1957); — [11] What lies ahead for factor analysis? Educ. psychol. Meas. 18, 497—515 (1958); — [12] Successive approximation for communalities. Res. Rep. 12, Univ. Calif., Berkeley, 1957; — [13] «Best possible» systematic estimates of communalities. Psychometrika 21, 273—285 (1956); — [14] To what extent can communalities reduce rank? Psychometrika 23, 297—308 (1958).
113. G u t t m a n L. and C o h e n J. Multiple rectilinear prediction and the resolution into components II. Psychometrika 8, 169—183 (1943).
114. H a b e c k D. Zusammenhänge, Abhängigkeiten und Beziehungen verschiedener Liquoreiweissbefunde. Habilitationsschrift Med. Fakultät Univ. Münster i. W., 1967.
115. H a e r t z e n C. A. Method for direct determination of inverted factor loadings. Psychol. Rep. 12, 399—402 (1963).
116. H a m i l t o n M. An experimental approach to the identification of factors. Brit. J. statist. Psychol. 11, 161—169 (1958).
117. H a r m a n H. H. Modern factor analysis. Chicago, 1960. Русский перевод: Х а р м а н Г. Современный факторный анализ. М., Статистика, 1972.
118. H a r p e r R. Factor analysis as a technique for examining complex data on foodstuffs. Appl. Statist. 4, 32—48 (1956).
119. H a r p e r R., K e n t A. J. and S c o t t Bl a i r G. W. The application of multiple factor analysis to industrial test data. Brit. J. appl. Phys. 1, 23—28 (1950).
120. H a r r i s C. W. [1] Separation of data as a principle in factor analysis. Psychometrika 20, 23—28 (1955); — [2] Relationships between two systems of factor analysis. Psychometrika 21, 185—190 (1956); — [3] Some Rao-Guttman relationships. Psychometrika 27, 247—263 (1962); — (Ed.) [4] Problems in measuring change. Madison, Wis., 1962;— [5] Some recent developements in factor analysis. Ed. psychol. Meas. 2, 193—206 (1964).
121. H a r r i s C. W. and K a i s e r H. F. Oblique factor analysis solutions by orthogonal transformations. Psychometrika 29, 347—362 (1964).
122. H a r t l e y R. E. Two kinds of factor analysis. Psychometrika 19, 195—203 (1954).
123. H e a t h H. A., O k e n D., S h i p m a n W. S. and G o l d s t e i n I. B. Three factor analyses of electromyographic data under varying conditions. Multivar. behav. Res. 2, 263—280 (1967).
124. H e e r m a n n E. F. [1] Univocal or orthogonal estimators of orthogonal factors. Psychometrika 28, 161—172 (1963);— [2] The geometry of factorial indeterminancy. Psychometrika 29, 371—381 (1964).
125. H e m m e r l e W. J. Obtaining maximum-likelihood estimates of factor loadings and communalities using and easily implemented iterative computer procedure. Psychometrika 30, 291—302 (1965).
126. H e n d r i c k s o n A. E. and W h i t e P. D. Promax: a quick method for rotation to oblique simple structure. Brit. J. statist. Psychol. 17, 65—70 (1964).

127. Henryssön S. [1] The significance of factor loadings. Brit. J. statist. Psychol. 3, 159—165 (1950);— [2] Applicability of factor analysis in the behavioral sciences. Stockholm, 1960; — [3] The relation between factor loadings and biserial correlations in item analysis. Psychometrika 27, 419—424 (1962).
128. Hill L. R. The Adansonian classification of the staphylococci. J. gen. Microbiol. 20, 277—283 (1959).
129. Hill L., Silvestri L. G., Ihm P., Farchi G., Lanciani P. and Cattell R. B. Automatic classification of staphylococci by principal-component analysis and a gradient method. J. Bact. 89, 1393—1401 (1965).
130. Hoel P. G. [1] A significance test for minimum rank in factor analysis. Psychometrika 4, 245—252 (1939); — [2] Introduction to mathematical statistics. N. Y., 1947.
131. Hofstätter P. R. [1] Über Faktorenanalyse. Arch. ges. Psych. 100, 223—279 (1938); — [2] Über Typenanalyse. Arch. Psychol. 105 305—403 (1940);—[3] Faktorenanalyse. In: Handbuch der empirischen Sozialforschung. Hrsg. R. König. 2. Aufl., Band 1, 385—414, Stuttgart, 1967.
132. Hofstätter P. R. und Wendt D. Quantitative Methoden der Psychologie. München, 1966.
133. Holley J. W. and Fällström K. Note on the construction of test of *Q* factor isolates in the prediction of clinical classes. Scand. J. Psychol. 6, 237—240 (1965).
134. Holley J. W. and Guilford J. P. A note on the *G* index of agreement. Educ. psychol. Meas. 24. 749—753 (1964).
135. Holm E. [1] Eine Faktorenanalyse von evoked-potential-Schwellen nach der Hauptachsenmethode. Vortr. 32. Tag. Dtsch. Physiol. Ges. Berlin, Okt. 1966. Ref. Pflügers Arch. ges. Physiol. 291, R 28 (1966); — [2] Schafmittelwirkungen auf subkortikale Hirngebiete. In; Jovanović U. J. (Ed.). Neurophysiologische Aspekte des Schlafes. München, im Druck.
136. Holtzmann W. H. Methodological issues in *P*-technique. Psychol. Bull. 59, 248—256 (1962).
137. Holtzmann W. H. and Biltermann M. E. A factorial study of adjustment to stress. J. abnorm. soc. Psychol. 52, 179—185 (1956).
138. Holzinger K. J. [1] Factor analysis. Chicago, 1941; — [2] A simple method of factor analysis. Psychometrika 9, 257—262 (1944); — [3] Interpretation of second-order factors. Psychometrika 10, 21—25 (1945).
139. Horan L. G., Flowers N. L. and Brody D. A. Principal factor wave forms of the thoracic QRS complex. Circulation Res. 15, 131—145 (1964).
140. Horn. J. L. [1] Significance test for use with related profile statistics. Educ. psychol. Meas. 21, 363—370 (1961);— [2] A rationale and test for the number of factors in factor analysis. Psychometrika 30, 179—185 (1965);—[3] An empirical comparison of methods for estimating factor scores. Educ. psychol. Meas. 25, 313—322 (1965); — [4] A note on the estimation of factor scores. Educ. psychol. Meas. 24, 525—527 (1964)
141. Horn J. L. and Little K. B. Isolating change and invariance in patterns of behaviour. Multivar. behav. Res, 1, 219—228 (1966).
142. Horst P. A method of factor analysis by means of which all coordinates of the factor matrix are given simultaneously. Psychometrika 2, 225—236 (1937); — [2] A nongraphical method for transforming an arbitrary factor matrix into a simple structure factor matrix. Psychometrika 6, 79—99 (1941);—[3] Factor analysis of data matrices. N. Y., 1965:— [4] Measurement of personality dimensions. I. Psychological measurement. University of Washington, Seattle, Wash., 1966.
143. Horst P., Dvorak A. and Wright C. Computer application to psychological problems. Educ. psychol. Meas. 21, 699—719 (1961).
144. Hotelling H. [1] Analysis of a complex of statistical variables into principal components. J. educ. Psychol. 24, 417—441., 498—520 (1933); — [2] The selection of variates for use in prediction with some comments on the general problem of nuisance parameters. Ann. math. Statist.

11, 271—283 (1940); — [3] The relations of the newer multivariate statistical methods to factor analysis. Brit. J. statist. Psychol. 10, 69—79 (1957).

145. Howard K. J. and Cartwright D. S. An empirical note on the communality problem in factor analysis. Psychol. Rep. 10, 797—798 (1962).
146. Howard K. J., Gordon R. A. Empirical note on the «number of factors» problem in factor analysis. Psychol. Rep. 12, 247—250 (1963).
147. Hsü E. H. [1] A factorial study of olfaction. Psychometrika 11, 31—42 (1946); — [2] Comparative study of factor patterns, physiologically and psychologically determined. J. gen. Psychol. 47, 105—128 (1952).
148. Humphreys L. G. Number of cases and number of factors: An example where *N* is very large. Educ, psychol. Meas. 24, 457—466 (1964).
149. Hurley J. R. and Cattell R. B. The Procrustes program: producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. Behav. Sci. 7, 258—262 (1962).
150. Husek T. R. Correlated or uncorrelated measures of related or unrelated constructs. Psychol. Rep. 14, 463—466 (1964).
151. Hymes D. (Ed.). The use of computers in anthropology. L., 1965.
152. Jhm P. [1] Methoden der Taxometrie Vortrag. IBM-Seminar «Dokumentation». Blaricum/Holland, 20.—22.11.1962; — [2] Automatic classification in anthropology. In: Hymes D. (Ed.) The use of computers in anthropology. 357—376. L., 1965.
153. Ihm P., Liebau A. Homogenitätsprüfung vieldimensionaler medizinischer Daten mittels Hauptachsentransformation. Meth. Inform. Med. 4, 107—111 (1965).
154. Ismail A. H., Falls H. B. and MacLeod D. F. Development of a criterion for physical fitness tests from factor analysis results. J. appl. Physiol. 20, 991—999 (1965).
155. Jahn T. L. The use of computers in systematics. J. Parasit. 48, 656—663 (1962).
156. James A. T. The distribution of the latent roots of the covariance matrix. Ann. math. Statist. 31, 151—158 (1960).
157. Jarrett R. F. A note on rotation and psychological space. Brit. J. statist. Psychol. 14, 109—115 (1961).
158. Jenkins T. N. Limitations of iterative procedures for estimating communalities. J. psychol. Stud. 13, 69—73 (1962).
159. Jennings E. Matrix formulas for part and partial correlation. Psychometrika 30, 353—356 (1965).
160. Jones F. N. A factor analysis of visibility data. Amer. J. Psychol. 61, 361—369 (1948).
161. Jones F. N. and Jones M. H. A second factor analysis of visibility data. Amer. J. Psychol. 63, 206—213 (1950).
162. Jöreskog K. G. [1] On the statistical treatment of residuals in factor analysis. Psychometrika 27, 335—354 (1962); — [2] Statistical estimation in factor analysis. Uppsala, 1963; — [3] Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. Psychometrika 31, 165—178 (1966).
163. Johnson R. M. On a theorem stated by Eckart and Young. Psychometrika 28. 259—263 (1963).
164. Kaiser H. F. [1] The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. Psychometrika, 23, 187—200 (1958); — [2] Computer program for varimax rotation in factor analysis. Educ. psychol. Meas. 19, 413—420 (1959); — [3] A note on the Tryon-Kaiser solution for the communalities. Psychometrika 24, 269—271 (1959); — [4] The application for electronic computers to factor analysis. Educ. psychol. Meas. 20, 141—151 (1960); — [5] A note on Guttman's lower bound for the number of common factors. Brit. J. statist. Psychol. 14, 1 — 2 (1961); — [6] Formulas for component scores. Psychometrika 27, 83—87 (1962); — [7] Scaling a simplex. Psychometrika 27, 155—161 (1962); — [8] Image analysis. In: Harris C. W. (Ed.). Problems in measuring change. Madison, Wisc., 1963, p. 156—166; — [9] Psychometric approaches to factor analysis. Proceedings of the 1964 Invitational Conference on testing problems, 37—45 (1965).

165. K a i s e r H. F. and C a f f r e y J. Alpha factor analysis. Psychometrika 30. 1—14 (1965).
166. K a i s e r H. F. and D i c k m a n K. [1] Analytic determination of common factors. Amer. Psychol. 14, 425 (1959); — [2] Sample and population score matrices and sample correlation matrices from an arbitrary population correlation matrix. Psychometrika 27, 179—181 (1962).
167. K a l l i n a H. [1] Validitätsuntersuchung und Faktorenanalyse verkehrspsychologischer diagnostischer Methoden. Z. exp. angew. Psychol. 11, 56—70 (1964);— [2] Das Unbehagen in der Faktorenanalyse. Psychol. Beitr. 10, 81—87 (1967).
168. K a l v e r a m K. T. Die Veränderung von Faktorenstrukturen durch «simultane Überlagerung». Arch. ges. Psychol. 117, 296—305 (1965).
169. K a r v o n e n M. J. and K u n n a s M. Factor analysis of haematological changes in heavy manual work. Acta physiol. scand. 28, 220—231 (1953).
170. K a s h i w a g i. S. [1] A new objective procedure for the orthogonal rotation in factor analysis. Jap. psychol. Res. 5, 86—90 (1963);— [2] A new oblique transformation method in multiple factor analysis. Jap. psychol. Res. 6, 125—128 (1964);— [3] A new proposition on the number of factors and communalities in multiple factor analysis. Jap. psychol. Res. 6, 173—175 (1964); — [4] Geometric vector orthogonal rotation method in multiple-factor analysis. Psychometrika 30, 515—530 (1965).
171. K e l l e y T. L. Comment on Wilson and Worcester's «Note on factor analysis». Psychometrika 5, 117—120 (1940).
172. K e n d a l l M. G. [1] A course in multivariate analysis. L., 1957;—[2] A course in the geometry of *n* dimensions. L., 1961;— [3] Factor analysis. Part I. Factor analysis as a statistical technique. J. roy. statist. Soc. 12, 60—73 (1950).
173. K e n d a l l M. G. and S t u a r t A. The advanced theory of statistics. Vol. I—III. L., 1958—1966. Русский перевод: К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А. Т. I — Теория распределений. М., Наука, 1966; т. II — Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973; т. III — Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., Наука, 1976.
174. K i n g J. F., B o w m a n B. H. and M o r e l a n d H. H. Some intellectual correlates of biochemical variability. Behav. Sci. 6, 297—302 (1961).
175. K n u s s m a n n R. [1] Moderne statistische Verfahren in der Rassenkunde. In: I. S c h w i d e t z k y (Hrsg.). Die neue Rassenkunde. Stuttgart, 1962;—[2] Körperbautypologie als biometrische Aufgabe. Vortrag. 13. Biometrisches Kolloquium 31.3.—2.4. 1966 in Mainz;— [3] Interkorrelationen im Hautleistensystem des Menschen und ihre faktorenanalytische Auswertung. Humangenetik 4, 221—243 (1967).
176. K o l l e r S. [1] Statistische Auswertung der Versuchsergebnisse. In: Hoppe-Seyler/Thierfelder. Handbuch der physiologischen und pathologischen chemischen Analyse. Band II, 2. Teil, 931—1036. Berlin, 1955;—[2] Typisierung korrelativer Zusammenhänge. Metrika 6, 65—75 (1963); — [3] Statistische Auswertungsmethoden. In: Rauen H. M. (Hrsg). Biochemisches Taschenbuch. 2. Teil, 2. Aufl., S. 959—1046. Berlin, 1964: — [4] Systematik der statistischen Schlußfehler. Meth. Inform. Med. 3, 113—117 (1964);—[5] Mathematish-statistische Grundlagen der Diagnostik. Klin. Wschr. 21, 1065—1072 (1967).
177. K o l l e r S., Ü b e r l a K. Die Verwendung elektronischer Rechenanlagen in der Medizin I und II. Fortschr. Med. 84, 209—210, 279—282 (1966).
178. K o s s a c k C. F. Statistical classification techniques. IBM Syst. J. 2, 136—151 (1963).
179. K r i s t o f W. [1] Die Beziehungen zwischen mehrdimensionalem Skalieren und Faktorenanalyse. Psychol. Beitr 7, 387—396 (1963);—[2] Die faktorielle Struktur einiger geometrisch-optischer Täuschungen. Z. exp. angew.Psychol. 11, 71—80 (1964).
180. L a n d a h l H. D. Time scores and factor analysis. Psychometrika 5, 67—74 (1940).
181. L a n g e H.-J. Statistische Methoden zur Erforschung der Syntropie von Krankheiten. Habilitationsschrift, Medizin Fakultät d. Univ. Mainz, 1966.

182. L a w l e y D. N. [1] The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. Proc. roy. Soc. Edinb. A 60, 64—82 (1940); — [2] A modified method of estimation in factor analysis and some large sample results. Uppsala Symp. Psychol. Factor Analysis. Nord. psychol. Monogr. 3, 35—42 (1953); — [3] Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. Biometrika 43, 128—136 (1956); — [4] Estimation in factor analysis under various initial assumptions. Brit. J. statist. Psychol. 11, 1—12 (1958).
183. L a w l e y D. N. and M a x w e l l A. E. [1] Factor analysis as a statistical method. L., 1963;— [2] Factor transformation methods. Brit. J. statist. Psychol. 17, 97—103 (1964). Русский перевод: Л о у л и Д., М а к с в е л л А. Факторный анализ как статистический метод. М., Мир, 1967.
184. L a w l e y D. N. and S w a n s o n Z. Tests of significance in a factor analysis of artificial data. Brit. J. statist, Psychol. 7, 75—79 (1954).
185. L a z a r s f e l d P. F. [1] The logical and mathematical foundation of latent structure analysis. In: S t o u f f e r S. A. et al. (Ed.). The American soldier. Vol. IV, Measurement and prediction., p. 362—412. Princeton, 1950. Русский перевод: Л а з а р с ф е л ь д П. Логические и математические основания латентно-структурного анализа.— В кн.: Математические методы в современной буржуазной социологии. М., Прогресс, 1966;— [2] A conceptual introduction to latent structure analysis. In: L a z a r s f e l d P. F. (Ed.). Mathematical thinking in the social sciences, 349—387. Glencoe, Ill., 1954; — [3] Recent development in latent structure analysis. Sociometry 18, 647—659 (1955).
186. L e d e r m a n n W. On a shortened method of estimation of mental factors by regression. Psychometrika 4, 109—116 (1939).
187. L e v i n H. Three-mode factor analysis. Psychol. Bull. 64, 442—452 (1965).
188. L i e b a u A. Die automatische Klassifizierung. Diss. Med. Fakultät Univ. Kiel, 1964.
189. L i e n e r t G. A. [1] Prinzip und Methode der multiplen Faktorenanalyse demonstriert an einem Beispiel. Biometr. Z. 1, 88—141 (1959);— [2] Testaufbau und Testanalyse. Weinheim, 1961.
190. L i n d e r A. [1] Planen und Auswerten von Versuchen. Eine Einführung für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Basel/Stuttgart, 1953;— [2] Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. 3. Aufl. Basel, 1960.
191. L o h n e s P. R. Test space and discriminant space. Classification models and related significance tests. Educ. psychol. Meas. 21, 559—574 (1961).
192. L y s e n k o O. and S n e a t h P. H. A. The use of models in bacterial classification. J. gen. Microbiol. 20, 284—290 (1959).
193. M a g a n d r e w C. and F o r g y E. A note on the effects of score transformations in *Q* and *R* factor analysis techniques. Psychol. Rev. 70, 116—118 (1963).
194. M c C l o y C. H. A study of cardiovascular variables by the method of factor analysis. Proc. Soc. Res. in Child Devel. 107—111. Washington, 1936.
195. M c D o n a l d R. P. [1] A general approach to nonlinear factor analysis. Psychometrika 27, 397—415 (1962);— [2] Difficulty factors and non-linear factor analysis. Brit. J. math. statist. Psychol. 18, 11—23 (1965); — [3] Factor analytic vs. classical methods of fitting individual curves. Percept. mot. Skills 20, 270 (1965).
196. M c N e m a r Q. [1] On the sampling error of factor loadings. Psychometrika 6, 141—152 (1941);— [2] On the number of factors. Psychometrika 7, 9—18 (1942); — [3] The factors in factoring behavior. Psychometrika 16, 353—359 (1951).
197. M c Q u i t t y L. L. [1] Hierarchical linkage analysis for the isolation of types. Educ. psychol. Meas. 20, 55—67 (1960);—[2] Hierarchical syndrom analysis. Educ. psychol. Meas. 20, 293—304 (1960);— [3] Comprehensive hierarchical analysis. Educ. psychol. Meas. 20, 805—816 (1960); — [4] A method for selecting patterns to differentiate categories of people. Educ. psychol Meas. 21, 85—94 (1961); — [5] Typal analysis. Educ. psychol. Meas.

21, 677—696 (1961); — [6] Capabilities and improvements of linkage analysis as a clustering method. Educ. psychol. Meas. 24, 441—456 (1964).
198. Madansky A. [1] Instrumental variables in factor analysis. Psychometrika 29, 105—113 (1964);— [2] On admissible communalities in factor analysis. Psychometrika 30, 455—458 (1965).
199. Mahmoud A. F. Test reliability in terms of factor theory. Brit. J. statist. Psychol. 7, 119—135 (1955).
200. Massy W. F. Principal components regression in exploratory statistical research. J. Amer. statist. Ass. 60, 234—256 (1965).
201. Maxwell A. E. [1] Statistical methods in factor analysis. Psychol. Bull. 56, 228—235 (1959);— [2] Recent trends in factor analysis. J. roy. statist. Soc. A 124, 49—59 (1961).
202. Medland F. F. An empirical comparison of methods of communality estimation. Psychometrika, 12, 101—109 (1947).
203. Mentzos S., Legewie H., Bochnik H.J. Über das Bedingungsgefüge der cerebralen Anfallsbereitschaft. Arch. Psychiat. Nervenkr. 205, 655—675 (1964).
204. Meredith W. Rotation to achieve factorial invariance. Psychometrika 29, 187—206 (1964).
205. Merrifield P. R. and Cliff N. Factor analytic methodology. Rev. educ. Res. 33, 510—522 (1963).
206. Merz F. Faktorenanalyse. Psychologie u. Prax. 3, 260—268 (1959).
207. Mills D. H. and Tucker L. R. A three-mode factor analysis of clinical judgement of schizophrenicity. J. clin. Psychol. 22, 136—139 (1966).
208. Moseley E. C. and Klett C. J. An empirical comparison of factor scoring methods. Psychol. Rep. 14, 179—184 (1964).
209. Mosier C. I. [1] Influence of chance error on simple structure: An empirical investigation of the effect of chance error and estimated communalities on simple structure in factorial analysis. Psychometrika 4, 33—44 (1939); — [2] Determining a simple structure when loadings for certain tests are known. Psychometrika 4, 149—162 (1939).
210. Mustakallio K. K., Lassus A. and Putkonen T. Factor analysis in the evaluation of criteria and variants of systemic lupus erythematosus. Meth. Inform. Med. 5, 184—192 (1966).
211. Naus J. I. Clustering of random points in two dimensions. Biometrika 52, 263—267 (1965).
212. Neiss F. Determinanten und Matrizen. Berlin, 1962.
213. Neuhaus. J. O. and Wrigley C. The quartimax method. Brit. J. statist. Psychol. 7, 81—91 (1954).
214. Novick M. R. The axioms and principal results of classical test theory. J. math. Psychol. 3, 1—18 (1966).
215. Nuttall R. and Solomon L. F. Factorial structure and prognostic significance of premorbid adjustment in schizophrenia. J. consult. Psychol. 29, 362—372 (1965).
216. Orlik P. Das Dilemma der Faktorenanalyse — Zeichen einer Aufbaukrise in der modernen Psychologie. Psychol. Beitr. 10, 87—98 (1967).
217. Overall J. E. [1] Orthogonal factors and uncorrelated factor scores. Psychol. Rep. 10, 651—662 (1962); — [2] Note on the scientific status of factors. Psychol. Bull. 61, 270—276 (1964).
218. Overall J. E. and Porterfield J. L. Powered vector method of factor analysis. Psychometrika 28, 415—422 (1962).
219. Overall J. E. and Williams C. M. Models for medical diagnosis: Factor analysis. Med. Dok 5, 51—56, 78—80 (1961).
220. Pawlik K. [1] Experimentelle Untersuchungen zur Faktorenanalyse algebraisch abgeleiteter Variabler. Biometr. Z. 6, 42—44 (1964); — [2] Dimensionen des Verhaltens. Bern, 1968.
221. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. Phil. Mag. 6, 559—572 (1901).
222. Perkal J., Szczotka F. Eine neue Methode der Analyse eines Kollektivs von Merkmalen. Biometr. Z. 2, 108—116 (1960).

223. Petersen K. Die Faktorenanalyse des Längen- und Gewichtswachstums männlicher Schulkinder. Z. menschl. Vererb.-u. Konstit.-Lehre 35, 126—135 (1959).

224. Petrinovich L. and Hardyck C. Behavioral changes in Parkinson patients following surgery. J. chron. Dis. 17. 225—240 (1964).

225. Pillai K. C. S. On the distribution of the largest characteristic root of a matrix in multivariate analysis. Biometrika 52, 405—414 (1965).

226. Pinneau S. R. and Newhouse A. Measures of invariance and comparability in factor analysis for fixed variables. Psychometrika 29, 271—281 (1964).

227. Pinzka C. and Saunders D. R. Analytic rotation to simple structure II: Extension to an oblique solution. Educational Testing Service. Princeton., N. J., Res. Bull. RB-54-31, 1—34 (1954).

228. Radcliff J. A. Some properties of ipsative score matrices. Austr. J. Psychol. 15, 1—11 (1963).

229. Ranio K. On the significance of factors in studies with a small number of variables. Acta Psychol. 16, 277—289 (1959).

230. Rao C. R. [1] The utilisation of multiple measurement in problems of biological classification. J. roy. statist. Soc. 2, 159—193 (1948); — [2] Advanced statistical methods in biometric research. N. Y., 1952;— [3] Estimation and tests of significance in factor analysis. Psychometrika 20, 93—111 (1955);— [4] Multivariate analysis an indispensable statistical aid in applied research. Sankhyā (Calcutta) 22, 317—338 (1960); — [5] The use and interpretation of principal component analysis in applied research. Sankhyā (Calcutta) (A) 26, 329—358 (1964);— [6] Linear statistical inference and its applications. N. Y., 1965. Русский перевод: Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М., Наука, 1968.

231. Rasch G. On simultaneous factor analysis in several populations. Uppsala Symp. on psychol. Factor Analysis. Nord. psychol. Monogr. 3, 65—71 (1953).

232. Rawson H. E. and Rettig S. Factor analysis as a controlling technique. Educ. psychol. Meas. 22, 725—729 (1962).

233. Reyburn H. A. and Raath M. J. Simple structure: a critical examination. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 2, 125—133 (1949).

234. Reyburn H. A. and Taylor J. G. On the interpretation of common factors: a criticism and a statement. Psychometrika 8, 53—64 (1943).

235. Richter H. Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956.

236. Rippe. D. D. Application of a large sampling criterion to some sampling problems in factor analysis. Psychometrika 18, 191—205 (1953).

237. Roff M. Some properties of the communality in multiple factor theory. Psychometrika 1, 1—6 (1936).

238. Rogers D. J. and Fleming H. A computer program for classifying plants II. Bioscience 14, 15—28 (1964).

239. Rogers D. J. and Tanimoto T. T. A computer program for classifying plants I. Science 132, 1115—1118 (1960).

240. Rogers M. S. and Shure G. H. An empirical evaluation of the effect of item overlap on factorial stability. J. Psychol. 60, 221—233 (1965).

241. Rohlfs F. S. and Sokal R. R. The description of taxometric relationship by factor analysis. Syst. Zool. 11, 1—16 (1962).

242. Roppert J., Fischer G. Lineare Strukturen in Mathematik und Statistik unter besonderer Berücksichtigung der Faktoren- und Transformationsanalyse. Wien — Würzburg, 1965

243. Ross J. [1] Informational coverage and correlational analysis. Psychometrika 27, 297—305 (1962); — [2] The relation between test and person factors. Psychol. Rev. 70, 432—443 (1963).

244. R o s s J. and C l i f f N. A generalization of the interpoint distance model. Psychometrika 29, 167—176 (1964).
245. R o y c e J. R. [1] The developement of factor analysis J. gen. Psychol. 58, 139—164. (1958);— [2] Factors as theoretical constructs. Amer. Psychol. 18, 522—527 (1963).
246. R y d e r R. G. Profile factor analysis and variable factor analysis. Psychol. Rep. 15, 119—127 (1964).
247. S a k o d a J. Osgood and Sucis measure of pattern similarity and Q-technique factor analysis. Psychometrika 19, 253—256 (1954).
248. S a n d l e r J. The reciprocity principle as an aid to factor analysis. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 1, 180—187 (1948).
249. S a u n d e r s D. R. [1] An analytic method for rotation of axes to simple structure. Educational Testing Service, Princeton, N. J. Res. Bull. 53—10, 1953;— [2] A computer program to find the best-fitting orthogonal factors for a given hypothesis. Psychometrika 25, 199—205 (1960);— [3] The rationale for an «oblimax» method of transformation in factor analysis. Psychometrika 26, 317—324 (1961).
250. S a w i r i s M. Y. Transformation methods for latent roots and vectors. Multivar. behav. Res. 2, 385—403 (1967).
251. S c h ä f f e r K. A. Multivariate Datenanalyse des Wahlverhaltens in der Bundesrepublik Deutschland. Habilitationsschrift, Wirtschaftswiss. Fakultät d. Univ. Mainz, 1966.
252. S c h e f f é H. The analysis of variance. N. Y., 1963. Русский перевод: Ш е ф ф е Г. Дисперсионный анализ. М., Физматгиз, 1963.
253. S c h e i e r I. H., C a t t e l l R. B. and S u l l i v a n W. P. Predicting anxiety from clinical symptoms of anxiety. Psychiat. Quart. Supp. Pt. 1, 1—13 (1961).
254. S c h e r A. M., Y o u n g A. C. and M e r e d i t h W. M. Factor analysis of the electrocardiogram. Test of electrocardiographic theory: Normal hearts. Circulat. Res. 8, 519—526 (1960).
255. S c h i c k C. Zur Faktorenanalyse der Konstitutionstypen. Z. menschl. Vererb.-u. Konstit — Lehre 32, 1—31 (1953).
256. S c h m i d C. F. and T a g a s h i r a K. Ecological and demographical indices: a methodological analysis. Demography 1, 194—211 (1964).
257. S c h m i d J. and L e i m a n J. M. The development of hierarchical factor solutions. Psychometrika 22, 53—61 (1957).
258. S c h n e l l P. [1] Dipl.-Arbeit, Institut f. Angew. Mathematik, Darmstadt, 1965;— [2] PAFA. Vervielfältigte Programmbeschreibung des Deutschen Rechenzentrums Darmstadt vom 16.3. 1965.
259. S c h u e s s l e r K. F. and D r i v e r H. A factor analysis of primitive societies. Amer. sociol. Rev. 21, 493—499 (1956).
260. S c h u m a c h e r C. F., A factor-analytic study of various criteria of medical student accomplishment. J. med. Educ. 39, 192—196 (1964).
261. S c h w i d e t z k y I. Faktoren des Schädelbaus bei der vorspanischen Bevölkerung der Kanarischen Inseln. Homo 10, 237—245 (1959).
262. S h e p a r d R. N. The analysis of proximities: multidimensional scaling with unknown distance function I. Psychometrika 27, 125—140 (1962).
263. S h i b a S. The generalized method for principal components of scale analysis. Jap. psychol. Res. 7, 163—165 (1965).
264. S h u b i k M. Bibliography on simulation, gaming, artificial intelligence and allied topics. J. Amer. statist. Ass. 55, 736—751 (1960).
265. S i x t l F. [1] Ein Verfahren zur Rotation von Faktorenladungen nach einem vorgegebenen Kriterium. Arch. ges. Psychol. 116, 92—97 (1964);— [2] Vorläufige Mitteilungen: Ein Verfahren zur Bestimmung von Faktorenstrukturen ohne vorherige Berechnung der skalaren Produkte. Z. exp. angew. Psychol. 11, 349—351 (1964); — [3] Faktoreninvarianz and Faktoreninterpretation. Psychol. Beitr. 10, 99—111 (1967).
266. S i x t l F., W e n d e r K. Der Zusammenhang zwischen multidimensionalem Skalieren und Faktorenanalyse. Biometr. Z. 6, 251—261 (1964).

267. S l a t e r P. The factor analysis of a matrix of 2×2 tables. J. roy. statist. Soc. Suppl. 9, 114—127 (1947).

268. S n e a t h P. H. A. [1] Some thoughts on bacterial classification. J. gen. Microbiol. 17, 184—200 (1957);— [2] The application of computers to taxonomy. J. gen. Microbiol. 17, 201—226 (1957).

269. S n e a t h P. H. A. and C o w a n S. T. An electro-taxonomic survey of bacteria. J. gen. Microbiol. 19, 551—565 (1958).

270. S n e a t h P. H. A. and S o k a l R. R. Numerical taxonomy. Nature (L.) 193, 855—860 (1962).

271. S o k a l R. R. A comparison of five tests for completeness of factor extraction. Trans. Kansas Acad. Sci. 62, 141—152 (1959).

272. S p e a r m a n C. [1] General intelligence, objestively determined and measured. Amer. J. Psychol. 15, 201—293 (1904);— [2] Theory of general factor. Brit. J. Psychol. 36, 117—131 (1946).

273. S p i e g e l M. A. Theory and problems of statistics. N. Y., 1961.

274. S p r e e n O. Die Stellung von vier motorischen Variablen in einer Faktorenanalyse und ihre Beziehungen zu Angst und Stress. Psychol. Forsch. 27, 403—418 (1964).

275. S t a n g e K., H e n n i n g H. J. Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berlin, 1966.

276. S t e i n b u c h K. (Hrsg.) [1] Taschenbuch der Nachrichtenverarbeitung. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962;— [2]. Automat und Mensch. Kybernetische Tatsachen und Hypothesen. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1963.

277. S t e i n e r D. Die Faktorenanalyse — ein modernes statistisches Hilfsmittel des Geographen für die objektive Raumgliederung und Typenbildung. Geogr. helv. 20, 20 — 34 (1965).

278. S t e p h e n s o n W. [1] Correlating persons instead of tests. Character and Personality 4, 17—24 (1935); — [2] The foundations of psychometry: four factor systems. Psychometrika 1, 195—209 (1936); — [3] The inverted factor technique. Brit. J. Psychol. 26, 344—361 (1936).

279. S t o g d i l l R. M. [1] Brief report: some possible uses of factor analysis in multivariate studies. Mult. behav. Res. 1, 387—389 (1966); — [2] The structure of organisation behavior. Mult. behav. Res. 47—61 (1967).

280. S t o g d i l l R. M., S h a r t l e C. L., W h e r r y R. J. and J a y n e s W. E. A factorial study of administrative behavior. Personnel Psychol. 8, 165—180 (1955).

281. T a y l o r P. A. The use of factor models in curriculum evaluation a mathematical model relating two factor structures. Educ. psychol. Meas. 27, 305—321 (1967)

282. T e n o p y r M. L., and M i c h a e l W. B. A comparison of two computer-based procedures of orthogonal analytic rotation with a graphical method when a general factor is present. Educ. psychol. Meas. 23, 587—597 (1963).

283. T e n o p y r M. L. and M i h a e l W. B. The development of a modification in the normal varimax method for use with correlation matrices containing a general factor. Educ. psychol. Meas. 24, 677—699 (1964).

284. T h o m s o n G. [1] The influence of univariate selection on the factorial analysis of ability. Brit. J. Psychol. 28, 451—459 (1938); — [2] On estimating oblique factors. Brit. J. Psychol., Statist. Sect. 2, 1—2 (1949).

285. T h o m s o n G. and L e d e r m a n n W. The influence of multivariate selection on the factorial analysis of ability. Brit. J. Psychol. 29, 288—306 (1939).

286. T h u r s t o n e L. L. [1] Second-order factors. Psychometrika 9, 71—100 (1944); — [2] A multiple group method of factoring the correlation matrix. Psychometrika 10, 73—78 (1945); — [3] The effects of selection in factor analysis. Psychometrika 10, 165—198 (1945); — [4] Factorial analysis of body measurements. Amer. J. physiol. Anthrop. N. S. 5, 15—28 (1947); — [5] An analytical method for simple structure. Psychometrika 19, 173—182 (1954); — [6] Multiple factor analysis. 6th. ed. Chicago, 1961.

287. T i n t n e r G. Some formal relations in multivariate analysis. J. roy. statist. Soc. B 12, 95—101 (1950).

288. T o r g e r s o n W. S. Theory and methods of scaling. N. Y., 1962.

289. T r y o n R. C. [1] Cluster analysis. Ann. Arbor, Mich., 1939; [2] General dimension of individual differences; cluster analysis vs. multiple factor analysis. Educ. psychol. Meas. 18, 477—493 (1958); — [3] Domain sampling formulation of cluster and factor analysis. Psychometrika 24, 113—135 (1959); — [4] Unrestricted cluster and factor analysis with applications to the MMPI and Holzinger — Harman problems. Multivar. behav. Res. 1, 229—244 (1966); — [5] Person-clusters on intellectual abilities and on MMPI-attributes. Multivar. behav. Res. 2, 5—34 (1967); — [6] Predicting individual differences by cluster analysis: Holzinger abilities and MMPI personality attributes. Multivar. behav. Res. 2, 325—348 (1967).

290. T r y o n R. C. and B a i l e y D. E. The BC-TRY computer system of cluster and factor analysis. Multivar. behav. Res, 1, 95—111 (1966).

291. T u c k e r L. R. [1] In: T h u r s t o n e L. L. Primary mental abilities. Psychometric Monogr. 1, Chicago, 1938;— [2] The role of correlated factors in factor analysis. Psychometrika 5, 141—152 (1942); — [3] A semi-analytic method of factorial rotation to simple structure. Psychometrika 9, 43—68 (1944); — [4] The objective definition of simple structure in linear factor analysis, Psychometrika 20, 209 — 225 (1955); — [5] Implications of factor analysis of three-way matrices for measurement of change. In: H a r r i s C. W. (Ed.). Problems in measuring change. Madison, Wis., 1963, p. 122—137; — [6] Scaling and test theory. Ann. Rev. Psychol. 14, 351—364 (1963);— [7] Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. Psychometrika 23, 19—23 (1958); — [8] An inter-battery method of factor analysis. Psychometrika 23, 111—136 (1958).

292. T y l e r F. and M i c h a e l W. B. An empirical study of the comparability of factor structure when unities and communality estimates are used. Educ. psychol. Meas. 18, 347—354 (1958).

293. Ü b e r l a K. [1] Die Faktorenanalyse als ein statistisches Modell für die medizinische Forschung. Münch. med. Wschr. 105, 1547 — 1533 (1963); — — [2] Zur Verwendung der Faktorenanalyse in der medizinischen Diagnostik. Meth. Inform. Med. 4. 89—92 (1965); — [3] Modelluntersuchungen zur Genauigkeit der Schätzung von direkt nichtmeßbaren Größen mit Hilfe der Faktorenanalyse. Meth. Inform. Med. 4, 195—201 (1965);— [4] Monte-Carlo-Experimente zur Aussagefähigkeit der Faktorenanalyse. In: M e r z F. (Hrsg.). Bericht über den 25. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie 1966, Göttingen, 1967, p. 271—276;— [5] Faktorenanalyse in der Medizin. Beiträge zur Methodik und Probleme der Anwendung. Habilitationsschrift, Med. Fakultät d. Univ. Mainz, 1967.

294. V i n c e n t P. F. The origin and developement of factor analysis. Appl. Statist. 2, 107—117 (1953).

295. V o g e l Th., H e m p e l K. J., L a n g e H.-J. Über die Kombination flächenhafter Blutungen. Frankfurt. Z. Path. 74, 420—424 (1965).

296. V u k o v i c h A. Faktorielle Typenbestimmung. Psychol. Beitr. 10, 112— — 121 (1967).

297. W a l d A. On a statistical problem arising in the classification of an individual into one of two groups. Ann. math Statist. 15, 145—162 (1944).

298. W a l k e r H. M. Statistische Methoden für Psychologen und Pädagogen. Weinheim — Berlin, 1954.

299. W a l k e r H. M. and L e v J. Statistical inference. N. Y., 1953.

300. W a l s h J. A. Methodological note on factor analysis as an experimental technique. Psychol. Rep. 16, 1099—1100 (1965).

301. W a r b u r t o n F. W. Analytic methods of factor rotation. Brit. J. statist. Psychol. 16, 165—173 (1963).

302. W e h e r Erna. Grundriß der biologischen Statistik für Naturwissenschaftler, Landwirte und Mediziner. 5. Aufl. Jena, 1964.

303. W e b e r Ernst. Biometrische Bearbeitung multipler Regressionen unter besonderer Berücksichtigung der Auswahl, der Transformationen und der Linearkombination von Variablen, Habilitationsschrift, Landwirtshaftl. Fakultät d. Univ. Kiel, 1965.

304. W e i l i n g F. Über Bedeutung und Handhabung der multiplen Regressionsanalyse bei der Untersuchung von Zusammenhängen im biologischen Bereich. Biometr. Z. 6, 23—36 (1964).

305. W e i t z m a n R. A. A factor analytic method for investigating differences between groups of individual learning curves. Psychometrika 28, 69—80 (1963).

306. W e l l e k A. Mathematik, Intuition und Raten. Stud. gen. 9,537—555 (1956).

307. W e r d e l i n I. [1] Synthesis of factor analysis I. The theoretical background. Scand. J. Psychol. 3, 143—154 (1962);—[2] Synthesis of factor analysis. II. Application of the method on an example. Scand. J. Psychol. 3, 155—164 (1962);—[3] Synthesis of factor analysis. III. Interbattery methods of synthesis of factor analyses. Scand. J. Psychol., 3, 196—204 (1962).

308. W e w e t z e r K. H. Intelligenzdiagnostik, Intelligenzmessung und Faktorenanalyse. Akt. Frag., Psychiat. Neurol., 1, 320—371 (1964).

309. W h i t e P. A. and B r o w n R. R. A comparison of methods for computing the eigenvalues and eigenvectors of a real symmetric matrix. Mathematics of computation 18, 457—463 (1964).

310. W h i t t l e P. On principal components and least square methods of factor analysis. Skand. Aktuartidskr. 35, 223—239 (1952).

311. W i l k i n s o n J. H. The algebraic eigenvalue problem. Oxford 1965. Русский перевод: У и л к и н с о н Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, 1970.

312. W i l k s S. S. Certain generalizations in analysis of variance. Biometrika 24, 471—494 (1932).

313. W i l l i a m s E. D. and B u r t C. The three dimensions of factor analysis. A reply. Brit. J. statist. Psychol. 15, 93—94 (1962).

314. W i l s o n E. B. and W o r c e s t e r J. Note on factor analysis. Psychometrika 4, 133—148 (1939).

315. W i s h a r t J. [1] Sampling errors in the theory of two factors. Brit. J. Psychol. 19, 180—187 (1928); — [2] Multivariate analysis. Appl. Statist. 4, 103—116 (1955).

316. W i t t i n g H. Mathematische Statistik. Stuttgart 1966.

317. W o l d H. O. A. Some artificial experiments in factor analysis. Uppsala Symp. on psychol. Factor Analysis. Nord. psychol. Monogr. 3, 43—64 (1953).

318. W o l f l e D. Factor analysis to 1940. Psychometr. Monogr. 3, 1—69 (1940).

319. W o o d b u r y M. A. Time series factor analysis. Proceedings of the 2nd IBM Medical Symposium, Endicott, N. Y., Sept. 28—30, 1960; p. 385 — 390. White Plains, N. Y.

320. W o o d b u r y M. A., C l e l l a n d R. C. and H i c k e y R. J. Applications of a factor-analytic model in the prediction of biological data. Behav. Sci. 8, 347—354 (1963).

321. W o o l f B. Computation and interpretation of multiple regressions. J. roy. Statist. Soc. 12, 100—119 (1950).

322. W r i g h t C. E. A factor dimension comparison of normative and ipsative measurement. Educ. psychol. Meas. 21, 433—444 (1961).

323. W r i g l e y C. F. [1] The distinction between common and specific variance in factor theory. Brit. J. ctatist. Psychol. 10, 81—91 (1957);— [2] The effect upon the communalities of changing the estimate of the number of factors. Brit. J. statist. Psychol. 12, 35—54 (1959).

324. W r i g l e y C. F. and N e u h a u s J. The matching of two sets of factors. Amer. Psychol. 10, 418—419 (1955).

325. W u l s t e n A. R. Komponentenanalyse. Diss. Staatswirtsch. Fak. d. Univ. München, 1960.

326. Young G. Factor analysis and the index of clustering. Psychometrika 4. 201—208 (1939).
327. Young G. and Householder A. S. Factorial invariance and significance. Psychometrika 5, 47—56 (1940).
328. Zimmerman W. S. A simple graphical method for orthogonal rotation of axes. Psychometrika 11, 51—55 (1946).
329. Zurmühl R. Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Berlin, 1964.

● ПРИЛОЖЕНИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

ДОПОЛНЕНИЕ К БИБЛИОГРАФИИ

Айвазян С. А. Статистическое исследование зависимостей. М., Металлургия, 1968.

Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В. Классификация многомерных наблюдений. М., Статистика, 1974.

Андрукович П. Ф. Применение метода главных компонент в регрессионном анализе. — Заводская лаборатория, 1970, т. 36, № 3.

Андрукович П. Ф. Применение метода главных компонент в практических исследованиях. Межфакультетская лаборатория статистических методов. М., изд. МГУ , 1973, вып. 36.

Браверман Э. М. Методы экстремальной группировки параметров и задача выделения существенных факторов. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 1.

Браверман Э. М., Дорофеюк А. А., Лумельский В. Я., Мучник И. Б. Диагонализация матрицы связи и выявление скрытых факторов. — В кн.: Проблемы расширения возможностей автоматов. М., Институт проблем управления АН СССР, 1971, вып. 1.

Бро Г. Г., Шнайдерман Л. М. Математические методы экономического анализа на предприятии. М., Статистика, 1976.

Дорофеюк А. А. Алгоритмы автоматической классификации (обзор литературы). — В кн.: Проблемы расширения возможностей автоматов. М., Институт проблем управления АН СССР, 1971, вып. 1.

Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М., Наука, 1979.

Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов. М., Наука, 1974.

Дубров А. М. Обработка статистических данных методом главных компонент. М., Статистика, 1978.

Дюран Б., Оделл П. Кластерный анализ. М., Статистика, 1977.

Елкина В. Н., Загоруйко Н. Г. Количественные критерии качества таксономии и их использование в процессе принятия решений. — В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск, Наука, 1969, вып. 36.

Загоруйко Н. Г. Методы распознавания и их применение. М., Сов. радио, 1972.

Жуковская В. М., Мучник И. Б. Факторный анализ в социально-экономических исследованиях. М., Статистика, 1976.

Окунь Я. Факторный анализ. М., Статистика, 1974.

Розин Б. Б. Теория распознавания образов в экономических исследованиях. М., Статистика, 1973.

Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике. М., Статистика, 1974.

Смирнов Е. С. Таксономический анализ. М., изд. МГУ, 1969.

Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М., Мир, 1978.

Автоматический анализ сложных изображеиий. Сб. переводов под ред. Э. М. Бравермана. М., Мир, 1969.

Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. М., ЦЭМИ АН СССР, 1975.

Вопросы статистической теории распознавания образов/Под ред. Б. В. Варского. М., Сов. радио, 1967.

Вопросы построения и применения статистических моделей экономических показателей предприятий. Новосибирск, АН СССР, Сиб. отд., 1971.

Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных систем. М., ЦЭМИ АН СССР, 1977.

Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. М., Наука, 1974.

Статистическая классификация, основанная на выборочных распределениях. Л., ЛГУ, 1978.

Статистические методы анализа экспертных данных. М., Наука, 1977.

Статистические методы классификации. изд. МГУ, препринт, № 6, 1969; вып. 1; препринт, № 31, 1972, вып. 3.

Статистическое измерение качественных характеристик. Сб. переводов под ред. Е. М. Четыркина, Статистика, 1972.

Прикладной многомерный статистический анализ. М., Наука, 1978.

Проблемы экономико-статистического анализа и моделирования промышленного производства. Новосибирск, Наука, 1969.

Математические методы в социальных науках. Сб. переводов с англ. М., Прогресс, 1973.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иберла К.

И14 Факторный анализ / Пер. с нем. В. М. Ивановой; Предисл. А. М. Дуброва. — М.: Статистика, 1980. — 398 с., ил.— (Математико-статистические методы за рубежом).

В пер.: 2 р. 60 к.

Книга посвящена многомерному статнстнческому анализу. В ней в комплексе рассматрнваются факторный, компонентный, дискрнмннантный н другие внды анализа. Представлены современные методы оценки весовых коэффнцнентов, интерпретация факторных решений. Задачн решаются прнменительно к современным ЭВМ.

Для ученых и практиков, занимающнхся статнстнческим исследованнем экономическнх явлений, а также для аспнрантов и студентов старших курсов вузов.

И $\frac{10805^*-034}{008(01)-80}$ 45—80 0702000000

ББК 22.172

517.8

* Второй индекс 10803.

Карл Иберла

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *К. М. Чижевская*

Мл. редактор *О. Б. Степанченко*

Техи. редактор *Р. Н. Феоктистова*

Корректоры *Г. А. Башарина, О. Г. Шумская*

Худ. редактор *Э. А. Смирнов*

Переплет художиика *Т. Н. Погореловой*

ИБ 757

Сдано в набор 25.06. Подписано в печать 13.02.80.
Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая.
П. л. 25,0 Усл. п. л. 25,0 Уч.-изд. л. 28,42 Тираж 9000 экз. Заказ 1189
Цеиа 2 р. 60 к.
Издательство «Статистнка», Москва, ул. Кнрова, 39.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфин н книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46